Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Елисеев, П. В. Кириченко, Решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 192, 55–64

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-55-64>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 05:35:20

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 192 (2021). С. 55–64
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-192-55-64

УДК 517.928.2

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ НАЛИЧИИ «СЛАБОЙ» ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© 2021 г. А. Г. ЕЛИСЕЕВ, П. В. КИРИЧЕНКО

Аннотация. В статье предложен метод построения асимптотического решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае нарушения условий стабильности спектра предельного оператора. В частности, рассмотрена задача с точкой поворота, где собственные значения «слипаются» при $t = 0$.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, точка поворота, метод регуляризации.

SOLUTION OF THE SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM WITH A “WEAK” TURNING POINT OF THE LIMIT OPERATOR

© 2021 A. G. ELISEEV, P. V. KIRICHENKO

ABSTRACT. In this paper, we propose a method for constructing an asymptotic solution to a singularly perturbed Cauchy problem in the case of violation of the stability conditions for the spectrum of the limit operator. In particular, we consider a problem with a turning point where eigenvalues coincide at $t = 0$.

Keywords and phrases: singularly perturbed problem, turning point, regularization method.

AMS Subject Classification: 34E20

1. Введение. В данной работе при помощи метода С. А. Ломова (см. [6]) построено регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущенной неоднородной задачи Коши на отрезке $[0, T]$ при наличии спектральной особенности в виде «слабой» точки поворота 1-го порядка у предельного оператора. Определение «слабой» точки поворота будет дано ниже.

Отметим работы [1, 3, 5], посвященные построению асимптотики решения сингулярно возмущенных задач Коши при наличии спектральных особенностей у предельного оператора. Новизна представленной работы состоит в том, что методом регуляризации строится глобальная регуляризованная асимптотика на всем отрезке $[0, T]$ неоднородной задачи Коши с произвольными начальными условиями. Наши исследования являются развитием работы [3], в которой описана методика построения регуляризованного асимптотического решения для задач с нестабильным спектром с «простой» точкой поворота, т.е. ситуации, в которой собственные значения в отдельных точках обращаются в нуль (как сказано в [3], «предельный оператор дискретно необратим»). Основные идеи настоящей работы тезисно изложены в [4].

Пусть дана задача Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u} = A(t)u + h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \end{cases} \quad (1)$$

и выполнены следующие условия:

- (I) $h(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{R}^n)$;
 (II) $A(t) \in C^\infty([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$;
 (III) условия на собственные значения оператора $A(t)$:
 (a) $\lambda_1(t) \neq \lambda_2(t)$ для всех $t \in (0, T]$;
 (b) условие «слабой» точки поворота 1-го порядка в точке $t = 0$: $\lambda_2(t) - \lambda_1(t) = ta(t)$,
 $a(t) \neq 0$;
 (c) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ для всех $t \in [0, T]$, $i, j = \overline{3, n}$, $i \neq j$;
 (d) для любых $t \in [0, T]$ геометрическая кратность собственных значений равна алгебраической;
 (IV) $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0$, $i = \overline{1, n}$, при $t \in [0, T]$.

Основной проблемой метода регуляризации при решении сингулярно возмущенных задач является описание сингулярного многообразия (функций). Для стабильной части спектра $(\lambda_3, \dots, \lambda_n)$ оператора $A(t)$ это (см. [6]):

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_i(t)\right), \text{ где } \varphi_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s)ds, \quad i = \overline{3, n}.$$

При наличии точечных особенностей спектра все обстоит значительно сложнее. Если точечная особенность имеет вид (IIIb), то регуляризирующие функции удобно взять как решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{J}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix} J + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J, \\ J(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) в общем случае в явном виде не решается. Найдем решение (2) методом последовательных приближений.

Лемма 1. *Решение системы (2) представляется в виде равномерно сходящегося ряда на $[0, T] \times (0, \varepsilon_0]$ и допускает следующие оценки:*

(i) *если $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\delta < 0$, то*

$$\|J\|_{C[0, T]} \leq e^{-\delta t/\varepsilon} \mathbb{C},$$

(ii) *если $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, то*

$$\|J\|_{C[0, T]} \leq \mathbb{C},$$

где $\mathbb{C} > 0$ — константа, не зависящая от ε .

Доказательство. Решив (2) методом последовательных приближений, получим:

$$\begin{aligned} J(t) = & \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) \cdot T \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) ds + \\ & + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) \cdot T \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) \int_0^s \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^{s_1}\right) \cdot T \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^{s_1}\right) ds_1 ds + \dots; \end{aligned}$$

здесь

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0^t = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ 0 & \varphi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Используя свойство

$$T \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ 0 & \varphi_2(t) \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \varphi_2(t) & 0 \\ 0 & \varphi_1(t) \end{pmatrix}\right) \cdot T,$$

получим

$$\begin{aligned}
 J(t) = & \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^s\right) T ds + \\
 & + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^s\right) \int_0^s \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^{s_1}\right) T ds_1 ds + \\
 & + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^s\right) \int_0^s \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^{s_1}\right) \cdot \int_0^{s_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0^{s_2}\right) T ds_2 ds_1 ds + \dots, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta_0^t = \begin{pmatrix} \varphi_2(t) - \varphi_1(t) & 0 \\ 0 & \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Покомпонентная запись (3) такова:

$$\begin{aligned}
 J_1(t) = & \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right) ds + \\
 & + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right) \int_0^s \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_1)\right) ds_1 ds + \dots, \\
 J_2(t) = & \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right) ds + \\
 & + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right) \int_0^s \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_1)\right) ds_1 ds + \dots
 \end{aligned} \quad (4)$$

Равномерная сходимость рядов (4) вытекает из следующих оценок:

(а) при $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\delta < 0$, $t \in [0, T]$:

$$\left| \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) \right| \leq \exp\left(-\frac{\delta t}{\varepsilon}\right),$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_2(s) - \varphi_1(s))\right) ds \right| \leq \\
 & \leq \int_0^t \exp\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \operatorname{Re} \lambda_1(s_1) ds_1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \operatorname{Re} \lambda_2(s_2) ds_2 \right\} ds \leq \\
 & \leq \int_0^t \exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon}(t - s + s)\right) ds = \exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon}t\right) \cdot t,
 \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
& \left| \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_1)\right) \int_0^{s_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_2)\right) \int_0^{s_{n-1}} \exp\left(\frac{(-1)^n}{\varepsilon}\varphi(s_n)\right) ds_n \dots ds_1 \right| \leq \\
& \leq \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_1(t) - \varphi_1(s_1) + \dots + (-1)^{n+1}\varphi_1(s_n))\right) \cdot \\
& \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_2(s_1) - \varphi_2(s_2) + \dots + (-1)^n\varphi_2(s_n))\right) ds_1 \dots ds_n \leq \exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon}t\right) \cdot \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|J_1(t, \varepsilon)| \leq e^{-\delta t/\varepsilon} \cdot e^t \leq e^T \cdot e^{-\delta t/\varepsilon};$$

аналогично,

$$|J_2(t, \varepsilon)| \leq e^T \cdot e^{-\delta t/\varepsilon}.$$

(b) при $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, $t \in [0, T]$:

$$|J_i(t)| \leq e^T, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, ряды (4) сходятся равномерно по ε и t на $[0, T] \times (0, \varepsilon_0]$. Кроме того, легко проверяется, что ряды выдерживают действие оператора $\varepsilon d/dt$ в любой степени. $\square$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,k} &= \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) \underbrace{\int_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int_0^{s_1} e^{-\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \dots \int_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k+1}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon} ds_k \dots ds_1}_{k \text{ интегралов}}, \\
\sigma_{2,k} &= e^{\varphi_2(t)/\varepsilon} \underbrace{\int_0^t e^{-\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \dots \int_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^k\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon} ds_k \dots ds_1}_{k \text{ интегралов}},
\end{aligned}$$

Нетрудно установить, что $\sigma_{i,k}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\sigma}_{1,k} = \lambda_1(t) \sigma_{1,k} + \varepsilon \sigma_{2,k-1}, \\ \varepsilon \dot{\sigma}_{2,k} = \lambda_2(t) \sigma_{2,k} + \varepsilon \sigma_{1,k-1}, \\ \sigma_{1,k}(0) = 0, \quad \sigma_{2,k}(0) = 0, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Замечание 1. При описании формализма метода регуляризации будет показано, что при выполнении некоторых условий на производные собственных векторов достаточно использовать конечное число введенных сингулярных интегралов $\sigma_{1,k}$ и $\sigma_{2,k}$.

Пусть разложение по базису собственных векторов производных этих векторов имеет вид

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^n C_i^j(t) e_j(t).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) если $C_i^2(t) \equiv 0$, $i = \overline{1, n}$, $i \neq 2$, то для построения асимптотического ряда достаточно

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right), \quad e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}, \quad \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) \int_0^t e^{\Delta\varphi(s)/\varepsilon} ds, \quad e^{\varphi_i(t)/\varepsilon}, \quad i = \overline{3, n};$$

(ii) если $C_i^1(t) \equiv 0$, $i = \overline{1, n}$, $i \neq 1$, то для построения асимптотического ряда достаточно

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right), \quad e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}, \quad e^{\varphi_2(t)/\varepsilon} \int_0^t e^{-\Delta\varphi(s)/\varepsilon} ds, \quad e^{\varphi_i(t)/\varepsilon}, \quad i = \overline{3, n};$$

- (iii) если $C_i^j(t) \equiv 0$, $j = \overline{1, 2}$, $i = \overline{1, n}$, $i \neq j$, то для построения асимптотического ряда достаточно
- $$e^{\varphi_i(t)/\varepsilon}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для обоснования формализма метода регуляризации в случае «слабой» точки поворота сформулируем и докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть дана матрица $A(t) \in C^\infty([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2))$, удовлетворяющая условиям (IIIa), (IIIb) и (IIIId) из постановки задачи (1). Тогда собственные значения $\lambda_i(t)$ этой матрицы принадлежат классу $C^\infty[0, T]$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Так как $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = \lambda_0$, то

$$A(0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I.$$

На основании леммы Адамара

$$A(t) - \lambda_0 I = t^p B(t),$$

где $B(t)$ — диагонализируемая матрица, p — целое положительное число (в нашем случае $p = 1$). Для матриц $B(t)$, удовлетворяющих условиям стабильности ($\mu_1(t) \neq \mu_2(t)$, $i = 1, 2$, $\mu_{1,2}(t)$ — собственные значения матрицы $B(t)$) известно, что если $B(t) \in C^\infty[0, T]$, то собственные значения $\mu_i(t) \in C^\infty[0, T]$ и собственные векторы $e_i(t) \in C^\infty[0, T]$, $i = 1, 2$ (см. [2, с. 55–60]). В нашем случае это можно показать и непосредственно, так как $\mu_i(t)$ — корни квадратного уравнения с гладкими коэффициентами. Отсюда $\lambda_i = \lambda_0 + t^p \mu_i(t) \in C^\infty[0, T]$. $\square$

2. Формализм метода регуляризации. Решение задачи (1) будем искать в виде

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{1,k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m x_m^k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{2,k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m y_m^k(t) + \sum_{i=3}^n \sigma_{i,0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m x_{im}(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m z_m(t), \quad (5)$$

здесь введено обозначение

$$\sigma_{i,0} \equiv \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \varphi_i(t)\right), \quad i = \overline{3, n}.$$

Подставив (5) в (1) и приравнявая слагаемые при одинаковых $\sigma_{1,k}$, $\sigma_{2,k}$, $\sigma_{i,0}$ получим серию задач:

$$\begin{cases} (A(t) - \lambda_1(t)) x_0^k(t) = 0, & k = \overline{0, \infty}, \\ (A(t) - \lambda_2(t)) y_0^k(t) = 0, & k = \overline{0, \infty}, \\ (A(t) - \lambda_i(t)) x_{i0}(t) = 0, & i = \overline{3, n}, \\ A(t) z_0(t) = -h(t), & (\text{при } \varepsilon^0). \\ x_0^0(0) + y_0^0(0) + \sum_{i=3}^n x_{i0}(0) + z_0(0) = u^0 \end{cases} \quad (6)$$

Решение задачи (6) имеет вид

$$\begin{cases} x_0^k(t) = \alpha_0^k(t) e_1(t), & k = \overline{0, \infty}, \\ y_0^k(t) = \beta_0^k(t) e_2(t), & k = \overline{0, \infty}, \\ x_{i0}(t) = \alpha_{i0}(t) e_i(t), & i = \overline{3, n}, \\ z_0(t) = -A^{-1}(t) h(t); \end{cases}$$

здесь $e_i(t)$ — собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $\alpha_0^k(t)$, $\beta_0^k(t)$, $\alpha_{i0}(t)$ — произвольные скалярные функции. Значения $\alpha_0^0(0)$, $\beta_0^0(0)$, $\alpha_{i0}(0)$ определяются из начальных условий:

$$\alpha_0^0(0) e_1(0) + \beta_0^0(0) e_2(0) + \sum_{i=3}^n \alpha_{i0}(0) e_i(0) = u^0 + A^{-1}(0) h(0)$$

или

$$\alpha_0^0(0) = u_1^0 + \frac{h_1(0)}{\lambda_1(0)}, \quad \beta_0^0(0) = u_2^0 + \frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)}, \quad \alpha_{0i}(0) = u_i^0 + \frac{h_i(0)}{\lambda_i(0)}, \quad i = \overline{3, n}. \quad (7)$$

Так как $\sigma_{1,k}(0) = 0$, $\sigma_{2,k}(0) = 0$, $k \geq 1$, то $\alpha_0^k(0)$, $\beta_0^k(0)$ могут принимать произвольные значения на данном итерационном шаге. На следующем итерационном шаге имеем:

$$\begin{cases} (A(t) - \lambda_1(t))x_1^k(t) = \dot{x}_0^k(t) + y_0^{k+1}(t), & k = \overline{0, \infty}, \\ (A(t) - \lambda_2(t))y_1^k(t) = \dot{y}_0^k(t) + x_0^{k+1}(t), & k = \overline{0, \infty}, \\ (A(t) - \lambda_i(t))x_{i1}(t) = \dot{x}_{i0}(t), & i = \overline{3, n}, \\ A(t)z_1(t) = \dot{z}_0(t), \\ x_1^0(0) + y_1^0(0) + \sum_{i=3}^n x_{i1}(0) + z_1(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{при } \varepsilon^1).$$

Подставив $x_0^k(t)$, $y_0^k(t)$, $x_{i0}(t)$, $z_0(t)$, получим:

$$\begin{cases} (A(t) - \lambda_1(t))x_1^k(t) = (\dot{\alpha}_0^k(t) + C_1^1(t)\alpha_0^k(t))e_1(t) + (\alpha_0^k(t)C_1^2(t) + \beta_0^{k+1}(t))e_2(t) + \\ \quad + \alpha_0^k(t) \cdot \sum_{j=3}^n C_1^j(t)e_j(t), \quad k = \overline{0, \infty}, \\ (A(t) - \lambda_2(t))y_1^k(t) = (\dot{\beta}_0^k(t) + C_2^2(t)\beta_0^k(t))e_2(t) + (\beta_0^k(t)C_2^1(t) + \alpha_0^{k+1}(t))e_1(t) + \\ \quad + \beta_0^k(t) \cdot \sum_{j=3}^n C_2^j(t)e_j(t), \quad k = \overline{0, \infty}, \\ (A(t) - \lambda_i(t))x_{i1}(t) = (\dot{\alpha}_{i0}(t) + C_i^i(t)\alpha_{i0}(t))e_i(t) + \alpha_{i0}(t) \cdot \sum_{j \neq i} C_i^j(t)e_j(t), \quad i = \overline{3, n}, \\ z_1(t) = -\left(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\right)A^{-1}(t)h(t); \end{cases} \quad (8)$$

здесь $C_i^j(t)$ — коэффициенты разложения $\dot{e}_i(t)$ по базису собственных векторов:

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^n C_i^j(t)e_j(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Из условий разрешимости и точечной разрешимости в нуле для (8) имеем системы:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0^k(t) + C_1^1(t)\alpha_0^k(t) = 0, & \begin{cases} \dot{\beta}_0^k(t) + C_2^2(t)\beta_0^k(t) = 0, \\ \alpha_0^{k-1}(0)C_2^1(0) + \beta_0^k(0) = 0, \end{cases} & k \geq 1; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0^0(t) + C_1^1(t)\alpha_0^0(t) = 0, & \begin{cases} \dot{\beta}_0^0(t) + C_2^2(t)\beta_0^0(t) = 0, \\ \beta_0^0(0) = u_2^0 + \frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)}, \end{cases} \\ \alpha_0^0(0) = u_1^0 + \frac{h_1(0)}{\lambda_1(0)}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{i0}(t) + C_i^i(t)\alpha_{i0}(t) = 0, \\ \alpha_{i0}(0) = u_i^0 + \frac{h_i(0)}{\lambda_i(0)}, \end{cases} \quad i = \overline{3, n} \quad (11)$$

(здесь начальные условия в (10) и (11) взяты из (7)).

Из (9) определяются начальные условия для $\alpha_0^k(t)$ и $\beta_0^k(t)$ при $k \geq 1$, в выборе которых остался произвол на предыдущем итерационном шаге. Эти условия примут вид

$$\alpha_0^k(0) = -\beta_0^{k-1}(0)C_2^1(0), \quad \beta_0^k(0) = -\alpha_0^{k-1}(0)C_1^2(0). \quad (12)$$

Выпишем решение систем (9), (10) и (11):

$$\begin{aligned}\alpha_0^k(t) &= \alpha_0^k(0) \exp \left(- \int_0^t C_1^1(s) ds \right), \quad \beta_0^k(t) = \beta_0^k(0) \exp \left(- \int_0^t C_2^2(s) ds \right), \quad k = \overline{0, \infty}, \\ \alpha_{i0}(t) &= \alpha_{i0}(0) \exp \left(- \int_0^t C_i^i(s) ds \right), \quad i = \overline{3, n}.\end{aligned}$$

Заметим, что $\alpha_0^0(0)$, $\beta_0^0(0)$ определены в системе (7). Тогда $\alpha_0^k(0)$, $\beta_0^k(0)$, $k \geq 1$ однозначно определены из рекуррентных соотношений (12).

Решения (8) примут вид

$$\begin{cases} x_1^k(t) = \alpha_1^k(t)e_1(t) + \frac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t) + \beta_0^{k+1}(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)}e_2(t) + \alpha_0^k(t) \cdot \sum_{j=3}^n \frac{C_1^j(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_1(t)}e_j(t), \\ y_1^k(t) = \beta_1^k(t)e_2(t) + \frac{\beta_0^k(t)C_2^1(t) + \alpha_0^{k+1}(t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}e_1(t) + \beta_0^k(t) \cdot \sum_{j=3}^n \frac{C_2^j(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_2(t)}e_j(t), \\ x_{i1}(t) = \alpha_{i1}(t)e_i(t) + \alpha_{i0}(t) \cdot \sum_{j \neq i} \frac{C_i^j(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_i(t)}e_j(t), \quad i = \overline{3, n}, \quad k = \overline{0, \infty}. \end{cases} \quad (13)$$

Заметим, что начальные условия (12), условия (I)–(III) задачи (1) и утверждение леммы 2 обеспечивают гладкость вектор-функций $x_1^k(t)$, $y_1^k(t)$ на $[0, T]$. Начальные условия для $\alpha_1^0(0)$, $\beta_1^0(0)$ и $\alpha_{i1}(0)$ определяются из соотношения:

$$\begin{aligned}\alpha_1^0(0)e_1(0) + \beta_1^0(0)e_2(0) + \sum_{i=3}^n \alpha_{i1}(0)e_i(0) &= - \left[\left(A^{-1}(t) \frac{d}{dt} \right) A^{-1}(t)h(t) + \right. \\ &+ \left. \frac{\beta_0^0(t)C_2^1(t) + \alpha_0^1(t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}e_1(t) + \frac{\alpha_0^0(t)C_1^2(t) + \beta_0^1(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)}e_2(t) + \sum_{i=3}^n \alpha_{i0}(t) \sum_{j \neq i} \frac{C_i^j(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_i(t)}e_j(t) \right] \Big|_{t=0}. \quad (14)\end{aligned}$$

Произвольные функции $\alpha_1^k(t)$, $\beta_1^k(t)$, $\alpha_{i1}(t)$ и начальные условия для $\alpha_1^k(0)$, $\beta_1^k(0)$, $k \geq 1$ определяются на следующем итерационном шаге.

$$\begin{cases} (A(t) - \lambda_1(t))x_2^k(t) = \dot{x}_1^k(t) + y_1^{k+1}(t), & k = \overline{0, \infty}, \\ (A(t) - \lambda_2(t))y_2^k(t) = \dot{y}_1^k(t) + x_1^{k+1}(t), & k = \overline{0, \infty}, \\ (A(t) - \lambda_i(t))x_{i2}(t) = \dot{x}_{i1}(t), & i = \overline{3, n}, \\ z_2(t) = - \left(A^{-1}(t) \frac{d}{dt} \right)^2 A^{-1}(t)h(t), & (\text{при } \varepsilon^2). \\ x_2^0(0) + y_2^0(0) + z_2(0) = 0, & k = \overline{0, \infty}. \end{cases} \quad (15)$$

Подставив (13) в (15) и записав условия разрешимости, получим задачи Коши для определения $\alpha_1^k(t)$, $\beta_1^k(t)$ и $\alpha_{i1}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1^k(t) + C_1^1(t)\alpha_1^k(t) = - \frac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t)C_2^1(t) - \alpha_0^{k+2}(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} - \alpha_0^k(t) \sum_{j=3}^n \frac{C_1^j(t)C_j^1(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_1(t)}, & k = \overline{0, \infty}, \\ \dot{\beta}_1^k(t) + C_2^2(t)\beta_1^k(t) = - \frac{\beta_0^k(t)C_2^1(t)C_1^2(t) - \beta_0^{k+2}(t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)} - \beta_0^k(t) \sum_{j=3}^n \frac{C_2^j(t)C_j^2(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_2(t)}, & k = \overline{0, \infty}, \\ \dot{\alpha}_{i1}(t) + C_i^i(t)\alpha_{i1}(t) = - \alpha_{i0}(t) \sum_{j \neq i} \frac{C_i^j(t)C_j^i(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_i(t)}, & i = \overline{3, n}. \end{cases}$$

Начальные условия для $\alpha_1^k(t)$, $\beta_1^k(t)$ при $k \geq 1$ находим из условий точечной разрешимости в нуле после указанной подстановки. Приведем ответ, опуская громоздкие выкладки:

$$\alpha_1^{k+1}(0) = -\beta_1^k(0)C_2^1(0) - \left[\frac{\beta_0^k(t)C_2^1(t) + \alpha_0^{k+1}(t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)} C_1^1(t) + \frac{d}{dt} \frac{\beta_0^k(t)C_2^1(t) + \alpha_0^{k+1}(t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)} + \beta_0^k(t) \sum_{j=3}^n \frac{C_2^j(t)C_j^1(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_2(t)} \right] \Big|_{t=0}, \quad (16)$$

$$\beta_1^{k+1}(0) = -\alpha_1^k(0)C_1^2(0) - \left[\frac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t) + \beta_0^{k+1}(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} C_2^2(t) + \frac{d}{dt} \frac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t) + \beta_0^{k+1}(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} + \alpha_0^k(t) \sum_{j=3}^n \frac{C_1^j(t)C_j^2(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_1(t)} \right] \Big|_{t=0} \quad (17)$$

Таким образом, имеем рекуррентные соотношения для определения начальных условий $\alpha_1^k(0)$, $\beta_1^k(0)$, $k \geq 1$:

$$\alpha_1^{k+1}(0) = -\beta_1^k(0)C_2^1(0) - \gamma_k, \quad \beta_1^{k+1}(0) = -\alpha_1^k(0)C_1^2(0) - \delta_k,$$

где γ_k , δ_k известные числа, определенные в (16), (17). Начальные условия $\alpha_1^0(0)$, $\beta_1^0(0)$ и $\alpha_{i1}(0)$ определены равенством (14).

Следовательно, решения системы (8) определены. Продолжая аналогичный процесс, можно определить любой член ряда (5).

3. Оценка остаточного члена. Теоремы о предельном переходе. Пусть члены двойного ряда (5) в результате решения итерационных задач определены для $0 \leq q \leq m$, $0 \leq p \leq k+1$; здесь q — итерационный шаг по ε , а p — порядки сингулярных интегралов. Запишем соотношение для остатка $R_{k,m}(t, \varepsilon)$:

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{q=0}^m \varepsilon^q \sum_{p=0}^k (\sigma_{1,p} x_q^p(t) + \sigma_{2,p} y_q^p(t)) + \sum_{q=0}^m \varepsilon^q \sum_{i=3}^n \sigma_{i,0} x_{iq}(t) + \sum_{q=0}^m \varepsilon^q z_q(t) + \varepsilon^{m+1} R_{k,m}(t, \varepsilon). \quad (18)$$

Подставив (18) в (1) и учитывая результаты итерационных задач, получим:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{R}_{k,m} - A(t)R_{k,m} = -H(t, \varepsilon), \\ R_{k,m}(0, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$H(t, \varepsilon) = \left[\sum_{p=0}^k \sigma_{1,p} (\dot{x}_m^p(t) + y_m^{p+1}(t)) + \sigma_{2,p} (\dot{y}_m^p(t) + x_m^{p+1}(t)) \right] + \sum_{i=3}^n \sigma_{i,0} \dot{x}_{im} + \dot{z}_m(t).$$

Из условий (IV) на спектр в задаче (1) и оценок интегралов $\sigma_{1,p}$, $\sigma_{2,p}$ в лемме 1 следует, что правая часть (19) имеет оценку

$$\|H(t, \varepsilon)\|_{C[0,T]} \leq \mathbb{C} \quad \forall (t, \varepsilon) \in [0, T] \times (0, \varepsilon_0].$$

Решение (19) запишем в виде:

$$R_{k,m} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U_\varepsilon(t, s) H(s, \varepsilon) ds,$$

где $U_\varepsilon(t, s)$ — разрешающий оператор, являющийся решением задачи Коши:

$$\varepsilon \dot{U}_\varepsilon(t, s) = A(t)U_\varepsilon(t, s), \quad U_\varepsilon(t, s)|_{s=t} = I.$$

Из условий (IV) на спектр в задаче (1) следует, что $U_\varepsilon(t, s)$ ограничен на $[0, T] \times [0, t]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

$$\|U_\varepsilon(t, s)\|_{C[0,T]} \leq \mathbb{C}.$$

Следовательно, из соотношения

$$\begin{aligned} R_{k,m} &= -U_\varepsilon(t, s)A^{-1}(s)H(s, \varepsilon)|_0^t + \int_0^t U_\varepsilon(t, s)\frac{d}{ds}A^{-1}(s)H(s, \varepsilon)ds = \\ &= -A^{-1}(t)H(t, \varepsilon) + U_\varepsilon(t, 0)A^{-1}(0)H(0, \varepsilon) + \int_0^t U_\varepsilon(t, s)\frac{d}{ds}A^{-1}(s)H(s, \varepsilon)ds \end{aligned}$$

получим

$$\|R_{k,m}\|_{C[0,T]} \leq \mathbb{C}.$$

Из этих оценок вытекает следующая теорема.

Теорема 1 (об оценке остатка (асимптотическая сходимость)). Пусть дана задача Коши (1) и выполнены условия (I)–(IV). Тогда верна оценка

$$\left\| u(t, \varepsilon) - \sum_{q=0}^m \varepsilon^q \sum_{p=0}^k (\sigma_{1,p} x_q^p(t) + \sigma_{2,p} y_q^p(t)) - \sum_{q=0}^m \varepsilon^q \sum_{i=3}^n \sigma_{i,0} x_{iq}(t) - \sum_{q=0}^m \varepsilon^q z_q(t) \right\|_{C[0,T]} \leq \mathbb{C} \cdot \varepsilon^{m+1},$$

где $\mathbb{C} \geq 0$ — константа, не зависящая от ε , а $x_q^p(t)$, $y_q^p(t)$, $x_{iq}(t)$, $z_q(t)$ получены из решения итерационных задач при $0 \leq q \leq m$, $0 \leq p \leq k+1$.

В заключение приведем главный член асимптотики задачи (1):

$$u_{\text{гл}}(t, \varepsilon) = \sum_{p=0}^k (\sigma_{1,p} x_0^p(t) + \sigma_{2,p} y_0^p(t)) + \sum_{i=3}^n \sigma_{i,0} x_{i0}(t) - A^{-1}(t)h(t).$$

Теорема 2 (о предельном переходе). Пусть дана задача (1) и выполнены условия (I)–(IV). Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) если $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\delta < 0$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = -A^{-1}(t)h(t), \quad t \in [\delta_0, T],$$

где $\delta_0 > 0$ — сколь угодно мало;

(ii) если $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, то $\forall \varphi(t) \in C^\infty[0, T]$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T (u(t, \varepsilon) + A^{-1}(t)h(t))\varphi(t)dt = 0.$$

Доказательство. Утверждение (i) этого пункта непосредственно следует из оценок интегралов $\sigma_{1,p}$, $\sigma_{2,p}$ в лемме 1. В случае (ii) $\sigma_{1,p}$, $\sigma_{2,p}$ и $\sigma_{i,0}$, $i = \overline{3, n}$, являются быстро осциллирующими функциями, и доказательство предельного перехода в слабом смысле следует из леммы Лебега. $\square$

4. Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим пример в $\mathbb{R}^2$, в котором достаточно ввести три регуляризирующие функции. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u} = A(t)u + h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad 0 < T < 1,$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1-t & 0 \\ e^{2t}(1-t) & -1+t \end{pmatrix}.$$

Собственные значения и соответствующие собственные векторы суть $\lambda_{1,2} = -1 \pm t$, $e_1 = \{0, e^t\}^T$, $e_2 = \{-e^{-t}, e^t\}^T$. Имеем

$$\begin{aligned} u^0 &= u_1^0 e_1 + u_2^0 e_2, \quad h(t) = h_1(t) e_1 + h_2(t) e_2, \\ \dot{e}_1 &= e_1, \quad \dot{e}_2 = \{e^{-t}, e^t\}^T = 2e_1 - e_2, \\ \varphi_1(t) &= -t + \frac{t^2}{2}, \quad \varphi_2(t) = -t - \frac{t^2}{2}, \quad \Delta\varphi = -t^2. \end{aligned}$$

Регуляризирующие функции имеют вид

$$\sigma_{1,0} = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right), \quad \sigma_{2,0} = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right), \quad \sigma_{1,1} = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) \int_0^t e^{\Delta\varphi(s)/\varepsilon} ds.$$

Главный член асимптотики запишется в виде

$$\begin{aligned} u_{\text{гл}}(t, \varepsilon) &= \left(u_1^0 + \frac{h_1(0)}{\lambda_1(0)}\right) e^{-t} e_1(t) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) + \left(u_2^0 + \frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)}\right) e^t e_2(t) e^{\varphi_2(t)/\varepsilon} - \\ &\quad - \left(2u_2^0 + 2\frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)}\right) e^{-t} e_1(t) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) \int_0^t e^{\Delta\varphi(s)/\varepsilon} ds. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Регуляризованная асимптотика решений интегро-дифференциальных уравнений с частными производными с быстро изменяющимися ядрами // Уфим. мат. ж. — 2018. — 10, № 2.
2. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.
3. Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Мат. сб. — 1986. — 131 (173), № 4 (12). — С. 544—557.
4. Елисеев А. Г., Сальникова Т. А. Построение решения задачи Коши в случае «слабой» точки поворота предельного оператора // Тр. конф. «Математические методы и приложения» (27-31 января 2011 г. РГСУ), 2011. — С. 46—52.
5. Кучеренко В. В. Асимптотика решения системы $A(x, -ih\partial/\partial x)$ при $h \rightarrow 0$ в случае характеристик переменной кратности // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1974. — 38, № 3. — С. 625—662.
6. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.

Елисеев Александр Георгиевич

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

E-mail: eliseevag@mpei.ru

Кириченко Павел Владимирович

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

E-mail: kirichenkov@mpei.ru