Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Кобилзода, А. Н. Наимов, Об ограниченных решениях одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 192, 65–73

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-65-73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:14:49

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. М. М. КОБИЛЗОДА, А. Н. НАИМОВ

Аннотация. В статье исследован вопрос об априорной оценке и существовании ограниченных решений для класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых могут иметь произвольный порядок роста по независимой и зависимым переменным. Найдены односторонняя оценка правых части уравнений, обеспечивающие априорную оценку ограниченных решений и при помощи методов вычисления вращения векторных полей и метода периодических срезов доказаны теоремы о существовании периодических и ограниченных решений.

Ключевые слова: односторонняя оценка, ограниченное решение, периодическое решение, априорная оценка, вращение векторного поля.

ON BOUNDED SOLUTIONS OF ONE CLASS OF SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2021 М. М. KOBILZODA, A. N. NAIMOV

ABSTRACT. In this paper, we consider a priori estimates and examine the existence of bounded solutions for a class of systems of ordinary differential equations whose right-hand sides have an arbitrary order of growth with respect to the independent and dependent variables. For the right-hand sides of the equations, we find one-sided estimates that provide a priori estimates for bounded solutions; using the methods for calculating the rotation of vector fields and the method of periodic cuts, we are prove theorems on the existence of periodic and bounded solutions.

Keywords and phrases: one-sided estimate, bounded solution, periodic solution, a priori estimate, rotation of a vector field.

AMS Subject Classification: 34B15, 34B40

1. Введение. Статья посвящена исследованию ограниченных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$v'_k = F_k(t, v_1, v_2), \quad v_k \in \mathbb{C}^{n_k}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — вещественная ось, $\mathbb{C}^{n_k}$ — пространство n_k -мерных комплексных векторов, $F_k: \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2} \mapsto \mathbb{C}^{n_k}$, $k = 1, 2$ — заданные непрерывные отображения.

Ограниченным решением системы уравнений (1) называем пару $(v_1(t), v_2(t))$ вектор-функций $v_k: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^{n_k}$, $k = 1, 2$, ограниченных, непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих уравнениям системы (1).

Ограниченные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследованы в многочисленных работах. Отметим работы [1, 3–5], где исследованы вопросы априорной оценки и существования ограниченных решений, применяя идеи и методы линейного и нелинейного

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-47-350001 р-а, № 19-01-00103а).

функционального анализа. В [3, 5] рассмотрены системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными и ограниченными коэффициентами, а в [1, 4] — системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В отличие от указанных работ в исследуемой системе уравнений (1) отображения $F_k(t, v_1, v_2)$, $k = 1, 2$, могут иметь любой порядок роста относительно t и v_1, v_2 при $|t| \rightarrow +\infty$ и $|v_1| + |v_2| \rightarrow +\infty$.

В настоящей работе найдены новые условия в виде односторонних оценок, при выполнении которых имеет место априорная оценка для ограниченных решений системы уравнений (1). В условиях априорной оценки сперва доказано существование ω -периодического решения, предполагая правые части ω -периодическими по t и применяя методы вычисления вращения векторных полей [2]. А затем доказано существование ограниченного решения, применяя метод периодических срезов [1, 4]. Полученные результаты по аналогии с работами [6, 7] можно применять при исследовании ограниченных решений новых классов систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

2. Основные результаты. Введем банаховы пространства E^k , $k = 1, 2$ непрерывных и ограниченных вектор-функций $w_k: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^{n_k}$ с нормами

$$\|w_k\|_k := \sup_{t \in \mathbb{R}} |w_k(t)|_k, \quad k = 1, 2,$$

где $|f|_k^2 = \langle f, f \rangle_k$, $\langle f, g \rangle_k = f_1 \overline{g_1} + \dots + f_{n_k} \overline{g_{n_k}}$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^{n_k}$.

Существование ограниченного решения системы уравнений (1) исследуем в условиях априорной оценки. Скажем, что для ограниченных решений системы уравнений (1) имеет место априорная оценка, если множество ограниченных решений системы уравнений (1) либо пусто, либо ограничено по норме

$$\|(w_1, w_2)\|_{E^1 \times E^2} := \sqrt{\|w_1\|_1^2 + \|w_2\|_2^2}$$

пространства $E^1 \times E^2$.

Предположим, что существуют вещественные числа $\alpha_k > 0$, $\beta_k \geq 0$, $\gamma_k \geq 0$, $k = 1, 2$, такие, что отображения $F_1(t, z_1, z_2)$ и $F_2(t, z_1, z_2)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $z_1 \in \mathbb{C}^{n_1}$, $z_2 \in \mathbb{C}^{n_2}$ удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} \langle F_1(t, z_1, z_2), z_1 \rangle_1 \leq -\alpha_1 |z_1|_1^2 + \beta_1 |z_2|_2^2 + \gamma_1, \quad (2)$$

$$\operatorname{Re} \langle F_2(t, z_1, z_2), z_2 \rangle_2 \geq \alpha_2 |z_2|_2^2 - \beta_2 |z_1|_1^2 - \gamma_2. \quad (3)$$

В условиях односторонних оценок (2) и (3) отображения $F_1(t, z_1, z_2)$ и $F_2(t, z_1, z_2)$ могут иметь любой порядок роста по t и z_1, z_2 при $|t| \rightarrow +\infty$ и $|z_1|_1 + |z_2|_2 \rightarrow +\infty$. Имеет место следующая теорема об априорной оценке ограниченных решений.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2), (3) и условие

$$\beta_1 \beta_2 < \alpha_1 \alpha_2. \quad (4)$$

Тогда для любого ограниченного решения системы уравнений (1) верна оценка

$$\|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_2^2 \leq M, \quad (5)$$

где

$$M = \left(1 - \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha_1 \alpha_2}\right)^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} \left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) + \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) \right).$$

В частном случае, когда отображения $F_1(t, z_1, z_2)$ и $F_2(t, z_1, z_2)$ периодичны по t с периодом $\omega > 0$, имеет место априорная оценка (5) для всех ω -периодических решений, при этом число M не зависит от величины периода ω . Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если выполнены условия (2)–(4) и отображения $F_1(t, z_1, z_2)$, $F_2(t, z_1, z_2)$ периодичны по t с периодом ω , то существует ω -периодическое решение системы уравнений (1).

Теорема 2 доказана с применением методов вычисления вращения векторных полей [2]. При гомотопии и вычислении вращения векторного поля, порожденного ω -периодической задачей, существенно используются односторонние оценки (2) и (3).

Из приведенных выше теорем вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (2)–(4). Тогда существует хотя бы одно ограниченное решение системы уравнений (1).

Теорема 3 доказана методом периодических срезов (см. [1, 4]).

3. Априорная оценка ограниченных решений. Приведем доказательство теоремы 1. Пусть $(v_1(t), v_2(t))$ — ограниченное решение системы уравнений (1). Уравнения системы (1) скалярно перемножая с $v_k(t)$, $k = 1, 2$, получаем равенства:

$$(|v_k(t)|_k^2)' = 2 \operatorname{Re} \langle F_k(t, v_1(t), v_2(t)), v_k(t) \rangle_k, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2.$$

Эти равенства перепишем в следующем виде:

$$(|v_k(t)|_k^2)' + (-1)^{k-1} 2\alpha_k |v_k(t)|_k^2 = g_k(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

где

$$g_k(t) = (-1)^{k-1} 2\alpha_k |v_k(t)|_k^2 + 2 \operatorname{Re} \langle F_k(t, v_1(t), v_2(t)), v_k(t) \rangle_k.$$

Решим дифференциальные уравнения (6) относительно функций $|v_k(t)|_k^2$, $k = 1, 2$:

$$|v_k(t)|_k^2 = e^{(-1)^k 2\alpha_k t} \left(|v_k(0)|_k^2 + \int_0^t e^{-(-1)^k 2\alpha_k s} g_k(s) ds \right), \quad k = 1, 2.$$

Отсюда в силу ограниченности функций $|v_k(t)|_k^2$, $k = 1, 2$, следует существование пределов

$$\lim_{(-1)^k t \rightarrow +\infty} \left(|v_k(0)|_k^2 + \int_0^t e^{-(-1)^k 2\alpha_k s} g_k(s) ds \right) = \lim_{(-1)^k t \rightarrow +\infty} |v_k(t)|_k^2 e^{-(-1)^k 2\alpha_k t} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Следовательно, несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^0 e^{2\alpha_1 s} g_1(s) ds, \quad \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha_2 s} g_2(s) ds$$

сходятся, и имеют место равенства

$$|v_1(0)|_1^2 = \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha_1 s} g_1(s) ds, \quad |v_2(0)|_2^2 = - \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha_2 s} g_2(s) ds.$$

Подставляя эти значения в формулы общего решения, имеем:

$$|v_1(t)|_1^2 = \int_{-\infty}^t e^{-2\alpha_1(t-s)} g_1(s) ds, \quad |v_2(t)|_2^2 = - \int_t^{+\infty} e^{-2\alpha_2(s-t)} g_2(s) ds. \quad (7)$$

Функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ в силу условий (2) и (3), удовлетворяют неравенствам

$$g_1(t) \leq 2\beta_1 |v_2(t)|_2^2 + 2\gamma_1, \quad g_2(t) \geq 2\beta_2 |v_1(t)|_1^2 + 2\gamma_2.$$

Учитывая это, из (7) получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |v_1(t)|_1^2 &\leq 2(\beta_1 \|v_2\|_2^2 + \gamma_1) \int_{-\infty}^t e^{-2\alpha_1(t-s)} ds, \\ |v_2(t)|_2^2 &\leq 2(\beta_2 \|v_1\|_1^2 + \gamma_2) \int_t^{+\infty} e^{-2\alpha_2(s-t)} ds. \end{aligned}$$

Из полученных неравенств выводим:

$$\begin{aligned} \|v_1\|_1^2 &\leq \frac{1}{\alpha_1}(\beta_1\|v_2\|_2^2 + \gamma_1), & \|v_2\|_2^2 &\leq \frac{1}{\alpha_2}(\beta_2\|v_1\|_1^2 + \gamma_2), \\ \|v_1\|_1^2 &\leq \frac{\beta_1}{\alpha_1} \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\|v_1\|_1^2 + \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \right) + \frac{\gamma_1}{\alpha_1}, & \|v_2\|_2^2 &\leq \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\|v_2\|_2^2 + \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right) + \frac{\gamma_2}{\alpha_2}, \\ \|v_1\|_1^2 &\leq \left(1 - \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} \right)^{-1} \left(\frac{\beta_1\gamma_2}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right), & \|v_2\|_2^2 &\leq \left(1 - \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} \right)^{-1} \left(\frac{\beta_2\gamma_1}{\alpha_2\alpha_1} + \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \right), \\ \|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_2^2 &\leq \left(1 - \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} \right)^{-1} \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1} \left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) + \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right) \right). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

4. Существование периодического решения. Для доказательства теоремы 2 рассмотрим семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\Phi_\lambda(w_1, w_2) = \begin{pmatrix} w_1(t) - w_1(\omega) - \int_0^t F_{1\lambda}(s, w_1(s), w_2(s)) ds \\ w_2(t) - w_2(\omega) - \int_0^t F_{2\lambda}(s, w_1(s), w_2(s)) ds \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

где

$$F_{k\lambda}(t, z_1, z_2) = (1 - \lambda)F_k(t, z_1, z_2) + \lambda(-1)^k \alpha_k z_k, \quad k = 1, 2,$$

в банаховом пространстве $E_\omega^{1,2} = C([0, \omega]; \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2})$ с нормой

$$\|(w_1, w_2)\|^2 := \max_{0 \leq t \leq \omega} |w_1(t)|_1^2 + \max_{0 \leq t \leq \omega} |w_2(t)|_2^2.$$

Легко проверить, что, во-первых, при фиксированном $\lambda \in [0, 1]$ пара $(w_1, w_2) \in E_\omega^{1,2}$ будет ω -периодическим решением системы уравнений

$$v'_k = F_{k\lambda}(t, v_1, v_2), \quad k = 1, 2,$$

лишь в том случае, когда $\Phi_\lambda(w_1, w_2) = 0$, т.е. (w_1, w_2) является нулем векторного поля Φ_λ . Во-вторых, при каждом $\lambda \in [0, 1]$ отображения $F_{k\lambda}(t, z_1, z_2)$, $k = 1, 2$, удовлетворяют условиям (2) и (3). Отсюда в силу теоремы 1 вытекает, что $\Phi_\lambda(w_1, w_2) \neq 0$ при любых $\lambda \in [0, 1]$ и $(w_1, w_2) \in E_\omega^{1,2}$, $\|(w_1, w_2)\| > \sqrt{M}$. Следовательно, при любом $\lambda \in [0, 1]$ определено вращение $\gamma_\infty(\Phi_\lambda)$ векторного поля Φ_λ на бесконечности [2] и

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma_\infty(\Phi_1). \quad (8)$$

Покажем, что

$$\gamma_\infty(\Phi_1) = 1. \quad (9)$$

Тогда из (8) и (9) следует, что $\gamma_\infty(\Phi_0) \neq 0$, и согласно принципу ненулевого вращения (см. [2]) существует хотя бы один нуль векторного поля Φ_0 . Этим самым теорема 2 будет доказана.

Для доказательства равенства (9) векторное поле Φ_1 гомотопируем к конечномерному векторному полю следующей формулой:

$$\Psi_\lambda(w_1, w_2) = \begin{pmatrix} w_1(t) - w_1(\omega) + \lambda \alpha_1 \int_0^t w_1(s) ds + (1 - \lambda) \alpha_1 \int_0^\omega w_1(s) ds \\ w_2(t) - w_2(\omega) - \lambda \alpha_2 \int_0^t w_2(s) ds - (1 - \lambda) \alpha_2 \int_0^\omega w_2(s) ds \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Очевидно, $\Psi_1 = \Phi_1$. Проверим, что при любых $\lambda \in [0, 1]$ и $(w_1, w_2) \in E_\omega^{1,2} \setminus \{0, 0\}$ имеет место неравенство

$$\Psi_\lambda(w_1, w_2) \neq 0. \quad (10)$$

Действительно, если (10) не верно, то при некоторых $\lambda \in [0, 1]$ и $(w_1, w_2) \in E_\omega^{1,2}$ имеем:

$$w'_k(t) = \lambda(-1)^k \alpha_k w_k(t), \quad t \in (0, \omega), \quad \int_0^\omega w_k(s) ds = 0, \quad w_k(0) = w_k(\omega), \quad k = 1, 2.$$

Отсюда следует, что вектор-функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$ тождественно равны нулю.

Из равенств (8) и (10) вытекает, что

$$\gamma_\infty(\Phi_1) = \gamma_\infty(\Psi_0). \quad (11)$$

Векторное поле Ψ_0 состоит из разности единичного и конечномерного операторов. Поэтому, согласно свойству векторных полей [2], для вычисления вращения $\gamma_\infty(\Psi_0)$ достаточно рассмотреть проекцию Ψ_0 на $\mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2}$:

$$\gamma_\infty(\Psi_0) = \gamma_\infty(\tilde{\Psi}_0), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_0(z_1, z_2) &= \Psi_0(z_1, z_2), \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2}, \\ \tilde{\Psi}_0(z_1, z_2) &= \begin{pmatrix} \omega \alpha_1 z_1 \\ -\omega \alpha_2 z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\omega \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для линейного отображения $\tilde{\Psi}_0: \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2} \mapsto \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2}$ его вращение, как известно, равно знаку определителя матрицы отображения [2]:

$$\gamma_\infty(\tilde{\Psi}_0) = \text{sign} \begin{pmatrix} \omega \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\omega \alpha_2 \end{pmatrix} = (-1)^{2n_2} = 1. \quad (13)$$

Из равенств (8), (11), (12) и (13) следует (9).

Теорема 2 доказана.

5. Существование ограниченного решения. Докажем теорему 3, приближая правые части системы уравнений (1) их периодическими срезками с возрастающими периодами.

Рассмотрим системы уравнений

$$v'_k = F_{km}(t, v_1, v_2), \quad v_k \in \mathbb{C}^{n_k}, \quad |t| < m+1, \quad k = 1, 2, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} F_{km}(t, v_1, v_2) &= \eta_m(t) F_k(t, v_1, v_2) + (1 - \eta_m(t))(-1)^k \alpha_k v_k, \quad k = 1, 2, \\ \eta_m(t) &\in C(R), \quad 0 \leq \eta_m(t) \leq 1, \\ \eta_m(t) &= 1 \text{ при } |t| \leq m, \quad \eta_m(t) = 0 \text{ при } |t| \geq m+1. \end{aligned}$$

При каждом m правые части системы уравнений (14) периодически продолжим по t с периодом $\omega_m = 2(m+1)$. Легко проверить, что при каждом m правые части системы уравнений (14) удовлетворяют условиям теоремы 2. Согласно теореме 2, при каждом m существует ω_m -периодическое решение $(v_{1m}(t), v_{2m}(t))$ системы уравнений (14). Для последовательности $(v_{1m}(t), v_{2m}(t))$, $m = 1, 2, \dots$, в силу теоремы 1 имеет место оценка

$$\|v_{1m}\|_1^2 + \|v_{2m}\|_2^2 \leq M, \quad m = 1, 2, \dots$$

Из этой оценки в силу систем уравнений (14) вытекает ограниченность последовательности производных $(v'_{1m}(t), v'_{2m}(t))$, $m = 1, 2, \dots$. Поэтому можно выделить подпоследовательность $(v_{1m_j}(t), v_{2m_j}(t))$, $j = 1, 2, \dots$, которая равномерно сходится на каждом конечном отрезке. В системе уравнений (14), переходя к пределу вдоль данной подпоследовательности, получим ограниченное решение системы уравнений (1).

Теорема 3 доказана.

6. Примеры. Рассмотрим примеры систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым можно применить теоремы 2 и 3.

В качестве первого примера рассмотрим систему уравнений

$$v'_k = A_k(t, v_1, v_2)v_k + f_k(t, v_1, v_2), \quad v_k \in \mathbb{C}^{n_k}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Здесь отображения $A_k: \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2} \mapsto L(\mathbb{C}^{n_k})$, $k = 1, 2$, где $L(\mathbb{C}^{n_k})$ — пространство квадратных матриц порядка n_k , и отображения $f_k: \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2} \mapsto \mathbb{C}^{n_k}$, $k = 1, 2$, непрерывны и при всех $t \in \mathbb{R}$, $z_1 \in \mathbb{C}^{n_1}$, $z_2 \in \mathbb{C}^{n_2}$ удовлетворяют условиям:

$$(-1)^k < (A_k + A_k^*)(t, z_1, z_2)z_k, z_k >_k \geq 2a_k|z_k|_k^2, \quad k = 1, 2, \quad (16)$$

$$|f_k(t, z_1, z_2)|_k \leq b_k(|z_1|_1 + |z_2|_2) + c_k, \quad k = 1, 2, \quad (17)$$

где a_k, b_k, c_k , $k = 1, 2$ — вещественные неотрицательные числа.

Следствие 1. Система уравнений (15) имеет хотя бы одно ограниченное решение, если выполнены условия (16), (17) и

$$a_k > 1,5b_k, \quad k = 1, 2, \quad (a_1 - 1,5b_1)(a_2 - 1,5b_2) > 0,25b_1b_2. \quad (18)$$

Проверим, что отображения

$$F_k(t, z_1, z_2) = A_k(t, z_1, z_2)z_k + f_k(t, z_1, z_2), \quad k = 1, 2,$$

удовлетворяют условиям (2)–(4). Выберем $\varepsilon > 0$ из условий

$$a_k > (1,5 + \varepsilon)b_k, \quad k = 1, 2, \quad (a_1 - (1,5 + \varepsilon)b_1)(a_2 - (1,5 + \varepsilon)b_2) > 0,25b_1b_2.$$

Положим

$$\alpha_1 = (a_1 - (1,5 + \varepsilon)b_1), \quad \beta_1 = 0,5b_1, \quad \gamma_1 = \max_{\lambda \geq 0} (c_1\lambda - \varepsilon b_1\lambda^2),$$

и проверим выполнимость условия (2):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle A_1(t, z_1, z_2)z_1 + f_1(t, z_1, z_2), z_1 \rangle_1 &= \\ &= 0,5\langle (A_1 + A_1^*)(t, z_1, z_2)z_1, z_1 \rangle_1 + \operatorname{Re}\langle f_1(t, z_1, z_2), z_1 \rangle_1 \leq \\ &\leq -a_1|z_1|_1^2 + |z_1|_1(b_1|z_1|_1 + b_1|z_2|_2 + c_1) = (b_1 - a_1)|z_1|_1^2 + c_1|z_1|_1 + b_1|z_1|_1|z_2|_2 \leq \\ &\leq (b_1 - a_1)|z_1|_1^2 + c_1|z_1|_1 + 0,5b_1|z_1|_1^2 + 0,5b_1|z_2|_2^2 = \\ &= -(a_1 - (1,5 + \varepsilon)b_1)|z_1|_1^2 + 0,5b_1|z_2|_2^2 + (c_1|z_1|_1 - \varepsilon b_1|z_1|_1^2) \leq -\alpha_1|z_1|_1^2 + \beta_1|z_2|_2^2 + \gamma_1. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, полагая

$$\alpha_2 = (a_2 - (1,5 + \varepsilon)b_2), \quad \beta_1 = 0,5b_2, \quad \gamma_2 = -\min_{\lambda \geq 0} (\varepsilon b_2\lambda^2 - c_2\lambda),$$

проверим выполнимость условия (3):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle A_2(t, z_1, z_2)z_2 + f_2(t, z_1, z_2), z_2 \rangle_2 &= \\ &= 0,5\langle (A_2 + A_2^*)(t, z_1, z_2)z_2, z_2 \rangle_2 + \operatorname{Re}\langle f_2(t, z_1, z_2), z_2 \rangle_2 \geq \\ &\geq a_2|z_2|_2^2 - |z_2|_2(b_2|z_1|_1 + b_2|z_2|_2 + c_2) = (a_2 - b_2)|z_2|_2^2 - c_2|z_2|_2 - b_2|z_1|_1|z_2|_2 \geq \\ &\geq (a_2 - b_2)|z_2|_2^2 - c_2|z_2|_2 - 0,5b_2|z_1|_1^2 - 0,5b_2|z_2|_2^2 = \\ &= (a_2 - (1,5 + \varepsilon)b_2)|z_2|_2^2 - 0,5b_2|z_1|_1^2 + (\varepsilon b_2|z_2|_2^2 - c_2|z_2|_2) \geq \alpha_2|z_2|_2^2 - \beta_2|z_1|_1^2 - \gamma_2. \end{aligned}$$

Очевидно, условие (4) выполнено. Таким образом, правые части системы уравнений (15) удовлетворяют условиям теоремы 3, и следствие 1 действительно верно.

В качестве второго примера рассмотрим систему уравнений

$$x' = |x|^p x + f(t, x, y), \quad y' = -|y|^q y + g(t, x, y), \quad t, x, y \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Здесь $p \geq 0$, $q \geq 0$, функции $f(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ непрерывны по совокупности переменных, ω -периодичны по t и удовлетворяют условиям

$$|f(t, x, y)| \leq f_1(|x| + |y|) + f_2, \quad |g(t, x, y)| \leq g_1(|x| + |y|) + g_2, \quad (20)$$

где f_1, f_2, g_1, g_2 — неотрицательные числа, на них наложим некоторые условия.

Проверим, что функции

$$F_1(t, x, y) = |x|^p x + f(t, x, y), \quad F_2(t, x, y) = -|y|^q y + g(t, x, y)$$

удовлетворяют условиям (2) и (3). Для функции $F_1(t, x, y)$, учитывая первое из условий (20), имеем:

$$xF(t, x, y) = |x|^p x^2 + xf(t, x, y) \geq |x|^p x^2 - |x|(f_1(|x| + |y|) + f_2) \geq (|x|^p - f_1)x^2 - f_1|x||y| - f_2|x|.$$

Покажем, что существуют положительные числа α_1, β_1 и γ_1 такие, что $\alpha_1 > \beta_1$ и при всех $t, x, y \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$(|x|^p - f_1)x^2 - f_1|x||y| - f_2|x| \geq \alpha_1 x^2 - \beta_1 y^2 - \gamma_1.$$

Действительно, левую часть оценим снизу следующим образом:

$$(|x|^p - f_1)x^2 - f_1|x||y| - f_2|x| \geq (|x|^p - f_1)x^2 - 0,5f_1(x^2 + y^2) - f_2|x|.$$

Подберем α_1, β_1 и γ_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$(|x|^p - f_1)x^2 - 0,5f_1(x^2 + y^2) - f_2|x| \geq \alpha_1 x^2 - \beta_1 y^2 - \gamma_1,$$

Рассмотрим два случая: $p = 0$ и $p > 0$. В первом случае неравенство принимает вид

$$(1 - 1,5f_1 - \alpha_1)x^2 + (\beta_1 - 0,5f_1)y^2 - f_2|x| \geq -\gamma_1.$$

Считая $0 \leq f_1 < 0,5$, возьмем

$$\beta_1 = 0,5f_1, \quad \beta_1 < \alpha_1 < 1 - 1,5f_1, \quad \gamma_1 = -\min_{\lambda \geq 0}((1 - 1,5f_1 - \alpha_1)\lambda^2 - f_2\lambda).$$

Во втором случае, когда $p > 0$, полагая $\beta_1 = 0,5f_1$ и $\alpha_1 > 0,5f_1$, имеем:

$$(|x|^p - \alpha_1 - 1,5f_1)x^2 - f_2|x| \geq -\gamma_1,$$

где

$$\gamma_1 = -\min_{\lambda \geq 0}((\lambda^p - \alpha_1 - 1,5f_1)\lambda^2 - f_2\lambda).$$

Таким образом, функция

$$F_1(t, x, y) = |x|^p x + f(t, x, y)$$

удовлетворяет условию (2) при некоторых $\alpha_1 > \beta_1 \geq 0$ и $\gamma_1 \geq 0$, если либо $p = 0$ и $f_1 < 0,5$, либо $p > 0$. Аналогичным образом можно проверить, что функция

$$F_2(t, x, y) = -|y|^q y + g(t, x, y)$$

удовлетворяет условию (3) при некоторых $\alpha_2 > \beta_2 \geq 0$ и $\gamma_2 \geq 0$, если либо $q = 0$ и $g_1 < 0,5$, либо $q > 0$. Отсюда в силу теорем 1 и 2 вытекает

Следствие 2. Если функции $f(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ непрерывны по совокупности переменных, ω -периодичны по t , удовлетворяют условиям (20) и при $p = 0$ выполнено неравенство $f_1 < 0,5$, а при $q = 0$ — неравенство $g_1 < 0,5$, то ограниченные решения системы уравнений (19) допускают априорную оценку, и среди них есть хотя бы одно ω -периодическое решение.

В качестве третьего примера рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка следующего вида

$$x'' - p^2(t, x)x = q(t, x, x'), \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad (21)$$

где функции $p(t, \xi)$ и $q(t, \xi, \eta)$ непрерывны по совокупности переменных. В этом уравнении произведем замену

$$x(t) = y(\mu t), \quad \mu > 0.$$

Тогда для $y(t)$ получим уравнение

$$y'' - \mu^{-2}p^2(\mu^{-1}t, y)y = \mu^{-2}q(\mu^{-1}t, y, \mu y').$$

Данное уравнение представим в следующем виде:

$$\left(\frac{d}{dt} + \mu^{-1}p\right)\left(\frac{d}{dt} - \mu^{-1}p\right)y = -\mu^{-1}y\left(\mu^{-1}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y'}y'\right) + \mu^{-2}q(\mu^{-1}t, y, \mu y').$$

Вводя обозначения $z_1 = y$, $z_2 = y' - \mu^{-1}p(\mu^{-1}t, y)y$,

$$g_\mu(t, z_1, z_2) = \mu^{-2}q\left(\mu^{-1}t, z_1, \mu z_2 + p(\mu^{-1}t, z_1)z_1\right) - \\ - \mu^{-1}z_1 \left[\mu^{-1} \frac{\partial p}{\partial t}(\mu^{-1}t, z_1) + \frac{\partial p}{\partial z_1}(\mu^{-1}t, z_1) \left(z_2 + \mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_1 \right) \right],$$

относительно $z_1(t)$ и $z_2(t)$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} z_1' = \mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_1 + z_2, \\ z_2' = -\mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_2 + g_\mu(t, z_1, z_2). \end{cases} \quad (22)$$

Предположим, что существуют $\mu > 0$, $p_0 > 1$, $0 \leq g_0 < 0,5p_0$, $g_1 \geq 0$ такие, что при всех $t, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ выполняются условия

$$\mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1) \geq p_0, \quad (23)$$

$$|g_\mu(t, z_1, z_2)| \leq g_0(|z_1| + |z_2|) + g_1. \quad (24)$$

Проверим, что правые части системы уравнений (22) удовлетворяют условиям (2), (3):

$$\begin{aligned} (\mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_1 + z_2)z_1 &\geq p_0z_1^2 - 0,5z_1^2 - 0,5z_2^2 = (p_0 - 0,5)z_1^2 - 0,5z_2^2, \\ \alpha_1 &= p_0 - 0,5, \quad \beta_1 = 0,5, \quad \gamma_1 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(-\mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_2 + g_\mu(t, z_1, z_2) \right) z_2 &\leq -p_0z_2^2 + g_0(|z_1| + |z_2|)|z_2| + g_1|z_2| \leq \\ &\leq -(p_0 - g_0)z_2^2 + 0,5g_0(z_1^2 + z_2^2) + g_1|z_2| = -(p_0 - 1,5g_0)z_2^2 + 0,5g_0z_1^2 + g_1|z_2| = \\ &= -(p_0 - (1,5 + \varepsilon)g_0)z_2^2 + 0,5g_0z_1^2 + g_1|z_2| - \varepsilon g_0z_2^2. \end{aligned}$$

Выберем ε так, чтобы $p_0 > (2 + \varepsilon)g_0$. Тогда, полагая

$$\alpha_2 = p_0 - (1,5 + \varepsilon)g_0, \quad \beta_2 = 0,5g_0, \quad \gamma_2 = \max_{\lambda \geq 0} (g_1\lambda - \varepsilon g_0\lambda^2),$$

имеем:

$$\left(-\mu^{-1}p(\mu^{-1}t, z_1)z_2 + g_\mu(t, z_1, z_2) \right) z_2 \leq -\alpha_2z_2^2 + \beta_2z_1^2 + \gamma_2.$$

Заметим, что $\beta_1 < \alpha_1$ и $\beta_2 < \alpha_2$, т.е. условие (4) выполнено. Отсюда в силу теорем 1, 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. Если выполнены условия (23), (24), где $\mu > 0$, $p_0 > 1$, $0 \leq g_0 < 0,5p_0$, $g_1 \geq 0$, и выполнено условие

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} p(t, \xi) < \infty, \quad (25)$$

то для любого решения $x(t)$ уравнения (21), определенного и ограниченного на всей числовой оси вместе со своей производной $x'(t)$, имеет место априорная оценка

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |x'(t)| < R. \quad (26)$$

Если к тому же функции $p(t, \xi)$ и $q(t, \xi, \eta)$ ω -периодичны по t , то существует ω -периодическое решение уравнения (21).

Следствие 3 можно применить к уравнению

$$x'' - 4(1 + e^x)^2x = 2xe^xx' + q_0(t, x, x'), \quad (27)$$

где функция $q_0(t, \xi, \eta)$ непрерывна по совокупности переменных и ограничена

$$\sup_{(t, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^3} |q_0(t, \xi, \eta)| < \infty.$$

Полагая $\mu = 1$, $p_0 = 2$, $g_0 = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} g_\mu(t, z_1, z_2) &= 2z_1 e^{z_1} (z_2 + 2(1 + e^{z_1})z_1) + q_0(t, z_1, z_2 + 2(1 + e^{z_1})z_1) - \\ &\quad - 2z_1 e^{z_1} (z_2 + 2(1 + e^{z_1})z_1) = q_0(t, z_1, z_2 + 2(1 + e^{z_1})z_1), \\ |g_\mu(t, z_1, z_2)| &\leq \sup_{(t, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^3} |q_0(t, \xi, \eta)| = g_1. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого решения уравнение (27) имеет место априорная оценка (26). А если функция $q_0(t, \xi, \eta)$ периодична по переменной t с периодом ω , то существует ω -периодическое решение уравнения (27).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
2. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.
3. Мухамадиев Э. К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1970. — 194, № 11. — С. 510–513.
4. Мухамадиев Э. К теории ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Диффер. уравн. — 1974. — 10, № 4. — С. 635–646.
5. Мухамадиев Э. Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. — 1981. — 30, № 3. — С. 713–722.
6. Мухамадиев Э., Наимов А. Н., Сатторов А. Х. Об ограниченных решениях одного класса гиперболических уравнений на плоскости // Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 1. — С. 86–93.
7. Мухамадиев Э., Наимов А. Н., Сатторов А. Х. Аналог теоремы Боля для одного класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Уфим. мат. ж. — 2017. — 9, № 1. — С. 75–88.

Кобилзода Мирзоодили Мирзомалик

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

E-mail: kobilzoda94@mail.ru

Наимов Алижон Набиджанович

Вологодский государственный университет

E-mail: nan67@rambler.ru