Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Фролова, Математическое моделирование предельного напряженного состояния тонкого цилиндрического слоя из сжимаемого сыпучего материала, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 192, 125–130

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-125-130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 10:09:54

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 192 (2021). С. 125–130
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-192-125-130

УДК 517.933, 539.215

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ИЗ СЖИМАЕМОГО СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА

© 2021 г. О. А. ФРОЛОВА

Аннотация. Рассмотрена математическая модель предельного напряженного состояния тонкого вертикального цилиндрического слоя, заполненного сжимаемым сыпучим материалом, находящимся под действием вертикальной нагрузки. Получены выражения, определяющие напряженное состояние. Оценена зона пластического деформирования материала в зависимости от коэффициентов трения.

Ключевые слова: математическое моделирование, предельное напряженное состояние, сыпучий материал, осесимметричное деформирование.

MATHEMATICAL MODELING OF LIMITING STRESS STATES OF A THIN CYLINDRICAL LAYER OF COMPRESSIBLE BULK MATERIAL

© 2021 O. A. FROLOVA

ABSTRACT. A mathematical model of limiting stress states of a thin vertical cylindrical layer filled with compressible bulk material under the action of a vertical load is considered. Parameters of the stress state are calculated. The zone of plastic deformation of the material is estimated as a function of the friction coefficients.

Keywords and phrases: mathematical modeling, limiting stress state, bulk material, axisymmetric deformation.

AMS Subject Classification: 35Q74

1. Введение. Рассматривается математическая модель полупространства, заполненного связным сыпучим материалом, в цилиндрической системе координат r, θ, z . Предполагается, что внешние нагрузки и смещения обладают осевой симметрией, следовательно деформации и напряжения обладают свойством осесимметричности, т.е. не зависят от угла θ .

Для рассматриваемой математической модели компоненты тензора скорости деформации, учитывающие микроструктуру материала, имеют следующий вид (см. [1, 4, 9, 10]):

Рис. 1. Условия пластичности: 1 — условие пластичности Кулона—Мизеса, 2 — замкнутое условие пластичности.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial z^2 \partial r} \right), & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{U_r}{r} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial r} \right), \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 U_z}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} \right), & \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{\theta z} = 0, \\
 \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 U_r}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r \partial z^2} \right),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где h — параметр микроструктуры.

Математическая модель рассматриваемого напряженного состояния описывается двумя уравнениями равновесия и условием пластичности (см. [2, 3, 6–8]):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{2}} (I_{1\sigma})_{,z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\
 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{2}} (I_{1\sigma})_{,r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - \frac{1}{r\sqrt{2}} I_{1\sigma} &= -\gamma, \\
 \Phi = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{rz}^2 - \beta I_{1\sigma}^2 - 2\alpha Y I_{1\sigma} - Y^2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $\beta = 1/3 + \alpha^2 - f^2$, α — коэффициент внутреннего трения, f — коэффициент трения качения, γ — сила тяжести, Y — сцепление.

Наличие микроструктуры в представительном элементе рассматриваемой модели предполагает возможность объемной пластической деформации за счет сдвига, и тем самым имеет место зависимость предельного касательного напряженного состояния от давления. Таким образом, представляется оправданным вид замкнутого условия пластичности (3) в пространстве главных напряжений. Из условия (3) следует ограничение на определение области существования условия пластичности на оси $I_{1\sigma}$

$$f \leq \left(\alpha + \frac{Y}{I_{1\sigma}} \right),$$

которое позволяет описать множество условий пластичности в плоскости инвариант тензора напряжения (рис. 1).

На рис. 1 представлено множество условий пластичности: 1 — условие пластичности Кулона—Мизеса; 2 — замкнутое условие пластичности. Условие пластичности в пространстве второго инварианта симметричного тензора напряжений и первого инварианта тензора напряжений представляют собой семейства: гипербол при $\alpha > f$, парабол при $\alpha = f$ или эллипсов при $\alpha < f$. При условии малости коэффициента трения качения $f \approx 0$ условие пластичности (3) переходит в условие пластичности Мизеса—Шлейхера, которое при малом угле внутреннего трения $\alpha \approx 0$ переходит в условие пластичности Мизеса.

2. Построение математической модели напряженного состояния деформирования тонкого цилиндрического слоя. Для рассматриваемой математической модели деформирования цилиндрического слоя из сжимаемого сыпучего материала компоненты перемещений удовлетворяют условиям $U_r = 0$, $U_z = U_z(z)$, что кинематически соответствует деформированию тонкого вертикального цилиндрического стержня под действием вертикальных нагрузок.

С учетом сделанного предположения компоненты тензора скорости деформации (1) примут вид

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{rz} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 U_z}{\partial z^3}. \quad (4)$$

Система уравнений (2)–(3), описывающая математическую модель напряженного состояния, содержит три уравнения и четыре неизвестные, т.е. является незамкнутой. Для замыкания системы уравнений в напряжениях воспользуемся ассоциированным законом пластического течения, который связывает скорость деформации и напряженное состояние (см. [2, 6]):

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (5)$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Дифференцируя условия пластичности (3) с учетом (4), (5), получим

$$2\lambda(\sigma_{rr} - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y) = 0, \quad (6)$$

$$2\lambda(\sigma_{\theta\theta} - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y) = 0, \quad (7)$$

$$2\lambda(\sigma_{zz} - \beta I_{1\sigma} - \alpha Y) = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 U_z}{\partial z^3}, \quad (8)$$

$$4\lambda\sigma_{rz} = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что $\sigma_{rz} = 0$. Из уравнений (6) и (7) следует, что $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$.

Так как напряженное состояние зависит только от осевой координаты z и $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, то уравнения равновесия (2) и условие пластичности (3) примут вид

$$\frac{f}{\sqrt{2}}(I_{1\sigma})_{,z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{f}{r\sqrt{2}} I_{1\sigma} = -\gamma, \quad (10)$$

$$\Phi = 2\sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 - \beta I_{1\sigma}^2 - 2\alpha Y I_{1\sigma} - Y^2 = 0. \quad (11)$$

Из первого уравнения (10) следует, что первый инвариант тензора напряжений постоянен, т.е. $I_{1\sigma} = C_1 = \text{const}$; тогда из второго уравнения (10) получим

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{f C_1}{r\sqrt{2}} - \gamma.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим выражение для осевой компоненты напряжения:

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{f C_1}{r\sqrt{2}} - \gamma \right) z + C_2. \quad (12)$$

Предполагается, что к цилиндрическому слою приложена вертикальная нагрузка p_0 , удовлетворяющая начальному напряженному состоянию $\sigma_{zz}^0, \sigma_{rr}^0, \sigma_{\theta\theta}^0$.

На границе $z = 0$ из выражения (12) получим $C_2 = \sigma_{zz}^0 = -p_0$.

Рис. 2. Напряженное состояние для случаев: (а) сжатия, (б) растяжения.

Первый инвариант напряжений, соответствующий начальному напряженному состоянию, имеет вид

$$I_{1\sigma} = C_1 = \sigma_{rr}^0 + \sigma_{\theta\theta}^0 + \sigma_{zz}^0 = -3p_0. \quad (13)$$

Выражение (12) с учетом C_2 примет вид

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{-3fp_0}{r\sqrt{2}} - \gamma \right) z - p_0. \quad (14)$$

Так как $I_{1\sigma} = C_1 = -3p_0$, то

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -p_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{3fp_0}{r\sqrt{2}} + \gamma \right) z. \quad (15)$$

Уравнения (14), (15) описывают математическую модель напряженного состояния (рис. 2).

3. Оценка зоны пластического деформирования. Рассмотрим условие пластического деформирования материала (11). С учетом выражения первого инварианта тензора напряжений (13) и выражений для компонент напряжения (14)–(15), получим

$$\Phi = \left(\frac{Az}{r} + \gamma z - 2p_0 \right)^2 + 2 \left(\frac{Az}{r} + \gamma z + p_0 \right)^2 - 18\beta p_0^2 + 12\alpha Y p_0 - 2Y^2 = 0, \quad A = \frac{3fp_0}{\sqrt{2}}. \quad (16)$$

Решив уравнение (16) относительно z , получим выражение для оценки зоны пластического деформирования материала

$$z = \pm \frac{Br}{A + \gamma r},$$

Рис. 3. Зона пластического деформирования материала.

где

$$B^2 = 6p_0^2(\alpha^2 - f^2) - 4\alpha Y p_0 + \frac{2}{3}Y^2.$$

Рассмотрим выражение для B . Разделив его на Y^2 и введя обозначение $k = p_0/Y$, получим

$$3k^2(\alpha^2 - f^2) - 2\alpha k + \frac{1}{3} \geq 0.$$

Взяв в последнем неравенстве знак $=$, получим

$$k_{1,2} = \frac{\alpha \pm f}{3(\alpha^2 - f^2)}. \quad (17)$$

Выражение (17) позволяет оценить зону пластического деформирования материала для случаев сжатия и растяжения.

4. Выводы. Из рис. 2 следует, что напряжения уменьшаются с увеличением радиуса цилиндрического слоя. Имеет место линейная зависимость осевых напряжений вдоль оси z за счет собственного веса. При этом выполняется условие

$$\sigma_{zz} + p_0 = -2(\sigma_{rr} + p_0) = -2(\sigma_{\theta\theta} + p_0).$$

Полученный вид напряженного состояния соответствует классической технической гипотезе распределения напряжения в грунтах (см. [5]).

При принятых кинематических условиях параметр микроструктуры h не влияет на напряженное состояние.

На рис. 3 представлено схематическое изображение зоны пластического деформирования материала в зависимости от начального давления. Если $\frac{p_0}{Y} > \frac{1}{3(f + \alpha)}$, происходит сжатие материала, если $\frac{p_0}{Y} < -\frac{1}{3(f - \alpha)}$ — то растяжение. Таким образом, построенная математическая модель предельного напряженного состояния тонкого вертикального цилиндрического слоя, заполненного сжимаемым сыпучим материалом, находящегося под действием вертикальной нагрузки, позволила оценить зону пластического деформирования материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быкова М. И., Вервейко Н. Д., Сумец П. П., Шаликина С. А. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры. — Воронеж: ВГУ, 2010.
2. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. — Владивосток: Дальнаука, 1998.
3. Вервейко Н. Д., Фролов А. Л. Кинематика предельного осесимметричного состояния сыпучих материалов со сцеплением // в кн.: Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород / Сб. статей к 75-летию Е. И. Шемякина. — М.: Физматлит, 2006. — С. 107–114.
4. Вервейко Н. Д., Фролова О. А. Влияние характерного размера представительного элемента сыпучей среды на осесимметричное напряженное состояние // Сб. тр. Междунар. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». — Воронеж, 2011. — С. 106–109.
5. Вязлов С. С. Реологические основы механики грунтов. — М.: Высшая школа, 1978.
6. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. — М.: Наука, 1966.

7. *Соколовский В. В.* Статика сыпучей среды. — М.: Наука, 1990.
8. *Фролов А. Л.* Осесимметричное деформирование микрополярных связных сыпучих материалов// Мат. школы-семинара, посв. 70-летию проф. Д. Д. Ивлева. — Воронеж, 2000. — С. 474–480.
9. *Фролов А. Л., Фролова О. А.* Осесимметричное напряженное состояние связного сыпучего материала с учетом микроструктуры// Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та. Сер. Мех. предел. сост. — 2013. — 1, № 15. — С. 214–221.
10. *Eringen A. C.* Theory of micropolar fluid// J. Math. Mech. — 1966. — 1, № 16. — P. 1–16.

Фролова Оксана Александровна

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил

«Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж

E-mail: OksanaFrola@yandex.ru