Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Асхабов, Градиентный метод решения нелинейных дискретных и интегральных уравнений с разностными ядрами, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 192, 26–37

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-26-37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:48:36

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 192 (2021). С. 26–37
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-192-26-37

УДК 517.968.4

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ

© 2021 г. С. Н. АСХАБОВ

Аннотация. Методом потенциальных монотонных (по Браудеру—Минти) операторов доказаны глобальные теоремы о существовании и единственности решения для дискретных и интегральных уравнений с разностными ядрами и нечетностепенными нелинейностями. В соответствии с градиентным методом (или методом наискорейшего спуска) построены последовательные приближения, которые сходятся к этим решениям по норме рассматриваемых пространств.

Ключевые слова: монотонный оператор, потенциальный оператор, нелинейное дискретное уравнение, нелинейное интегральное уравнение.

GRADIENT METHOD FOR SOLVING NONLINEAR DISCRETE AND INTEGRAL EQUATIONS WITH DIFFERENCE KERNELS

© 2021 S. N. ASKHABOV

ABSTRACT. The method of potential monotonic operators (called also the Browder–Minty method) is used to prove global theorems on the existence and uniqueness of solutions for discrete and integral equations with difference kernels and odd-power nonlinearities. Using the gradient method (or the steepest descent method), we construct successive approximations that converge to the solutions mentioned with respect to the norm.

Keywords and phrases: monotonic operator, potential operator, nonlinear discrete equation, nonlinear integral equation.

AMS Subject Classification: 45G10, 47J05

1. Введение. В работе рассматриваются нелинейные дискретные и интегральные уравнения с разностными ядрами. Для таких уравнений хорошо известны теоремы о существовании и единственности решения в различных (см., например, монографию [1] и приведенную в ней библиографию) пространствах, однако вопрос о том, как найти эти решения, мало изучен. В [2, 4, 6] комбинированием метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений показано, что решения дискретных и интегральных уравнений типа свертки с монотонной нелинейностью могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа в случаях гильбертовых пространств l_p и L_p , соответственно. При этом предполагается, что нелинейности рассматриваемых уравнений удовлетворяют условию Липшица, что не позволяет охватить степенные

нелинейности. Наша цель доказать, что в случае нечетностепенных нелинейностей решения дискретных и интегральных уравнений с разностными ядрами могут быть найдены градиентным методом.

Для удобства ссылок приведем определения и вспомогательные утверждения, используемые в данной работе, придерживаясь терминологии и обозначений, принятых в монографии [8].

Пусть X — вещественное банахово пространство и X^* сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$, а через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ нормы в X и X^* , соответственно.

Пусть $u, v \in X$. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ (т.е. действующий из X в X^*) называется

- (1) *монотонным*, если $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$;
- (2) *равномерно монотонным*, если $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \beta(\|u - v\|)$, где β — возрастающая на $[0, \infty)$ функция такая, что $\beta(0) = 0$;
- (3) *коэрцитивным*, если $\langle Au, u \rangle \geq \gamma(\|u\|) \cdot \|u\|$, где $\gamma(s)$ — такая вещественная функция неотрицательного аргумента, что $\gamma(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$;
- (4) *ограниченно липшиц-непрерывным*, если $\|Au - Av\|_* \leq \mu(r) \cdot \|u - v\|$, где μ — неотрицательная возрастающая на $[0, \infty)$ функция, а $r = \max(\|u\|, \|v\|)$;
- (5) *хеминепрерывным*, если вещественная функция $s \rightarrow \langle A(u + s \cdot v), w \rangle$ непрерывна на $[0, 1]$ при любых фиксированных $u, v, w \in X$.

Если A — линейный оператор, то определение монотонного оператора совпадает с определением *положительного* оператора.

Функционал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *дифференцируемым по Гато*, если существует такой оператор $A: X \rightarrow X^*$, что для всех $u, v \in X$ выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + t \cdot v) - f(u)}{t} = \langle Au, v \rangle.$$

При этом оператор A называют *градиентом* функционала f и пишут $A = \text{grad } f$.

Оператор $A: X \rightarrow X^*$ называется *потенциальным*, если существует такой функционал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, что оператор A является его градиентом. При этом функционал f называют *потенциалом* оператора A .

Пример 1. Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A: X \rightarrow X^*$ — линейный ограниченный симметрический оператор, т.е. $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ для всех $u, v \in X$. Тогда A является потенциальным оператором, а его потенциал равен $f(u) = \langle Au, u \rangle / 2$ (см. [1, § 1]).

Банахово пространство X называется *строго выпуклым*, если для всех $u, v \in X$ из условий $u \neq v$, $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ вытекает неравенство $\|u + v\| < 2$.

Оператор $J: X \rightarrow X^*$, где X^* — строго выпуклое пространство, называется *дуализующим отображением*, если для всех $u \in X$ выполняются равенства $\langle Ju, u \rangle = \|u\|^2 = \|Ju\|_*^2$.

Заметим, что строгая выпуклость сопряженного пространства X^* обеспечивает единственность дуализующего отображения $J: X \rightarrow X^*$ (см. [7, лемма 21.1]).

Следующая теорема является следствием общего результата, доказанного в [8, теорема 4.2].

Теорема 1. Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A: X \rightarrow X^*$ — хеминепрерывный равномерно монотонный коэрцитивный оператор. Тогда уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in X$ при любом $f \in X^*$. Кроме того, если X и X^* строго выпуклые пространства, а оператор A является потенциальным ограничено липшиц-непрерывным, то последовательность

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot J^*(Au_n - f),$$

где

$$\delta_n = \min \left\{ 1, 2 / [\varepsilon + \mu(\|u_n\| + \|Au_n - f\|_*)] \right\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$J^*: X^* \rightarrow X$ — дуализующее отображение для X^* , $\varepsilon > 0$ — произвольное число, сходится к u^* по нормам пространства X .

Доказательство. Существование и единственность решения u^* вытекает из теоремы Браудера—Минти (см. [8, теорема 2.1]), а сильная сходимость последовательности $\{u_n\}$ к u^* по указанной схеме — из [8, теорема 4.2, замечание 4.13], поскольку всякий равномерно монотонный оператор является строго монотонным оператором и обладает (S)-свойством (см. [8, замечание 1.5]). $\square$

Указанный в теореме 1 способ нахождения решения u^* известен как *градиентный метод* (или метод *наискорейшего спуска*), так как $J^*v = \|v\|_* \cdot \text{grad } \|v\|_*$ для всех $v \in X^*$ (см. [8]).

Всюду далее через $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{C}$ обозначаются, соответственно, множества всех действительных, натуральных, целых и комплексных чисел, а через p' — сопряженное с $p > 1$ число: $p' = p/(p-1)$.

2. Нелинейные дискретные уравнения типа свертки.

2.1. *Дискретные уравнения в весовом вещественном пространстве $\ell_p(\varrho)$.* Рассмотрим дискретный оператор свертки H :

$$(Hu)_n = (h * u)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} u_k, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

в вещественных пространствах числовых последовательностей ℓ_p , $1 \leq p \leq \infty$, с нормой

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^p \right)^{1/p} \text{ при } 1 \leq p < \infty, \quad \|u\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| \text{ при } p = \infty.$$

Теорема 2. Пусть $1 \leq p \leq 2$ и ядро $h \in \ell_s$, $1 \leq s \leq \min(2, p'/2)$. Для того, чтобы дискретный оператор свертки H был положительным в пространстве ℓ_p необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\hat{h}_c(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot \cos(k \cdot \theta) \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (2)$$

Заметим, что при условиях теоремы 2 оператор H действует непрерывно из ℓ_p в $\ell_{p'}$, причем $\|Hu\|_{p'} \leq \|h\|_s \cdot \|u\|_p$ (см. [1, следствие 29.1]).

Широкий класс ядер, удовлетворяющих условию (2) предоставляет следующий пример.

Пример 2 (см. [2]). Если ядро $h = \{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ представимо в виде

$$h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{n+k} \cdot g_k, \quad \text{где } g = \{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell_1, \quad (3)$$

то $\hat{h}_c(\theta) \geq 0$ при всех $\theta \in [0, \pi]$.

Лемма 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и ядро $h = \{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ представимо в виде (3). Тогда $h \in \ell_p$ и обладает следующими свойствами: $h_{-n} = h_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ и $\|h\|_p \leq \|g\|_1 \cdot \|g\|_p$.

Введем в рассмотрение весовое пространство $\ell_p(\varrho)$. Пусть $\varrho = \{\varrho_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ есть последовательность положительных чисел. Обозначим через $\ell_p(\varrho)$, $1 < p < \infty$, множество всех вещественных числовых последовательностей $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ таких, что

$$\|u\|_{p,1} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Известно, что $\ell_p(\varrho)$ является рефлексивным банаховым пространством и $\ell_p^*(\varrho) = \ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$, $p' = p/(p-1)$, есть сопряженное с ним пространство. Норму в $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ обозначим через $\|\cdot\|_{p',1-p'}$.

Известно, что для пространств ℓ_p имеет место непрерывное вложение $\ell_p \subset \ell_q$, если $p < q$, в отличие от пространств Лебега $L_p(a, b)$ для которых наоборот $L_q(a, b) \subset L_p(a, b)$, если $p < q$. Оказывается, что в случае весовых пространств $\ell_p(\varrho)$, в отличие от весовых пространств $L_p(\varrho)$, возможно обратное вложение: $\ell_q(\varrho_1) \subset \ell_p(\varrho_2)$, если $p < q$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $2 \leq p < \infty$ и вес $\varrho = \{\varrho_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\gamma = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{-2/(p-2)} \right)^{(p-2)/(2p)} < \infty \quad (4)$$

(при $p = 2$ полагаем $\gamma = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \varrho_n^{-1/2}$). Тогда справедливы непрерывные вложения

$$\ell_p(\varrho) \subset \ell_2 \subset \ell_{p'}(\varrho^{1-p'}), \quad (5)$$

причем

$$\|u\|_2 \leq \gamma \cdot \|u\|_{p,1}, \quad u \in \ell_p(\varrho), \quad \|u\|_{p',1-p'} \leq \gamma \cdot \|u\|_2, \quad u \in \ell_2. \quad (6)$$

При исследовании нелинейного дискретного уравнения типа свертки в весовом пространстве $\ell_p(\varrho)$ существенно будет использоваться следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $2 \leq p < \infty$, ядро h представимо в виде (3) и вес $\varrho = \{\varrho_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условию (4). Тогда дискретный оператор свертки H , определенный равенством (1), действует непрерывно из $\ell_p(\varrho)$ в $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$, положителен и потенциален, причем

$$\|Hu\|_{p',1-p'} \leq \gamma^2 \cdot \|g\|_1^2 \cdot \|u\|_{p,1}, \quad u \in \ell_p(\varrho). \quad (7)$$

Доказательство лемм 1–3 приведено в [2].

Из неравенств Кларксона для весовых пространств $\ell_p(\varrho)$ (см. [2]) непосредственно вытекает, что $\ell_p(\varrho)$ и $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ при $1 < p < \infty$ являются строго выпуклыми пространствами, причем для пространств $\ell_p(\varrho)$, $1 < p < \infty$, дуализующее отображение однозначно определяется по формуле $Ju = \|u\|_{p,1}^{2-p} \cdot z$, где $z = \{\varrho_n |u_n|^{p-2} u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (случай $\varrho = 1$ см. в [7]).

Заметим, что дуализующее отображение J^* для сопряженного пространства $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ единственным образом определяется по формуле:

$$J^*v = \|v\|_{p',1-p'}^{2-p'} \cdot z, \quad \text{где } z = \{\varrho_n^{1-p'} |v_n|^{p'-2} v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}. \quad (8)$$

Непосредственно проверяется, что $\langle J^*v, v \rangle = \|v\|_{p',1-p'}^2 = \|J^*v\|_{p,1}^2$ при всех $v \in \ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$.

Теорема 3. Пусть $p > 2$ — четное число, ядро h представимо в виде (3) и вес ϱ удовлетворяет условию (4). Тогда при любом $f \in \ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ нелинейное дискретное уравнение

$$\varrho_n \cdot u_n^{p-1} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} u_k = f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

имеет единственное решение $u^* \in \ell_p(\varrho)$. К этому решению сходится по норме пространства $\ell_p(\varrho)$ последовательность $u^{(i)} = \{u_n^{(i)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, определяемая по формуле

$$u_n^{(i+1)} = u_n^{(i)} - \delta^{(i)} \cdot \varrho_n^{-1/(p-1)} \cdot \|Au^{(i)} - f\|_{p',1-p'}^{(p-2)/(p-1)} \cdot |Au_n^{(i)} - f_n|^{(2-p)/(p-1)} \cdot (Au_n^{(i)} - f_n), \quad (10)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$, $u^{(0)} = \{u_n^{(0)}\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell_p(\varrho)$ — любое начальное приближение, $Au = \varrho \cdot u^{p-1} + Hu$,

$$\delta^{(i)} = \min \left\{ 1, \frac{2}{\varepsilon + (p-1) \cdot (\|u^{(i)}\|_{p,1} + \|Au^{(i)} - f\|_{p',1-p'})^{p-2} + \gamma^2 \|g\|_1^2} \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Запишем уравнение (9) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = \varrho \cdot u^{p-1} + Hu$. Так как $\|\varrho \cdot u^{p-1}\|_{p',1-p'} = \|u\|_{p,1}^{p-1}$, то оператор $Bu = \varrho \cdot u^{p-1}$ действует непрерывно из $\ell_p(\varrho)$ в $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ и потенциален (см. [8, лемма 4.1]). Поэтому оператор A , будучи суммой двух непрерывных потенциальных операторов, является непрерывным потенциальным оператором, действующим из $\ell_p(\varrho)$ в $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$.

Покажем, что оператор A является равномерно монотонным. Используя лемму 3 и неравенство $(t^{p-1} - s^{p-1})(t - s) \geq 2^{2-p}|t - s|^p$, справедливое для всех $t, s \in \mathbb{R}$ и четных $p \geq 2$, имеем

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n(u_n^{p-1} - v_n^{p-1})(u_n - v_n) + \langle H(u - v), u - v \rangle \geq \\ &\geq 2^{2-p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n - v_n|^p = \beta(\|u - v\|_{p,1}), \quad u, v \in \ell_p(\varrho), \end{aligned}$$

где $\beta(x) = 2^{2-p}x^p$ строго возрастающая на $[0, \infty)$ функция и $\beta(0) = 0$. Значит, A — равномерно монотонный оператор, и по теореме 1 уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in \ell_p(\varrho)$.

Осталось доказать, что это решение можно найти по итерационной формуле (10). Поскольку пространства $\ell_p(\varrho)$ и $\ell_{p'}(\varrho^{1-p'})$ являются строго выпуклыми, и оператор A является непрерывным, равномерно монотонным и потенциальным, то с учетом явного вида (8) дуализующего отображения J^* на основании теоремы 1 достаточно доказать, что оператор A является ограничено липшиц-непрерывным. Используя числовое неравенство

$$|t^{p-1} - s^{p-1}| \leq \frac{p-1}{2}|t - s|(t^{p-2} + s^{p-2}),$$

справедливое для всех $t, s \in \mathbb{R}$ и четных $p \geq 2$, для любых $u, v \in \ell_p(\varrho)$ имеем

$$\begin{aligned} \|\varrho u^{p-1} - \varrho v^{p-1}\|_{p',1-p'} &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{1-p'} |\varrho_n(u_n^{p-1} - v_n^{p-1})|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n^{p-1} - v_n^{p-1}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{p-1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n - v_n|^{p'} |u_n^{p-2} + v_n^{p-2}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \frac{p-1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{p'-1} |u_n - v_n|^{p'} \varrho_n^{2-p'} |u_n^{p-2} + v_n^{p-2}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \end{aligned}$$

(применяем неравенство Гельдера с показателями p/p' и $p/(p-p')$, где $p > 2$ четное число)

$$\begin{aligned} &\leq \frac{p-1}{2} \left(\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{\frac{(p'-1)p}{p'}} |u_n - v_n|^p \right]^{\frac{p'}{p}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n^{\frac{(2-p')p}{p-p'}} |u_n^{p-2} + v_n^{p-2}|^{\frac{pp'}{p-p'}} \right]^{\frac{p-p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \frac{p-1}{2} \|u - v\|_{p,1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varrho_n |u_n^{p-2} + v_n^{p-2}|^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}} \leq \end{aligned}$$

(вносим ϱ_n под знак модуля и затем применяем неравенство Минковского)

$$\leq \frac{p-1}{2} \|u - v\|_{p,1} \left(\|u\|_{p,1}^{p-2} + \|v\|_{p,1}^{p-2} \right) \leq (p-1)r^{p-2} \|u - v\|_{p,1},$$

где $r = \max(\|u\|_{p,1}, \|v\|_{p,1})$. Используя последнее неравенство и неравенство (7), получаем

$$\begin{aligned} \|Au - Av\|_{p,1} &\leq \|\varrho u^{p-1} - \varrho v^{p-1}\|_{p,1} + \|H(u - v)\|_{p,1} \leq \\ &\leq (p-1)r^{p-2} \|u - v\|_{p,1} + \gamma^2 \|g\|_1^2 \|u - v\|_{p,1} = \mu(r) \|u - v\|_{p,1}, \end{aligned}$$

где $\mu(r) = (p-1)r^{p-2} + \gamma^2 \|g\|_1^2$ — возрастающая на $[0, \infty)$ функция. Значит, A — ограничено липшиц-непрерывный оператор. $\square$

В связи с теоремой 2 отметим, что в [1, 2, 10, 14] изучены различные классы нелинейных дискретных уравнений и, в частности, дискретные уравнения типа Гаммерштейна.

2.2. *Дискретные операторы свертки в комплексном пространстве l_p .* Аналогичные результаты имеют место в случае комплексных пространств l_p и операторов более общего, чем H , вида. Обозначим через l_p , $1 \leq p \leq \infty$, пространство, состоящее из последовательностей комплексных чисел $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ таких, что

$$\|u\|_p^p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^p < \infty \quad \text{при } 1 \leq p < \infty, \quad \|u\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| < \infty \quad \text{при } p = \infty.$$

Хорошо известно, что l_p при $1 < p < \infty$ есть сепарабельное рефлексивное банахово пространство, $l_{p'}$, $p' = p/(p-1)$, является сопряженным с ним пространством и общий вид линейного непрерывного функционала в l_p определяется по формуле

$$\langle y, x \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \cdot \overline{x_n}, \quad \text{где } y \in l_{p'}, \quad x \in l_p,$$

(черта сверху означает знак комплексного сопряжения), причем $\langle y, x \rangle$ совпадает со скалярным произведением (y, x) в гильбертовом пространстве l_2 , т.е. при $p = p' = 2$.

Определим в пространстве l_2 дискретный оператор свертки H с помощью равенства (1). Известно, что если $h \in l_1$, то оператор H действует непрерывно из l_2 в l_2 , причем справедливо дискретное неравенство Юнга $\|Hu\|_2 \leq \|h\|_1 \cdot \|u\|_2$.

Обозначим через $\hat{h}(\Theta)$ и $h(t)$, где $\hat{h}(\Theta) = h(t)$ при $t = \exp(i \cdot \Theta)$, соответственно, дискретные преобразования Фурье и Лорана последовательности $h = \{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (см. [9, § 24]):

$$\begin{aligned} \hat{h}(\Theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \cdot \exp(in\Theta), \quad h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(\Theta) \exp(in\Theta) d\Theta, \\ h(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \cdot t^n, \quad h_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} h(t) \cdot t^{-n-1} dt. \end{aligned}$$

Следуя [12, п. 2.2.4], обозначим через $L_p(-\pi, \pi)$, $1 \leq p \leq \infty$, множество всех измеримых на интервале $(-\pi, \pi)$ комплекснозначных 2π -периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(-\pi, \pi)} &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} < \infty \quad \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{L_{\infty}(-\pi, \pi)} &= \operatorname{ess\,sup}_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x)| < \infty \quad \text{при } p = \infty. \end{aligned}$$

Докажем следующую лемму, играющую важную роль при исследовании методом монотонных операторов нелинейных дискретных уравнений типа свертки в комплексных пространствах l_p .

Лемма 4. Пусть $1 < p < \infty$, ядро $h \in l_1$ и удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \hat{h}(\Theta) = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \cdot \exp(in\Theta) \geq 0, \quad \Theta \in (-\pi, \pi). \quad (11)$$

Если выполнено условие:

$$b \in l_{\infty} \text{ при } 1 < p \leq 2 \quad \text{и} \quad b \in l_{2p/(p-2)} \text{ при } 2 < p < \infty, \quad (12)$$

то дискретный оператор свертки B , определяемый по правилу

$$(Bu)_n = \overline{b_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k h_{n-k} u_k, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (13)$$

действует непрерывно из пространства l_p в сопряженное с ним пространство $l_{p'}$ и положителен, причем для всех $u \in l_p$ справедливы неравенство

$$\|Bu\|_{p'} \leq C \cdot \|u\|_p, \quad (14)$$

где

$$C = \begin{cases} \|b\|_\infty^2 \cdot \|h\|_1, & \text{если } 1 < p \leq 2 \\ \|b\|_{2p/(p-2)}^2 \cdot \|h\|_1, & \text{если } 2 < p < \infty \end{cases}$$

и равенство

$$\operatorname{Re}\langle Bu, u \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \widehat{h}(\Theta) \cdot |\widehat{b \cdot u}(\Theta)|^2 d\Theta. \quad (15)$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство (14).

1. Пусть $p = 2$. Тогда в силу дискретного неравенства Юнга с учетом того, что $|\overline{b_n}| = |b_n|$ и $\|b \cdot u\|_2 \leq \|b\|_\infty \|u\|_2$, т.е. $b \cdot u \in l_2$, имеем

$$\|Bu\|_2 \leq \|\overline{b}\|_\infty \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} b_k u_k \right|^2 \right)^{1/2} \leq \|b\|_\infty \|h\|_1 \|b \cdot u\|_2 \leq \|b\|_\infty^2 \|h\|_1 \|u\|_2. \quad (16)$$

Таким образом, неравенство (14) доказано при $p = 2$:

2. Пусть $1 < p < 2$. Тогда $p' > 2$ и имеют место непрерывные вложения $l_p \subset l_2 \subset l_{p'}$, причем справедливы неравенства [12, п. 2.2.5]:

$$\|u\|_{p'} \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_p, \quad u \in l_p. \quad (17)$$

Заметим, что $b \cdot u \in l_2$ для всех $u \in l_p$ в силу вложения $l_p \subset l_2$ и очевидного неравенства $\|b \cdot u\|_2 \leq \|b\|_\infty \|u\|_2$, использованного в п. 1. Далее, используя неравенства (16) и (17), имеем

$$\|Bu\|_{p'} \leq \|Bu\|_2 \leq \|b\|_\infty^2 \|h\|_1 \|u\|_2 \leq \|b\|_\infty^2 \|h\|_1 \|u\|_p.$$

Следовательно, неравенство (14) выполняется при $1 < p < 2$.

3. Пусть, наконец, $2 < p < \infty$. Применяя неравенство Гельдера для сумм, имеем

$$\|b \cdot u\|_2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 \|u_n\|^2 \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^{2p/(p-2)} \right)^{(p-2)/p} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^p \right)^{2/p},$$

откуда

$$\|b \cdot u\|_2 \leq \|b\|_{2p/(p-2)} \|u\|_p, \quad u \in l_p,$$

т.е. $b \cdot u \in l_2$. Так как ядро $h \in l_1$, то на основании дискретного неравенства Юнга имеем $H(b \cdot u) \in l_2$, причем в силу предыдущего неравенства

$$\|H(b \cdot u)\|_2 \leq \|h\|_1 \|b \cdot u\|_2 \leq \|h\|_1 \|b\|_{2p/(p-2)} \|u\|_p, \quad u \in l_p. \quad (18)$$

Применяя неравенство Гельдера для сумм с показателями $2/(2-p')$ и $2/p'$, имеем

$$\|\overline{b} \cdot H(b \cdot u)\|_{p'}^{p'} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\overline{b_n}|^{p'} \cdot \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k h_{n-k} u_k \right|^{p'} \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\overline{b_n}|^{2p'/(2-p')} \right)^{(2-p')/2} \|H(b \cdot u)\|_2^{p'},$$

откуда с учетом неравенства (18) и того факта, что $2p'/(2-p') = 2p/(p-2)$ и $|\overline{b_n}| = |b_n|$, получаем

$$\|Bu\|_{p'} = \|\overline{b} \cdot H(b \cdot u)\|_{p'} \leq \|\overline{b}\|_{2p/(p-2)} \|H(b \cdot u)\|_2 \leq \|b\|_{2p/(p-2)}^2 \|h\|_1 \|u\|_p,$$

т.е. неравенство (14) справедливо при $2 < p < \infty$.

Таким образом, в пп. 1–3 неравенство (14) доказано для всех $p \in (1, \infty)$ и, значит, оператор B действует непрерывно из l_p в $l_{p'}$ при любом $p \in (1, \infty)$. Осталось установить положительность

оператора B . Для этого докажем сначала, что оператор свертки H является положительным в пространстве l_2 , т.е. выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(Hu, u) = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} u_k \right) \overline{u_n} \geq 0, \quad u \in l_2. \quad (19)$$

Итак, пусть $h \in l_1$ и $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — произвольная финитная последовательность. Положим

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} u_k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда (см. [9, п. 24.3]) $c(t) = h(t) \cdot u(t)$ и, значит,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} u_k = c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} h(t) \cdot u(t) \cdot t^{-n-1} dt.$$

Поэтому, с учетом того, что

$$\overline{u}(t) \cdot t^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{u_n} \cdot t^{-n-1}$$

и $\widehat{h}(\Theta) = h(t)$, $\widehat{u}(\Theta) = u(t)$ при $t = \exp(i\Theta)$, имеем

$$\begin{aligned} (Hu, u) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} u_k \right) \overline{u_n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} h(t) \cdot u(t) \cdot t^{-n-1} dt \right] \overline{u_n} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} h(t) \cdot u(t) \cdot t^{-n-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{u_n} \cdot t^{-n-1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} h(t) \cdot u(t) \cdot \overline{u}(t) \cdot t^{-1} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} h(t) \cdot |u(t)|^2 \cdot t^{-1} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}(\Theta) \cdot |\widehat{u}(\Theta)|^2 \cdot \exp(-i\Theta) \cdot i \cdot \exp(i\Theta) d\Theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}(\Theta) \cdot |\widehat{u}(\Theta)|^2 d\Theta \end{aligned}$$

(изменение порядка интегрирования и суммирования допустимо, так как $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — финитная последовательность). Таким образом, равенство

$$(Hu, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}(\Theta) \cdot |\widehat{u}(\Theta)|^2 d\Theta \quad (20)$$

справедливо для любого ядра $h \in l_1$ и любой финитной последовательности $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

По теореме Хаусдорфа—Юнга (см. [13, п. 13.5]) имеем

$$\|\widehat{h}\|_{L_{\infty}(-\pi, \pi)} \leq \|h\|_1, \quad \|\widehat{u}\|_{L_2(-\pi, \pi)} \leq \|u\|_2.$$

Поэтому

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}(\Theta) \cdot |\widehat{u}(\Theta)|^2 d\Theta \right| \leq \|\widehat{h}\|_{L_{\infty}(-\pi, \pi)} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{u}(\Theta)|^2 d\Theta \leq \|\widehat{h}\|_{L_{\infty}(-\pi, \pi)} \|u\|_2^2, \quad u \in l_2. \quad (21)$$

Кроме того, на основании неравенств Коши—Буняковского и Юнга имеем

$$|(Hu, u)| \leq \|Hu\|_2 \|u\|_2 \leq \|h\|_1 \|u\|_2^2, \quad u \in l_2. \quad (22)$$

Таким образом, в силу (21) и (22), обе части равенства (20) определены при любом $u \in l_2$, представляют собой линейные непрерывные функционалы в пространстве l_2 и совпадают при $h \in l_1$, если $u = \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — произвольная финитная последовательность. Поскольку множество всех финитных последовательностей плотно в пространстве l_2 , то равенство (20) справедливо для любого $u \in l_2$. Следовательно, в силу условия (11), справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(Hu, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \widehat{h}(\Theta) \cdot |\widehat{u}(\Theta)|^2 d\Theta \geq 0, \quad u \in l_2, \quad (23)$$

равносильное неравенству (19), т.е. оператор свертки H является положительным в гильбертовом пространстве l_2 .

Наконец, докажем положительность оператор свертки B в пространстве l_p . В самом деле, так как $Bu = \bar{b} \cdot H(b \cdot u)$ и, как доказано в пп. 1–3, $b \cdot u \in l_2$ при всех $u \in l_p$, то на основании равенства (15) имеем

$$\langle Bu, u \rangle = \langle \bar{b} \cdot H(b \cdot u), u \rangle = \langle H(b \cdot u), b \cdot u \rangle = (H(b \cdot u), b \cdot u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}(\Theta) \cdot |\widehat{b \cdot u}(\Theta)|^2 d\Theta, \quad u \in l_2,$$

откуда вытекает равенство (15) для всех $u \in l_2$. Из равенства (15), подобно тому как из равенства (20) было получено неравенство (23), в силу условия (11) сразу получаем неравенство $\operatorname{Re}\langle Bu, u \rangle \geq 0$, $u \in l_p$, т.е. оператор B является положительным в пространстве l_p при любом $p \in (1, \infty)$. $\square$

3. Нелинейные интегральные уравнения с разностными ядрами.

3.1. *Случай пространств Лебега.* Рассмотрим в вещественном пространстве Лебега $L_p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, с обычной нормой

$$\|u\|_p = \left[\int_0^1 |u(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

интегральный оператор

$$(P_{01}^{\varphi} u)(x) = \int_0^1 \varphi(|x - t|) \cdot u(t) dt.$$

Определение 1. Запись $\varphi(x) \in \Omega(0, 1]$ означает, что $\varphi(x)$ — такая непрерывная, невозрастающая, выпуклая вниз в промежутке $(0, 1]$ функция, что

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \geq 0.$$

Лемма 5 (см. [3]). Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in L_{p'/2}(0, 1) \cap \Omega(0, 1], & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ \varphi(x) &\in L_1(0, 1) \cap \Omega(0, 1], & \text{если } 2 < p < \infty. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда оператор P_{01}^φ действует непрерывно из пространства $L_p(0, 1)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(0, 1)$, $p' = p/(p-1)$, и положителен, причем для любой функции $u(x) \in L_p(0, 1)$ справедливы следующие неравенства:

$$\|P_{01}^\varphi u\|_{p'} \leq c(\varphi) \|u\|_p, \quad (25)$$

$$\langle P_{01}^\varphi u, u \rangle = \frac{a_0}{2} \left[\int_0^1 u(x) dx \right]^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left| \int_0^1 u(x) e^{i\pi n x} dx \right|^2 \geq 0, \quad (26)$$

где

$$a_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos(\pi n x) dx \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$c(\varphi) = \begin{cases} 2^{2/p'} \|\varphi\|_{p'/2}, & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ 2\|\varphi\|_1, & \text{если } 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Замечание 1. Поскольку функции $\varphi(x) = x^{\alpha-1}$ при $0 < \alpha < 1$ и $\varphi(x) = -\ln x$ принадлежат классу $\Omega(0, 1]$, то лемма 5 охватывает потенциал Рисса и логарифмический потенциал (см. [11]).

В [1, § 15], [3] доказаны теоремы о существовании, единственности и оценках решений для различных классов нелинейных уравнений, содержащих оператор P_{01}^φ , в пространствах Лебега. Покажем, что в случае нечетностепенных нелинейностей эти решения могут быть найдены градиентным методом.

Теорема 4. Пусть $p > 2$ — четное число и $\varphi(x) \in L_1(0, 1) \cap \Omega(0, 1]$. Тогда для любого $f(x) \in L_{p'}(0, 1)$ уравнение

$$u^{p-1}(x) + \int_0^1 \varphi(|x-t|) u(t) dt = f(x) \quad (27)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(0, 1)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot \|Bu_n - f\|_{p'}^{2-p'} |Bu_n - f|^{p'-2} (Bu_n - f), \quad (28)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $u_0(x) \in L_p(0, 1)$ — начальное приближение, $Bu = u^{p-1} + P_{01}^\varphi u$,

$$\delta_n = \min \left(1, \frac{2}{\varepsilon + (p-1)(\|u_n\|_p + \|Bu_n - f\|_{p'})^{p-2} + 2\|\varphi\|_1} \right), \quad \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Запишем уравнение (27) в операторном виде:

$$Au = f, \quad \text{где } Au = u^{p-1} + P_{01}^\varphi u.$$

Поскольку для любой функции $u(x) \in L_p(0, 1)$ имеем $u^{p-1}(x) \in L_{p'}(0, 1)$, то в силу леммы 5 оператор A действует из $L_p(0, 1)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(0, 1)$. Так как p четное число и оператор P_{01}^φ положителен, то оператор A является строго монотонным и коэрцитивным. Значит, по теореме 1 уравнение (27) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(0, 1)$. Покажем, что это решение можно найти по формуле (28). Для этого заметим, что пространство $L_p(0, 1)$ при $1 < p < \infty$ является строго выпуклым, и дуализующее отображение J^* для пространства $L_{p'}(0, 1)$ имеет вид

$$(J^* w)(x) = \|w\|_{p'}^{2-p'} |w(x)|^{p'-2} w(x). \quad (29)$$

В силу интегрального неравенства Минковского для всех $u(x), v(x) \in L_p(0, 1)$ имеем

$$\|Au - Av\|_{p'} \leq \|u^{p-1} - v^{p-1}\|_{p'} + \|P_{01}^\varphi(u - v)\|_{p'} = I_1 + I_2.$$

Оценим I_1 . Так как

$$|t^{p-1} - s^{p-1}| \leq \frac{p-1}{2} |t - s| (t^{p-2} + s^{p-2})$$

для любых $t, s \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} I_1 = \|u^{p-1} - v^{p-1}\|_{p'} &\leq \frac{p-1}{2} \left[\int_a^b |u(x) - v(x)|^{p'} |u^{p-2}(x) + v^{p-2}(x)|^{p'} dx \right]^{1/p'} \\ &\leq \frac{p-1}{2} \|u - v\|_p (\|u\|_p^{p-2} + \|v\|_p^{p-2}) \leq (p-1) R^{p-2} \|u - v\|_p, \end{aligned}$$

где $R = \max(\|u\|_p, \|v\|_p)$; здесь мы сначала применили неравенство Гельдера с показателями p/p' и $p/(p-p')$, а затем ко второму сомножителю применили неравенство Минковского. Оценка I_2 содержится в лемме 5.

Таким образом, с учетом леммы 5 имеем

$$\|Au - Av\|_{p'} \leq \mu(R) \cdot \|u - v\|_p,$$

где $\mu(R) = (p-1)R^{p-2} + 2\|\varphi\|_1$ — возрастающая на $[0, \infty)$ функция. Значит, A — ограниченный липшиц-непрерывный оператор.

Далее, используя положительность оператора P_{01}^φ и неравенство $(t^{p-1} - s^{p-1})(t-s) \geq 2^{2-p}|t-s|^p$, справедливое для всех $t, s \in \mathbb{R}$, имеем

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &\geq \int_a^b [u^{p-1}(x) - v^{p-1}(x)] [u(x) - v(x)] dx \geq \\ &\geq 2^{2-p} \int_a^b |u(x) - v(x)|^p dx = \beta(\|u - v\|_p), \end{aligned}$$

где $\beta(s) = 2^{2-p}s^p$ — такая строго возрастающая на $[0, \infty)$ функция, что $\beta(0) = 0$, т.е. A — равномерно монотонный оператор.

Так как $\|u^{p-1}\|_{p'} = \|u\|_p^{p-1}$, то оператор $Fu = u^{p-1}$ действует непрерывно из $L_p(0, 1)$ в $L_{p'}(0, 1)$ и в силу [8, Лемма 4.1] является потенциальным. В свою очередь, оператор P_{01}^φ с четным ядром $\varphi(x)$ является симметрическим и поэтому (см. Пример 1) также является потенциальным. Таким образом, оператор A как сумма двух непрерывных потенциальных операторов является непрерывным потенциальным оператором, действующим из $L_p(0, 1)$ в $L_{p'}(0, 1)$. Значит, на основании теоремы 1, последовательность (28) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства $L_p(0, 1)$, что и требовалось доказать. $\square$

3.2. Случай весовых пространств Лебега. Пусть $\rho(x)$ есть неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля измеримая на $[0, 1]$ функция. Обозначим через $L_{01}^p(\rho)$, $p \geq 1$, множество всех измеримых на отрезке $[0, 1]$ функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{p,1} = \left[\int_0^1 \rho(x) \cdot |u(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Известно (см., например, [7]), что $L_{01}^p(\rho)$ при $1 < p < \infty$ есть строго выпуклое рефлексивное банахово пространство и сопряженным с ним является пространство $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$, где $p' = p/(p-1)$. Если $\rho(x) = 1$, то будем писать L_{01}^p и $\|\cdot\|_p$. Норму в $L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ будем обозначать через $\|\cdot\|_{p',1-p'}$.

Аналогично теореме 3 доказывается следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $p \geq 4$ — четное число, ядро $\varphi(x) \in L_{01}^1 \cap \Omega(0, 1]$ и выполнено условие

$$c(\rho) = \left[\int_0^1 [\rho(x)]^{2/(2-p)} dx \right]^{(p-2)/(2p)} < \infty.$$

Тогда для всех $f(x) \in L_{01}^{p'}(\rho^{1-p'})$ уравнение

$$\rho(x) \cdot u^{p-1}(x) + \int_0^1 \varphi(|x-t|)u(t)dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{01}^p(\rho)$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot \|Bu_n - f\|_{p', 1-p'}^{2-p'} \rho^{1-p'} |Bu_n - f|^{p'-2} (Bu_n - f),$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $u_0(x) \in L_{01}^p(\rho)$ — начальное приближение, $Bu = \varrho \cdot u^{p-1} + P_{01}^\varphi u$,

$$\delta_n = \min \left(1, \frac{2}{\varepsilon + (p-1)(\|u_n\|_{p,1} + \|Bu_n - f\|_{p', 1-p'})^{p-2} + 2c^2(\rho)\|\varphi\|_1} \right), \quad \varepsilon > 0.$$

В заключение отметим, что при исследовании методом монотонных (по Браудеру—Минти) операторов нелинейных дискретных и интегральных уравнений с разностными ядрами важную роль играет свойство положительности (по Бохнеру) соответствующих дискретных и интегральных операторов. Условия положительности для некоторых классов таких операторов приведены, например, в [1, 5, 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки. — М.: Физматлит, 2009.
2. Асхабов С. Н. Приближенное решение нелинейных дискретных уравнений типа свертки // Совр. мат. Фундам. напр. — 2012. — 45. — С. 18–31.
3. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега // Мат. заметки. — 2015. — 97, № 5. — С. 643–654.
4. Асхабов С. Н. Нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала на отрезке // Совр. мат. Фундам. напр. — 2016. — 60. — С. 5–22.
5. Асхабов С. Н. Условия положительности операторов с разностными ядрами в рефлексивных пространствах // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2018. — 149. — С. 3–13.
6. Асхабов С. Н., Джабраилов А. Л. Приближенное решение нелинейных уравнений типа свертки на отрезке // Уфим. мат. ж. — 2013. — 5, № 2. — С. 3–11.
7. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1972.
8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
9. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. — М.: Наука, 1978.
10. Дедагич Ф., Забрейко П. П. Об операторах суперпозиции в пространствах l_p // Сиб. мат. ж. — 1987. — 28, № 1. — С. 86–98.
11. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
12. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. — М.: Мир, 1985.
13. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. — М.: Мир, 1985.
14. Dedagic F., Halilovic S., Barakovic E. On the solvability of discrete nonlinear Hammerstein systems in spaces // Math. Balkan. New Ser. — 2012. — 26, № 3–4. — P. 325–333.

Асхабов Султан Нажмуудинович

Чеченский государственный педагогический университет, Грозный;

Чеченский государственный университет, Грозный

E-mail: askhabov@yandex.ru