Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Мустафокулов, Исследование одного линейного уравнения типа Эйлера,
Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2021,
том 192, 74–83

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-74-83>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:50:21

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА

© 2021 г. Р. МУСТАФОКУЛОВ

Аннотация. В статье рассматривается одно линейное уравнение типа Эйлера n -го порядка. Указаны формула замены переменной и условия на коэффициенты, при выполнении которых уравнение приводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Приведено явное интегральное представление для решения неоднородного уравнения в зависимости от корней характеристического уравнения.

Ключевые слова: линейное уравнение типа Эйлера, модельное уравнение, характеристика уравнения, фундаментальное решение, определитель типа Вандермонда.

ON ONE LINEAR EQUATION OF THE EULER TYPE

© 2021 R. MUSTAFOQULOV

ABSTRACT. In this paper, for an Euler-type linear equation of order n , we indicate a change of variable and conditions for the coefficients under which the equation is reduced to an equation with constant coefficients. For a solution of the inhomogeneous equation, we construct an explicit integral representation depending on the roots of the characteristic equation.

Keywords and phrases: linear equation of Euler type, model equation, characteristic of equation, fundamental solution, determinant of Vandermonde type.

AMS Subject Classification: 34B45, 35L05

Рассмотрим на (a, b) дифференциальное уравнение вида

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)\omega(x)y' + A_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

где коэффициенты $A_i(x)$ и правая часть $f(x)$ являются непрерывными в (a, b) функциями. Относительно функции $\omega(x)$ предполагается, что она n раз непрерывно дифференцируема и $\omega(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$.

Уравнение (1) является линейным уравнением типа Эйлера (см. [7]). Ниже изучается вопрос об интегрируемости этого уравнения путем приведения его к уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимой переменной (см. [2]).

1. Линейное однородное уравнение типа Эйлера. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + A_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)\omega(x)y' + A_n(x)y = 0 \quad (2)$$

и укажем формулу замены переменной, приводящей это уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами.

Предварительно докажем следующее утверждение (см. [4]).

Лемма 1. Пусть функции $y = y(x)$ и $t = \mu(x)$ являются k раз непрерывно дифференцируемыми. Тогда для k -й производной функции $y(x) = y(\nu(t)) = z(t)$, где $x = \nu(t)$ обратное к $t = \mu(x)$ преобразование, справедлива формула

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^k z^{(i)}(t) P_k^i(x). \quad (3)$$

где $P_k^i(x) = P_k^i(\mu'(x), \mu''(x), \dots, \mu^{(k)}(x))$, $i = 1, 2, \dots, k$, определены равенствами

$$\begin{aligned} P_k^1(x) &= \mu^{(k)}(x), & P_k^k(x) &= [\mu'(x)]^k, \\ P_k^i(x) &= \mu'(x) P_{k-1}^{i-1}(x) + (P_{k-1}^i(x))', & i &= 2, 3, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\begin{aligned} y'(x) &= z'(t) \cdot t'_x = z'(t) \mu'(x), \\ y''(x) &= z''(t) [\mu'(x)]^2 + z'(t) \mu''(x), \\ y'''(x) &= z'''(t) [\mu'(x)]^3 + z''(t) 3\mu'(x) \mu''(x) + z'(t) \mu'''(x) \end{aligned}$$

и т. д. Отсюда видно, что $y^{(k)}(x)$ выражается в виде линейной функции от $z'(t), z''(t), \dots, z^{(k)}(t)$ с коэффициентами, зависящими от $\mu'(x), \dots, \mu^{(k)}(x)$. Обозначим коэффициент при $z^{(i)}(t)$ в выражении для $y^{(k)}(x)$ через $P_k^i(x)$. Очевидно, $P_k^i(x)$ определяется через $P_{k-1}^{i-1}(x)$ и $P_{k-1}^i(x)$, причем $P_k^1(x) = \mu^{(k)}(x)$ и $P_k^k(x) = [\mu'(x)]^k$ для любого k и $i = 1, 2, \dots, k$. Чтобы найти формулу для определения $P_k^i(x)$ при $2 \leq i \leq k-1$, продифференцируем еще раз по x выражения

$$y^{(k-1)}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} z^{(i)}(t) P_{k-1}^i(x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) &= \sum_{i=1}^{k-1} \left[z^{(i+1)}(t) \mu'(x) P_{k-1}^i(x) + z^{(i)}(t) (P_{k-1}^i(x))' \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} z^{(i+1)}(t) \mu'(x) P_{k-1}^i(x) + \sum_{i=1}^{k-1} z^{(i)}(t) (P_{k-1}^i(x))'. \end{aligned}$$

Объединим слагаемые обеих сумм, содержащие одинаковые порядки производной $z^{(m)}(t)$. Произведение

$$z^{(k)}(t) \mu'(x) P_{k-1}^{k-1}(x) = z^{(k)}(t) [\mu'(x)]^k$$

входит только в первую сумму (при $i = k-1$), а

$$z'(t) (P_{k-1}^1(x))' = z'(t) [\mu^{(k-1)}(x)]' = z'(t) \mu^{(k)}(x)$$

входит только во вторую сумму (при $i = 1$). Объединяя все остальные произведения, входящие в эти суммы, получим

$$z^{(i)}(t) \left[\mu'(x) P_{k-1}^{i-1}(x) + (P_{k-1}^i(x))' \right], \quad 2 \leq i \leq k-1.$$

Поэтому, если ввести обозначения

$$\begin{aligned} P_k^1(x) &= \mu^{(k)}(x), & P_k^k(x) &= [\mu'(x)]^k, \\ P_k^i(x) &= \mu'(x) P_{k-1}^{i-1}(x) + (P_{k-1}^i(x))' & i &= 2, 3, \dots, k-1, \end{aligned}$$

то для любого $k = 1, 2, \dots, n$ получим формулу (3) с коэффициентами (4). Лемма 1 доказана. $\square$

Отметим, что известная формула Фаа ди Бруно (см. [8]) для производной n -го порядка от сложной функции $y(x) = z(\mu(x)) = z(t)$, содержит мономы $Q_{P^n}(x)$ от n переменных, определяемые целыми положительными решениями $P^n = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ диофантова уравнения

$$p_1 + 2p_2 + \dots + np_n = n,$$

в то время как формула (3) содержит коэффициенты $P_k^i(x)$, определенные рекуррентными формулами (4) и не зависящие от решений диофантова уравнения. Это обстоятельство позволит в дальнейшем записать для уравнения (1) модельное уравнение в явном виде.

Сделаем теперь в уравнении (2) замену независимой переменной $t = \mu(x)$, где $\mu(x)$ — некоторая достаточное число раз дифференцируемая функция. Тогда для сложной функции $y(x) = z(\mu(x)) = z(t)$ в силу леммы 1 справедливы формулы (3) при всех $k = 1, 2, \dots, n$. Подставляя (3) в уравнении (2) и деля результат на $[\omega(x)]^n P_n^n(x) = [\omega(x)]^n [\mu'(x)]^n$, получаем

$$\begin{aligned} z^{(n)} + \frac{z^{(n-1)}}{\omega(x)\mu'(x)} \left[A_1(x) + \omega(x) \frac{P_n^{n-1}(x)}{P_{n-1}^{n-1}(x)} \right] + \dots + \\ + \frac{z'}{[\omega(x)\mu'(x)]^{n-1}} \left[A_{n-1}(x) + A_{n-2}(x)\omega(x) \frac{P_2^1(x)}{P_1^1(x)} + \dots + A_1(x)\omega^{n-2}(x) \frac{P_{n-1}^1(x)}{P_1^1(x)} + \omega^{n-1}(x) \frac{P_n^1(x)}{P_1^1(x)} \right] + \\ + A_n(x) \frac{z}{[\omega(x)\mu'(x)]^n} = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что функцию $\mu(x)$ необходимо выбрать так, чтобы коэффициент при z был постоянным. Положим

$$\frac{A_n(x)}{[\omega(x)\mu'(x)]^n} \equiv c^n, \quad c = \text{const.}$$

Тогда

$$\mu'(x) = \sqrt[n]{\frac{A_n(x)}{c^n}} \cdot \frac{1}{\omega(x)} \Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{c} \int \frac{\sqrt[n]{A_n(x)}}{\omega(x)} dx.$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению (см. также [3]).

Лемма 2. Если уравнение (2) приводимо к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены переменной, то только по формуле вида

$$t = \frac{1}{c} \int \frac{\sqrt[n]{A_n(x)}}{\omega(x)} dx, \quad c = \text{const.}$$

Допустим, что у уравнения (2) коэффициент $A_n(x) \equiv a_n = \text{const.}$ Тогда, считая $c^n = a_n$, получим формулу замены переменной в виде

$$t = \mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)} \quad (6)$$

и уравнение (5) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} z^{(n)} + \left[A_1(x) + \omega^n(x) P_n^{n-1}(x) \right] z^{(n-1)} + \dots + \\ + \left[A_{n-1}(x) + A_{n-2}\omega^2(x) P_2^1(x) + \dots + A_1(x)\omega^{n-1}(x) P_{n-1}^1(x) + \omega^n(x) P_n^1(x) \right] z' + a_n z = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если существуют такие постоянные $a_1, a_2, \dots, a_n$, что коэффициенты $A_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, уравнения (2) удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} A_k(x) = a_k - \sum_{i=0}^{k-1} A_i(x) \omega^{n-i}(x) P_{n-i}^{n-k}(x) & k = 1, 2, \dots, n-1; \quad A_0(x) \equiv 1, \\ A_n(x) \equiv a_n, \end{cases} \quad (8)$$

то уравнение (7) превращается в уравнение с постоянными коэффициентами

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 0, \quad (9)$$

и мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (2) заменой переменной по формуле (6) приводилось к уравнению с постоянными коэффициентами (9), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $A_k(x)$ уравнения (2) определялись равенствами (8).

Рассмотрим случай, когда все коэффициенты $A_k(x)$ уравнения (2) являются постоянными. Тогда из равенства (8) при $k = 1$ получаем

$$\omega^n(x)P_n^{n-1}(x) = a_1.$$

Отсюда, так как

$$P_n^{n-1}(x) = \frac{n(n-1)}{2}[\mu'(x)]^{n-2}\mu''(x) = \frac{n(n-1)}{2}\left(-\frac{\omega'(x)}{\omega^n(x)}\right),$$

то $\omega(x) = cx + d$, т.е. уравнение (2) совпадает с линейным уравнением Эйлера. Это приводит нас к утверждению (см. [4]).

Теорема 2. Уравнение (2) при постоянных коэффициентах $A_k(x) \equiv c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, заменой переменной по формуле (6) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами только в том случае, когда $\omega(x) = cx + d$, т.е. когда оно является линейным уравнением Эйлера.

Из этой теоремы следует, что уравнение (2) с произвольной функцией $\omega(x)$, отличной от линейной, при постоянных коэффициентах $A_k(x) \equiv c_k$, заменой переменной по формуле (6) не приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

Определение 1. Уравнение (1), коэффициенты $A_k(x)$ которого определены равенствами (8), называется *модельным уравнением*.

Отметим, что в работах Н. Раджабова (см., например, [9, 10]) рассматривались модельные уравнения вида

$$(D_x^\alpha)^n y + a_1(D_x^\alpha)^{n-1}y + \dots + a_{n-1}D_x^\alpha y + a_n y = f(x) \quad \left(D_x^\alpha = (x-a)^\alpha \frac{d}{dy}\right)$$

и связанные с ним интегральные уравнения типа Вольтерра, для решения которых были получены формулы интегрального представления при некоторых ограничениях на коэффициенты и правой части уравнения.

Так как уравнение с постоянными коэффициентами (9), к которому приводится модельное уравнение, имеет частные решения вида $e^{\lambda t}$ и $t^m e^{\lambda t}$ (λ — числовой параметр), то модельное уравнение имеет частные решения вида $e^{\lambda \mu(x)}$ и $[\mu(x)]^m e^{\lambda \mu(x)}$. Отсюда вытекает следующий непосредственный способ интегрирования модельного уравнения (2). Ищем решения в виде

$$y(x) = e^{\lambda \mu(x)}. \quad (10)$$

Тогда

$$y^{(k)}(x) = e^{\lambda \mu(x)} \sum_{i=1}^k \lambda^i P_k^i(x) \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $P_k^i(x)$ — определенные равенствами (4) выражения. Подставляя функцию (10) в левую часть модельного уравнения (2), после сокращения на $e^{\lambda \mu(x)}$ получаем

$$\begin{aligned} & \lambda^n + \left[A_1(x) + \omega^n(x)P_n^{n-1} \right] \lambda^{n-1} + \dots + \\ & + \left[A_{n-1} + A_{n-2}\omega^2(x)P_2^1(x) + \dots + A_1(x)\omega^{n-1}(x)P_{n-1}^1(x) + \omega^n(x)P_n^1(x) \right] \lambda + A_n(x) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, подставляя значения коэффициентов $A_k(x)$ из равенств (8), получаем

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* модельного уравнения (2).

Таким образом, функция (10) является частным решением модельного уравнения (2) тогда и только тогда, когда число λ является корнем характеристического уравнения (11).

Если все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ различны и вещественны, то модельное уравнение (2) имеет n линейно независимых вещественных частных решений вида (10): $y_1(x) = e^{\lambda_1 \mu(x)}, y_2(x) = e^{\lambda_2 \mu(x)}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n \mu(x)}$ и его общим решением будет

$$y_0(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i \mu(x)}, \quad c_i = \text{const.} \quad (12)$$

Если среди корней характеристического уравнения (11) имеются комплексно-сопряженные $\alpha \pm i\beta$, то в формуле общего решения (12) этой паре характеристических чисел соответствует выражение вида

$$e^{\alpha \mu(x)} \left[c_1 \cos(\beta \mu(x)) + c_2 \sin(\beta \mu(x)) \right].$$

Если λ_0 — кратный вещественный корень характеристического уравнения (11), то модельные уравнение (2) допускает вещественные же решения вида

$$[\mu(x)]^m e^{\lambda_0 \mu(x)}, \quad m = 0, 1, \dots, k-1,$$

и в формуле общего решения (12) этому корню будет соответствовать выражение

$$e^{\lambda_0 \mu(x)} Q_{k-1}[\mu(x)],$$

где $Q_{k-1}[\cdot]$ — полином степени $(k-1)$ с произвольными коэффициентами.

Нетрудно показать, что если $\alpha \pm i\beta$ — комплексно-сопряженные характеристические числа кратности k , то в формуле общего решения им соответствует выражение

$$e^{\alpha \mu(x)} \left(\cos[\beta \mu(x)] Q_{k-1}[\mu(x)] + \sin[\beta \mu(x)] R_{k-1}[\mu(x)] \right),$$

где $Q_{k-1}[\cdot]$ и $R_{k-1}[\cdot]$ — полиномы степени $k-1$ с произвольными коэффициентами.

2. Линейное неоднородное уравнение типа Эйлера. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (1), коэффициенты которого определены равенствами (8). Общее решение $y(x)$ уравнение (1) определяется как сумма общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения (2) и какого-то частного решения $\bar{y}(x)$ уравнения (1).

Формула общего решения $y_0(x)$ однородного модельного уравнения была определена в предыдущем разделе. В настоящем же разделе мы определим частное решение $\bar{y}(x)$, а затем и общее решение $y(x)$ неоднородного модельного уравнения (1), путем сведения его к уравнению с постоянными коэффициентами

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = F(t) \quad (13)$$

заменой переменной по формуле (6). Здесь $F(t) = F[\mu(x)] = f(x)$, $t_0 = \mu(a) < t < \mu(b) = T$.

Для определения частного решения $\bar{z}(t)$ уравнения (13) мы воспользуемся методом Коши (см. [1]); в качестве $\bar{z}(t)$ возьмем решение уравнения (13), удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{z}(t_0) = \bar{z}'(t_0) = \dots = \bar{z}^{(n-1)}(t_0) = 0. \quad (14)$$

Определение 2. Решение $Z(t)$ однородного уравнения (9), удовлетворяющее начальным условиям

$$Z(s) = Z'(s) = \dots = Z^{(n-2)}(s) = 0, \quad Z^{(n-1)}(s) = 1, \quad (15)$$

где $t = s$ любая заданная точка из интервала (t_0, T) , называется *фундаментальным решением*.

Фундаментальное решение зависит от независимой переменной t и от параметра s . Обозначим его через $Z(t) = Z(t, s)$, где функция $Z(t, s)$ определена и непрерывна в области $t_0 < t, s < T$.

Функция $Z(t-s) = Z(t-s, 0)$ также является решением уравнения (9) и при $t = s$ удовлетворяет начальным условиям

$$Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(n-2)}(0) = 0, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1. \quad (16)$$

Лемма 3. Решение $\bar{z}(t)$ неоднородного уравнения (13), удовлетворяющее начальным условиям (14), определяется формулой

$$\bar{z}(t) = \int_{t_0}^t Z(t-s)F(s)ds. \quad (17)$$

Доказательство. Дифференцируя (17) по t и принимая во внимание условия (16), получаем

$$\begin{aligned} \bar{z}'(t) &= \int_{t_0}^t Z'_t(t-s)F(s)ds, \quad \bar{z}''(t) = \int_{t_0}^t Z''_t(t-s)F(s)ds, \quad \dots, \\ \bar{z}^{(n-1)}(t) &= \int_{t_0}^t Z_t^{(n-1)}(t-s)F(s)ds, \quad \bar{z}^{(n)}(t) = \int_{t_0}^t Z_t^{(n)}(t-s)F(s)ds + F(t). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для производных в уравнение (13), получаем

$$\begin{aligned} \bar{z}^{(n)} + a_1 \bar{z}^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \bar{z}' + a_n \bar{z} &= \\ = \int_{t_0}^t \left[Z^{(n)}(t-s) + a_1 Z^{(n-1)}(t-s) + \dots + a_{n-1} Z'(t-s) + a_n Z(t-s) \right] F(s)ds + F(t) &\equiv F(t). \end{aligned}$$

Легко также увидеть, что функция $\bar{z}(t)$, определенная формулой (17), удовлетворяет начальным условиям (14) при $t = t_0$. Лемма 3 доказана. $\square$

Если известна некоторая фундаментальная система решений $\{z_i(t)\}_1^n$ однородного уравнения (9), то его фундаментальное решение $Z(t)$ может быть выделено из общего решения

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n c_i z_i(t), \quad (18)$$

если выбрать произвольные постоянные c_i так, чтобы удовлетворялись условия (15).

Из равенств

$$Z^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^n c_i z_i^{(k)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

и условий (15) получаем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i z_i^{(k)}(s) = 0, & k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \sum_{i=1}^n c_i z_i^{(n-1)}(s) = 1, \end{cases} \quad (19)$$

где $t = s$ заданная точка из интервала (t_0, T) . Решая систему (19) относительно c_i методом Крамера, находим

$$c_i = c_i(s) = (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(s)}{W(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$W(s) = \begin{vmatrix} z_1(s) & z_2(s) & \dots & z_n(s) \\ z'_1(s) & z'_2(s) & \dots & z'_n(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)}(s) & z_2^{(n-1)}(s) & \dots & z_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}$$

есть определитель Вронского, а $W_{ni}(s)$ — дополнительные миноры элементов n -й строки определителя $W(s)$. Подставляя найденные значения c_i в (18), получаем

$$Z(t) = Z(t, s) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(s)}{W(s)} z_i(t).$$

Отсюда

$$Z(t-s) = Z(t-s, 0) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} z_i(t-s)$$

и в силу леммы 3 получаем, что функция

$$\bar{z}(t) = \int_{t_0}^t Z(t-s) F(s) ds = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_{t_0}^t z_i(t-s) F(s) ds \quad (20)$$

является частным решением неоднородного уравнения (13), а его общее решение определяется формулой

$$z(t) = \sum_{i=1}^n c_i z_i(t) + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_{t_0}^t z_i(t-s) F(s) ds, \quad (21)$$

где c_i — произвольные постоянные.

Отметим, что примененный нами здесь метод для определения частного решения $\bar{z}(t)$ уравнения (13) позволяет выделить постоянную величину $W_{ni}(0)/W(0)$ как коэффициент при интеграле в формуле (20), в то время как при методе вариации постоянных это выражение зависит от параметра s и содержится под знаком интеграла (см. [3]).

Чтобы получить теперь общее решение $y(x)$ модельного уравнения (1), нужно в (21) произвести замену переменной $t = \mu(x)$. Тогда мы приходим к следующей формуле для общего решения модельного уравнения (1):

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i z_i[\mu(x)] + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \frac{W_{ni}(0)}{W(0)} \int_a^x z_i[\mu(x) - \mu(\tau)] \mu'(\tau) f(\tau) d\tau, \quad (22)$$

где $s = \mu(\tau)$ ($a < \tau < x < b$),

$$\mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)},$$

c_i — произвольные постоянные.

Таким образом, если функция $\omega(x)$, коэффициенты и правая часть $f(x)$ уравнения (1) такие, что интегралы

$$\int_a^x z_i[\mu(x) - \mu(\tau)] \mu'(\tau) f(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n},$$

существуют, то решение этого уравнения может быть определено формулой (22). В дальнейшем всюду предполагается, что эти интегралы существуют.

В формуле (22) фундаментальная система решений $\{z_i(t)\}_1^n$ и $W = W(0)$ определяются в зависимости от корней характеристического уравнения (11).

2.1. В этом пункте рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения (11) являются простыми и среди них имеются p вещественных $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и q комплексно-сопряженных $\theta_1 = \alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \theta_q = \alpha_q \pm i\beta_q$, где $p + 2q = n$ (см. [5]). В этом случае функции

$$\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t}, \quad k = \overline{1, p}; \quad \psi_{1m}(t) = e^{\alpha_m t} \cos \beta_m t, \quad \psi_{2m}(t) = e^{\alpha_m t} \sin \beta_m t, \quad m = \overline{1, q}, \quad (23)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (9) и определитель Вронского имеет вид

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p & \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \alpha_q & \beta_q \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_p^2 & a_1 & b_1 & \dots & a_q & b_q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_p^{n-1} & a_1^{n-2} & b_1^{n-2} & \dots & a_q^{n-2} & b_q^{n-2} \end{vmatrix},$$

где $a_m^{k-1} = \operatorname{Re}(\theta_m^k)$, $b_m^{k-1} = I_m(\theta_m^k)$, $a_m^0 = \alpha_m$, $b_m^0 = \beta_m$; $m = \overline{1, q}$, $k = \overline{1, n-1}$.

Теорема 3. Если λ_k , $k = \overline{1, p}$, и $\theta_m = \alpha_m \pm \beta_m$, $m = \overline{1, q}$, — корни характеристического уравнения (11), где $p + 2q = n$, то решение $y(x)$ модельного уравнения (1) определяется равенством

$$\begin{aligned} y(x) = & \sum_{k=1}^p c_k e^{\lambda_k \mu(x)} + \sum_{m=1}^q e^{\alpha_m \mu(x)} \left[c_m^1 \cos(\beta_m \mu(x)) + c_m^2 \sin(\beta_m \mu(x)) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{n+1}}{A_k} \int_a^x e^{\lambda_k [\mu(x) - \mu(\tau)]} \mu'(\tau) f(\tau) d\tau + \\ & + \sum_{m=1}^q \frac{(-1)^n}{\beta_m |B_m|^2} \int_a^x e^{\alpha_m [\mu(x) - \mu(\tau)]} \left\{ \operatorname{Re}(B_m) \sin(\beta_m [\mu(x) - \mu(\tau)]) - \right. \\ & \left. - \operatorname{Im}(B_m) \cos(\beta_m [\mu(x) - \mu(\tau)]) \right\} \mu'(\tau) f(\tau) d\tau, \quad (24) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A_k &= \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^p (\lambda_j - \lambda_k) \prod_{e=1}^q |\theta_e - \lambda_k|^2, \quad k = \overline{1, p}, \\ B_m &= \prod_{j=1}^p (\lambda_j - \theta_m) \prod_{\substack{e=1, \\ e \neq m}}^q [(\theta_e - \theta_m)(\bar{\theta}_e - \bar{\theta}_m)], \quad m = \overline{1, q}, \end{aligned}$$

c_k , $k = \overline{1, p}$, c_m^1 , c_m^2 , $m = \overline{1, q}$, — произвольные постоянные.

Доказательство. Рассматривая W как определитель типа Вандермонда, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} W &= (-1)^{k+1} \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^p (\lambda_j - \lambda_k) \prod_{e=1}^q [(\theta_e - \lambda_k)(\bar{\theta}_e - \lambda_k)] W_{nk}, \quad 1 \leq k \leq p, \\ W &= (-1)^p \beta_m \prod_{j=1}^p (\lambda_j - \theta_m) \prod_{\substack{e=1, \\ e \neq m}}^q [(\theta_e - \theta_m)(\bar{\theta}_e - \theta_m)] (W_{n,p+2m} + i W_{n,p+2m-1}), \\ W &= (-1)^p \beta_m \prod_{j=1}^p (\lambda_j - \bar{\theta}_m) \prod_{\substack{e=1, \\ e \neq m}}^q [(\theta_e - \bar{\theta}_m)(\bar{\theta}_e - \bar{\theta}_m)] (W_{n,p+2m} - i W_{n,p+2m-1}), \quad 1 \leq m \leq q. \end{aligned}$$

Находя из этих равенств

$$\frac{W_{nk}}{W}, \quad k = \overline{1, p}; \quad \frac{W_{n,p+2m}}{W}, \quad \frac{W_{n,p+2m-1}}{W}, \quad m = \overline{1, q},$$

и подставляя их, а также функции (23) в формулу (22), получаем для общего решения $y(x)$ модельного уравнения (1) представления (24). Теорема 3 доказана. $\square$

Замечание. Если, в частности, все корни характеристического уравнения (11) являются вещественными и разными, то $q = 0$, $p = n$ и формула (24) примет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k \mu(x)} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n+1}}{A_k} \int_a^x e^{\lambda_k [\mu(x) - \mu(\tau)]} \mu'(\tau) f(\tau) d\tau, \quad \text{где} \quad A_k = \prod_{j=1, j \neq k}^n (\lambda_j - \lambda_k). \quad (25)$$

2.2. Рассмотрим теперь случай, когда среди корней характеристического уравнения (11) имеется кратный (см. [6]).

Теорема 4. Пусть характеристическое уравнение (11) имеет p простых $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ и один k -кратный λ_0 вещественные корни, так что $p + k = n$. Тогда общее решение $y(x)$ модельного уравнения (1) определяется равенством

$$y(x) = \sum_{i=1}^p c_i e^{\lambda_i \mu(x)} + e^{\lambda_0 \mu(x)} \sum_{j=1}^k c_{p+j} [\mu(x)]^{j-1} + (-1)^p \sum_{i=1}^p \frac{1}{A_i (\lambda_i - \lambda_0)^k} \times \\ \times \int_a^x \left(e^{\lambda_i [\mu(x) - \mu(\tau)]} - e^{\lambda_0 [\mu(x) - \mu(\tau)]} \sum_{j=1}^k \frac{(\lambda_i - \lambda_0)^{j-1}}{(j-1)!} [\mu(x) - \mu(\tau)]^{j-1} \right) \mu'(\tau) f(\tau) d\tau, \quad (26)$$

где

$$A_i = \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^p (\lambda_j - \lambda_i),$$

c_m , $m = \overline{1, n}$, — произвольные постоянные.

Доказательство. В условиях теоремы функции

$$\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}, \quad i = \overline{1, p}, \quad \psi_j(t) = t^{j-1} e^{\lambda_0 t}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (27)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (9). Находим

$$\varphi_i^{(m)}(t) = \lambda_i^m e^{\lambda_i t}, \quad \psi_j^{(m)}(t) = e^{\lambda_0 t} \sum_{r=0}^{j-1} c_m^r \lambda_0^{m-r} (t^{j-1})^{(r)}, \quad m = \overline{1, n-1}.$$

Отсюда $\varphi_i^{(m)}(0) = \lambda_i^m$ и

$$\psi_j^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } m = \overline{0, j-2}, \\ (j-2)! c_m^{j-1} \lambda_0^{m-(j-1)} & \text{при } m = \overline{j-1, n-1}. \end{cases}$$

Следовательно, определитель $W = W(0)$ в этом случае имеет вид

$$W = \prod_{j=1}^{k-1} j! \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p & \lambda_0 & C_1^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \dots & \lambda_p^{k-1} & \lambda_0^{k-1} & C_{k-1}^1 \lambda_0^{k-2} & \dots & C_{k-1}^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_p^{n-1} & \lambda_0^{n-1} & C_{n-1}^1 \lambda_0^{n-2} & \dots & C_{n-1}^{k-1} \lambda_0^{n-k} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{k-1} j! V.$$

Определитель V также является определителем типа Вандермонда. Можно показать, что

$$V = (-1)^{kp} \prod_{r=1}^p (\lambda_r - \lambda_0)^k V_p = (-1)^{kp} A_0^k V_p, \\ V_{ni} = (-1)^{k(p+1)} \frac{A_0^k}{(\lambda_i - \lambda_0)^k} V_{pi}, \quad i = \overline{1, p}, \\ V_{n, p+j} = (-1)^{kp+n+j} \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \frac{A_0^k}{(\lambda_i - \lambda_0)^{k-(j-1)}} V_{pj}, \quad j = \overline{1, k},$$

где

$$V_p = (-1)^{i+1} \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^p (\lambda_j - \lambda_i) V_{pi}, = (-1)^{i+1} A_i V_{pi}, \quad i = \overline{1, p},$$

$$A_0 = \prod_{r=1}^p (\lambda_r - \lambda_0), \quad A_i = \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^p (\lambda_j - \lambda_i), \quad 1 \leq i \leq p.$$

Отсюда находим

$$\frac{W_{ni}}{W} = \frac{V_{ni}}{V} = \frac{(-1)^{k-i-1}}{A_i(\lambda_i - \lambda_0)^k}, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\frac{W_{n,p+j}}{W} = \frac{1}{(j-1)!} \frac{V_{n,p+j}}{V} = \frac{(-1)^{n+j}}{(j-1)!} \sum_{i=1}^p \frac{1}{A_i(\lambda_i - \lambda_0)^{k-(j-1)}}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Подставляя эти выражения, а также функции (27) в (22), получаем равенство (26). Теорема 4 доказана. $\square$

Замечание. Если в условиях теоремы 4 кратность k характеристического числа λ_0 равна 1, то мы окажемся в условиях теоремы 3, и формула (26) в этом случае совпадает с формулой (25). А если $k = n$, то определитель V имеет диагональный вид с единицами на главной диагонали. Поэтому в этом случае $V = 1$, $V_{ni} = 0$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $V_{nn} = 1$. Следовательно, формула (26) принимает вид

$$y(x) = e^{\lambda_0 \mu(x)} \sum_{j=1}^n c_j [\mu(x)]^{j-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x e^{\lambda_0 [\mu(x) - \mu(\tau)]} [\mu(x) - \mu(\tau)]^{n-1} \mu'(\tau) f(\tau) d\tau.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2. — М.: Наука, 1936.
2. Еругин Н. П. Приводимые системы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1946. — 13. — С. 3–96.
3. Матвеев Н. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — СПб., 1996.
4. Мустафокулов Р. Модельное уравнение для одного линейного однородного уравнения типа Эйлера n -го порядка // Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2018. — 61, № 3. — С. 216–223.
5. Мустафокулов Р. Интегральное представление решения одного линейного уравнения типа Эйлера в случае простых характеристик // в кн.: Современные методы теории краевых задач / Мат. Междунар. конф. «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXX» (3–9 мая 2019 г., Воронеж). — Воронеж, 2019. — С. 211–212.
6. Мустафокулов Р. Об одном линейном уравнении типа Эйлера с кратной характеристикой // Тр. Междунар. науч. конф., посв. 100-летию проф. С. Г. Крейна. — Воронеж, 2017. — С. 140–143.
7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.
8. di Bruno F. Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel // Quart. J. Pure Appl. Math. — 1857. — 1. — P. 359–360.
9. Radjabov N. Integral representation of the manifold solution for new class of the Volterra-type integral equations with boundary singularity in case when kernel contain logarithmic singularity and its power // J. Math. System Sci. — 2016. — 6. — P. 23–37.
10. Radjabov N. Volterra-type integral equations with super singular kernel // in: Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. — Springer-Verlag, 2017. — P. 312–319.

Мустафокулов Рахмонкул

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

E-mail: rmustaf@list.ru