Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Ю. Сапронова, С. Л. Царев, Об экстремальных функционалах Дирихле на многообразии двумерных сфероидов в $SO(3)$, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 192, 94–101

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-94-101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:18:55

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 192 (2021). С. 94–101
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-192-94-101

УДК 517.988

ОБ ЭКСТРЕМАЛЯХ ФУНКЦИОНАЛА ДИРИХЛЕ НА МНОГООБРАЗИИ ДВУМЕРНЫХ СФЕРОИДОВ В $SO(3)$

© 2021 г. Т. Ю. САПРОНОВА, С. Л. ЦАРЕВ

Аннотация. В статье изложен подход к приближенному вычислению экстремалей функционала Дирихле на банаховой группе Ли «сингулярных сфероидов», определенных на кольце координатной плоскости с центром в начале координат. Представленная методика основана на применении специального упрощения (функциональной редукции) уравнения экстремалей. Показано, что функциональная редукция позволяет получать оценку снизу значений индекса Морса изучаемых экстремалей. Использован аппарат гладких фредгольмовых функционалов с непрерывной симметрией на гладких банаховых многообразиях с римановым (гильбертовым) оснащением.

Ключевые слова: гладкий функционал, экстремаль, непрерывная симметрия, кодифференциал, редукция.

EXTREMALS OF THE DIRICHLET FUNCTIONAL ON THE MANIFOLD OF TWO-DIMENSIONAL SPHEROIDS IN $SO(3)$

© 2021 T. YU. SAPRONOVA, S. L. TSAREV

ABSTRACT. An approach to the approximate calculation of extremals of the Dirichlet functional on the Banach Lie group of “singular spheroids” defined in an annulus on the coordinate plane centered at the origin is presented. The technique presented is based on the use of a special simplification (functional reduction) of the equation of extremals. It is shown that the functional reduction allows one to obtain a lower estimate for the Morse index of extremals. We use smooth Fredholm functionals with continuous symmetries on smooth Banach manifolds with Riemannian (Hilbert) framings.

Keywords and phrases: smooth functional, extremal, continuous symmetry, codifferential, reduction.

AMS Subject Classification: 58E99

1. Гладкие функционалы с непрерывной симметрией на банаховых многообразиях. Ниже изложена теоретическая основа процедуры приближенного вычисления и анализа ветвей критических точек гладкого функционала Дирихле на банаховой группе Ли 2-мерных сфероидов в $SO(3)$. Используются методы теории гладких бесконечномерных (функциональных) многообразий (см. [2, 8, 11]).

1.1. Функционал Дирихле на группе 2-мерных сфероидов в $SO(3)$. Рассмотрим G -инвариантный функционал Дирихле

$$V(f) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{K}} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) \right|^2 \right) dt ds$$

на банаховой группе Ли $\mathcal{M}$ «сингулярных сфероидов»

$$\left\{ f \in C^{2+\gamma}(\mathcal{K}, \text{SO}(3)), f(\partial\mathcal{K}) = I \right\}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

где $\mathcal{K}$ — кольцо в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат, ограниченное окружностями радиусов r_1 и r_2 , $0 < r_1 \leq r \leq r_2 < \infty$.

Функционал Дирихле является фредгольмовым на $\mathcal{M}$. Это вытекает из классических результатов об обратимости оператора Лапласа в гильбертовских пространствах (при краевых условиях Дирихле; см. [2, 8]).

Данный пример дает некоторую иллюстрацию для общей теории. Кроме того, он представляет еще и самостоятельный интерес, как вариант упрощенной (редуцированной) двумерной модели для функционала Янга—Миллса (нелинейная σ -модель; см. [4, 6]) из теории калибровочных полей. Полезность изучения таких моделей на основе методов теории бесконечномерных функциональных многообразий отмечалась в ряде работ М. Атьи, К. Г. Таубса, А. Г. Сергеева и других специалистов (см. [6, 7] и литературу, указанную в этих источниках).

1.2. Первый и второй кодифференциалы. Для исследования двумерного функционала Дирихле здесь применена та же схема, что и в одномерном случае (см. [9–11]). Множество $\mathcal{M}$ рассматривается как подмногообразие в аффинном банаховом пространстве

$$E = \left\{ f: \mathcal{K} \rightarrow \text{Mat}(3, 3), f(\partial\mathcal{K}) = I, f \in C^{2+\gamma} \right\}.$$

Пространство E непрерывно вложено в банахово пространство непрерывных матричных функций

$$F = \left\{ f: \mathcal{K} \rightarrow \text{Mat}(3, 3), f \in C^{0+\gamma} \right\},$$

пространство F непрерывно вложено в гильбертово пространство $H = L_2(\mathcal{K}, \text{Mat}(3, 3))$,

$$T(E) = \left\{ h: \mathcal{K} \rightarrow \text{Mat}(3, 3), h(\partial\mathcal{K}) = 0, h \in C^{2+\gamma} \right\},$$

$$T_f(\mathcal{M}) = \left\{ h \mid f^{-1}h: \mathcal{K} \rightarrow \text{SO}(3), h \in C^{2+\gamma}, h(\partial\mathcal{K}) = 0 \right\},$$

$$\hat{T}_f(\mathcal{M}) = \left\{ h \mid f^{-1}h: \mathcal{K} \rightarrow \text{SO}(3), h \in C^{0+\gamma} \right\}.$$

Ортогональный проектор $\hat{\Pi}_f: F \rightarrow \hat{T}_f(\mathcal{M})$ действует, как и в одномерном случае (см. [9–11]) по формуле $h \mapsto \frac{1}{2}(h - fh^T f)$. Функционал V инвариантен относительно действия группы $G = \text{SO}(3)$ на H , заданного формулой $\mathcal{T}_g(f) = g^{-1}fg$.

Введем по аналогии с одномерным случаем пару угловых скоростей

$$\Omega_t(t, s) := f^{-1}(t, s) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t, s), \quad \Omega_s(t, s) := f^{-1}(t, s) \cdot \frac{\partial f}{\partial s}(t, s).$$

Для первого и второго кодифференциалов имеют место представления

$$\nabla^1 V(f) = -f \left(\frac{\partial \Omega_t}{\partial t} + \frac{\partial \Omega_s}{\partial s} \right),$$

$$\nabla^2 V(f) = -L_f \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + ad_{\Omega_t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} + ad_{\Omega_s} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \right) \cdot L_f^{-1}.$$

Так как оператор Лапласа

$$L_f \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \cdot L_f^{-1}$$

(главная часть второго кодифференциала) действует изоморфно из $T_f(\mathcal{M})$ на $\hat{T}_f(\mathcal{M})$, а остальные слагаемые дают вполне непрерывный оператор, то второй кодифференциал является фредгольмовым оператором нулевого индекса. Поиск всех экстремалей и вычисление их индексов Морса для двумерного функционала Дирихле связаны со значительными техническими трудностями,

поэтому здесь мы ограничились рассмотрением лишь некоторых экстремалей, получаемых посредством некоторой специальной редукции. Эта редукция позволяет также получить оценку снизу для индекса Морса.

1.3. Переход к полярным координатам. Для удобства в вычислениях перейдем к полярным координатам, совершив замену $t = r \cos \varphi$, $s = r \sin \varphi$, $0 < r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и положив $\bar{f}(r, \varphi) = f(t, s)$. В новых координатах функционал V выглядит следующим образом:

$$\bar{V}(\bar{f}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \left(r \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r, \varphi) \right|^2 + \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right|^2 \right) dr.$$

Условие на границе примет вид

$$\bar{f}(r_1, \varphi) = \bar{f}(r_2, \varphi) = I, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (1)$$

Отметим, что каждой точке $(t, 0)$, $r_1 \leq t \leq r_2$, в декартовой системе координат соответствует пара точек в полярной системе координат: $(r, 0)$ и $(r, 2\pi)$, $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Поскольку при $r \geq 0$ полярные координаты регулярно зависят от декартовых (якобиан отличен от нуля), то данная замена координат не изменяет тип гладкости сфероидов. Сфероид $\bar{f}$ естественно продолжается (с сохранением типа гладкости) на всю полосу $r_1 \leq r \leq r_2$, причем для него выполняются соотношение (условие 2π -периодичности по φ)

$$\bar{f}(r, \varphi) = \bar{f}(r, \varphi + 2\pi). \quad (2)$$

Естественно, что это же соотношение сохранится и для всех производных сфероида (все производные будут 2π -периодичными).

Для вычисления первого кодифференциала функционала $\bar{V}$ рассмотрим приращение значения $\bar{V}(\bar{f} + \bar{h})$, считая, что

$$\bar{f} = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad \bar{h} = h(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad f \in E, \quad h \in T(E).$$

Для h наряду с условием периодичности выполняется соотношение

$$\bar{h}(r_1, \varphi) = \bar{h}(r_2, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi, \quad (3)$$

вытекающее из граничного условия (1). Итак, имеем

$$\begin{aligned} \bar{V}(\bar{f} + \bar{h}) - \bar{V}(\bar{f}) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \left(r \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \varphi} \right|^2 - r \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}(r, \varphi) \right|^2 - \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right|^2 \right) dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \left(r \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}, \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \bar{h}}{\partial \varphi} \right) \right) dr + o(\|\bar{h}\|_E), \end{aligned}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение матриц. Таким образом, для первого дифференциала получено представление

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{f}}(\bar{f})\bar{h} = \left\langle r \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}, \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \bar{h}}{\partial \varphi} \right\rangle, \quad (4)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2([r_1, r_2] \times [0, 2\pi], \text{Mat}(3, 3))$. Используя формулу интегрирования по частям, с учетом граничного условия (3) получаем для первого слагаемого в выражении (4) следующее представление:

$$\left\langle r \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}, \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \right\rangle = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} \right) \right), \bar{h} \right) dr.$$

Преобразуя аналогичным образом второе слагаемое из (4) (с учетом 2π -периодичности $\bar{h}$ по φ), получим

$$\left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \bar{h}}{\partial \varphi} \right\rangle = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2}, \bar{h} \right) dr.$$

Окончательно получаем следующее представление для первого дифференциала:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{f}}(\bar{f}) \bar{h} = - \left\langle \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2}, \bar{h} \right\rangle.$$

Следовательно,

$$\text{grad } \bar{V}(\bar{f}) = - \left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \varphi^2} \right).$$

Для первого кодифференциала теперь получаем

$$\begin{aligned} \nabla^1 \bar{V}(\bar{f}) &= \hat{\Pi}(\text{grad } \bar{V}(\bar{f})) = \frac{1}{2} \left(\text{grad } \bar{V}(\bar{f}) - \bar{f}(\text{grad } \bar{V}(\bar{f}))^T \bar{f} \right) = \\ &= -\bar{f} \left(r \frac{\partial \Omega_r}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi) + \Omega_r \right), \end{aligned}$$

где

$$\Omega_r = \bar{f}^{-1} \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}, \quad \Omega_\varphi = \bar{f}^{-1} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}. \quad (5)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для первого кодифференциала функционала $\bar{V}$ имеет место представление

$$\nabla^1 \bar{V}(\bar{f}) = -\bar{f} \left(r \frac{\partial \Omega_r}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right),$$

где Ω_r и Ω_φ заданы формулами (5).

2. Поднятие сфероидов в S^3 . Вычисление экстремалей функционала $\bar{V}$ сводится к поиску решений уравнения

$$\nabla^1 \bar{V}(\bar{f}) = 0. \quad (6)$$

Для удобства изменим область значений сфероидов, перейдя от $\text{SO}(3)$ к сфере S^3 . Известно, что существует двулистное накрытие $P: S^3 \rightarrow \text{SO}(3)$, являющееся локальным диффеоморфизмом и обладающее свойством $P(-x) = P(x)$ (см. [4]). Отображение P строится следующим образом. В качестве $\mathbb{R}^4$ рассматривается линейная оболочка $\mathbb{H}$ матриц

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = -i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(последние три известны как *матрицы Паули*). Пространство $\mathbb{H}$ естественно отождествляется с телом кватернионов (см. [1, 6]). При таком задании пространства $\mathbb{R}^4$ сфера S^3 отождествляется с $\text{SU}(2)$. Группа $\text{SU}(2)$ действует на подпространстве $\mathbb{H}_1 = \text{Lin}\{e_1, e_2, e_3\}$ (мнимой части тела кватернионов) по закону

$$\mathcal{T}_g x = g^{-1} x g, \quad g \in \text{SU}(2), \quad x \in \mathbb{H}_1.$$

При этом множество $\{\mathcal{T}_g : g \in \text{SU}(2)\}$ совпадает с $\text{SO}(3)$. Таким образом, P — это отображение, переводящее каждый элемент $g \in \text{SU}(2)$ в оператор $\mathcal{T}_g \in \text{SO}(3)$. Нетрудно убедиться, что при этом каждый принадлежащий $S^3 = \text{SU}(2)$ элемент

$$g = \sum_{i=0}^3 a_i e_i$$

переводится отображением P в элемент f группы $SO(3)$ (естественно отождествленной с группой ортогональных преобразований подпространства кватернионов с нулевой «вещественной» частью), представимый в виде следующей матрицы оператора $\mathcal{T}_g$:

$$\begin{pmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1a_2 - a_0a_3) & 2(a_1a_3 + a_0a_2) \\ 2(a_1a_2 + a_0a_3) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2(a_2a_3 - a_0a_1) \\ 2(a_1a_3 - a_0a_2) & 2(a_2a_3 + a_0a_1) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Каждому сфероиду $f \in \mathcal{M}$ соответствуют такие два сфероида g_1 и g_2 , лежащие на S^3 , что $P \circ g_1 = P \circ g_2 = f$ (см. в [12] лемму «о накрывающем пути»). В силу того, что P — локальный диффеоморфизм, g_1 и g_2 являются $C^{2+\gamma}$ -гладкими. Таким образом, P порождает гладкое сублимсивное отображение $\hat{P}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, где

$$\mathcal{L} = \{g \in C^{2+\gamma}(\mathcal{K}, S^3), f(\partial\mathcal{K}) = \{\pm e_0\}\}.$$

Рассмотрим функционал

$$\bar{U}(\bar{f}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \left(r \left| \frac{\partial \bar{g}}{\partial r}(r, \varphi) \right|^2 + \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \bar{g}}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right|^2 \right) dr, \quad (8)$$

где

$$\bar{g}(r, \varphi) = g(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad g \in \mathcal{L}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad r_1 \leq r \leq r_2.$$

Пусть $g = g(s)$, $s \in (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, — гладкая параметрическая кривая на S^3 и $f = f(s)$ — соответствующая параметризация образа этой кривой при отображении P . Из представления (7) получаем с учетом равенств

$$g(s) = \sum_{i=0}^3 a_i(s) e_i, \quad \sum_{i=0}^3 a_i^2(s) = 1,$$

соотношение

$$\langle f'(s), f'(s) \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} \mathcal{T}_{g(s)}, \frac{d}{ds} \mathcal{T}_{g(s)} \right\rangle = 4 \langle g'(s), g'(s) \rangle.$$

Из этого соотношения непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Функционалы $\bar{U}$ и $\bar{V}$ связаны соотношением*

$$\bar{U}(\bar{g}) = \frac{1}{4} \bar{V}(\hat{P}(\bar{g})).$$

Из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Для производных функционалов $\bar{U}$ и $\bar{V}$ верно равенство*

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{g}} = \frac{1}{4} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{f}} \circ \frac{\partial \hat{P}}{\partial \bar{g}}.$$

Таким образом, каждой экстремали $\bar{g}$ функционала $\bar{U}$ соответствует экстремаль $\hat{P}(\bar{g})$ функционала $\bar{V}$, поэтому от исследования уравнения (6) можно перейти к поиску решений уравнения

$$\nabla^1 \bar{U}(\bar{g}) = 0. \quad (9)$$

Нетрудно установить, что первый кодифференциал сохраняет свой вид:

$$\nabla^1 \bar{U}(\bar{g}) = -\bar{g} \left(r \frac{\partial \hat{\Omega}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\Omega}_\varphi}{\partial \varphi} + \hat{\Omega}_r \right),$$

где

$$\hat{\Omega}_r = (\bar{g})^{-1} \frac{\partial \bar{g}}{\partial r}, \quad \hat{\Omega}_\varphi = (\bar{g})^{-1} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \varphi}.$$

В отличие от одномерного случая, в котором найдены все экстремали, в двумерном случае поиск общего решения уравнения (9) связан с преодолением весьма серьезных препятствий. Поэтому, чтобы найти хотя бы некоторые частные решения, будем искать экстремали вида

$$x(\alpha)(r, \varphi) = \cos \alpha(r)e_0 + \cos \varphi \sin \alpha(r)e_1 + \sin \varphi \sin \alpha(r)e_2, \quad (10)$$

где

$$\alpha \in C^{2+\gamma}([r_1, r_2], \mathbb{R}), \quad \alpha(r_1) = 2\pi m, \quad \alpha(r_2) = 2\pi n,$$

$m, n \in \mathbf{Z}$ (т.е. задано преобразование $\alpha \mapsto x(\alpha)$).

Первый кодифференциал функционала $\bar{U}(\bar{g})$ в точке x имеет следующий вид:

$$\nabla^1 \bar{U}(x) = -x(e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi) \left(\alpha'(r) + r\alpha''(r) - \frac{1}{r} \cos \alpha(r) \sin \alpha(r) \right).$$

Таким образом, поиск экстремалей при $x = \bar{g}$ сводится к поиску решений интегрируемого (см. [5]) уравнения (упрощенного модельного уравнения)

$$\alpha' + r\alpha'' - \frac{1}{r} \cos \alpha \sin \alpha = 0. \quad (11)$$

Каждое его решение (с учетом краевых условий) после подстановки в (10) дает экстремаль $\hat{x}_{m,n}$ функционала $\bar{U}$, а следовательно, и критическую орбиту

$$\left\{ S^{-1} \hat{P}(\hat{x}_{m,n}) S, \quad S \in \text{SO}(3) \right\}$$

для функционала $\bar{V}$.

3. Нижняя оценка индекса Морса. Поиск критических точек функционала Дирихле на многообразии двумерных петель (сфероидов) упрощается после редукции к функционалу (8). На основе этой же редукции можно получить оценку снизу для индексов Морса функционала Дирихле на критических петлях.

Теорема 4. Пусть α_0 — критическая точка функционала W , заданного на множестве

$$\mathcal{A} = \left\{ \alpha \in C^{2+\gamma}([r_1, r_2], \mathbb{R}) : \alpha(r_1) = 2\pi m, \alpha(r_2) = 2\pi n, \quad m, n \in \mathbf{Z} \right\}$$

соотношением $W(\alpha) = \bar{U}(x(\alpha))$, где $\bar{U}$ и $x(\alpha)$ определены формулами (8) и (10). Тогда точка $x(\alpha_0)$ является критической для функционала $\bar{U}$ и имеет место оценка

$$\text{Ind}(\bar{U}, x(\alpha_0)) \geq \text{Ind}(W, \alpha_0).$$

Доказательство. Подстановка выражения (10) в (8) приводит к следующей аналитической форме функционала W :

$$W(\alpha) = \pi \int_{r_1}^{r_2} \left(r(\alpha'(r))^2 + \frac{1}{r} \sin^2(\alpha(r)) \right) dr.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\text{grad } W(\alpha) = -2\pi \left(\alpha'(r) + r\alpha''(r) - \frac{1}{r} \cos \alpha(r) \sin \alpha(r) \right).$$

Таким образом, критические точки функционала W определяются уравнением (11). Следовательно, между множеством экстремалей функционала W и множеством экстремалей вида $\bar{g} = x(\alpha)$ функционала $\bar{U}$ существует взаимно однозначное соответствие (устанавливаемое отображением (10)). Обозначим через $\bar{U}_1$ сужение функционала $\bar{U}$ на многообразии X , являющееся образом отображения (10). Ясно, что

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}(\alpha) = \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x}(x(\alpha)) \circ \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha),$$

или, что эквивалентно,

$$\langle \text{grad}_\alpha W, \beta \rangle = \langle \text{grad}_{x(\alpha)} \bar{U}_1, h \rangle,$$

где $\beta \in T_\alpha(\mathcal{A})$, $h = \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha)\beta$. Из последней формулы получаем, что в критической точке α_0 функционала W имеет место следующее равенство (вторых дифференциалов):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2}(\alpha_0)(\beta, \beta) = \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial x^2}(x(\alpha_0))(h, h). \quad (12)$$

Индекс Морса функционала $\bar{U}_1$ в точке $x(\alpha_0)$ оценивает снизу, по построению, индекс Морса функционала $\bar{U}$ в этой же точке:

$$\text{Ind}(\bar{U}, x(\alpha_0)) \geq \text{Ind}(\bar{U}_1, x(\alpha_0)). \quad (13)$$

Так как оператор

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha_0): T_{\alpha_0}(\mathcal{A}) \rightarrow T_{x(\alpha_0)}(\bar{\mathcal{L}}),$$

где

$$\bar{\mathcal{L}} = \left\{ \bar{g} = g(r \cos \alpha, r \sin \alpha) : r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, g \in \mathcal{L} \right\},$$

является мономорфизмом и переводит $T_{\alpha_0}(\mathcal{A})$ на замкнутое подпространство пространства $T_{x(\alpha_0)}(\bar{\mathcal{L}})$, то $\frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha_0)$ действует изоморфно на свой образ. Поэтому в силу (12) индекс Морса функционала W в точке α_0 совпадает с индексом Морса функционала $\bar{U}_1$ в точке $x(\alpha_0)$, что и приводит, если учесть полученную ранее оценку (13), к завершению доказательства теоремы. $\square$

Если рассмотреть упрощенное модельное уравнение (11), например, при краевых условиях

$$\alpha(r_0) = 0, \quad \alpha(r_1) = \pi,$$

то левая часть уравнения (12) (при таких условиях) будет градиентом коэрцитивного функционала

$$\mathcal{U}(\alpha) = \int_{r_0}^{r_1} \left(r(\alpha')^2 - \frac{\cos(2\alpha)}{2r} \right) dr.$$

В этом случае имеется возможность применения нелинейного метода Галеркина—Ритца по схеме Ляпунова—Шмидта [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атья М. Геометрия и физика узлов. — М.: Мир, 1995.
2. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов, 2004.
3. Долженков А. А., Сапронов Ю. И., Сапронова Т. Ю. Нелокальный бифуркационный анализ некоторых конфигураций кирхгофова стержня// в кн.: Математические модели и операторные уравнения. — Воронеж: ВГУ, 2009. — С. 27–41.
4. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
5. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Точные решения. — М.: Физматлит, 1995.
6. Монастырский М. И. Топология калибровочных полей и конденсированных сред. — М.: ПАИМС, 1995.
7. Монополи: Топологические и вариационные методы. — М.: Мир, 1989.
8. Сапронов Ю. И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах// Усп. мат. наук. — 1996. — 51, № 1. — С. 101–132.
9. Сапронова Т. Ю. Бифуркации экстремалей из точек критической орбиты при разрушении непрерывной симметрии// Тр. мат. фак-та ВГУ. Нов. сер. — 1999. — 4. — С. 101–107.
10. Сапронова Т. Ю. О методе квазиинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов// в кн.: Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж: ВГУ, 2000. — С. 107–124.

11. Сапронова Т. Ю. О разрушении компактных критических орбит инвариантных фредгольмовых функционалов при несимметричных возмущениях// Тр. мат. фак-та ВГУ. Нов. сер. — 1997. — 2 (18). — С. 54–58.
12. Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.

Сапронова Татьяна Юрьевна
Воронежский государственный университет
E-mail: tsapr@mail.ru

Царев Сергей Львович
Воронежский государственный университет
E-mail: bobrikantus@gmail.com