Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Чернов, О сохранении глобальной разрешимости операторного уравнения первого рода с управляемой добавочной нелинейностью, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 192, 131–141

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-131-141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:23:11

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 192 (2021). С. 131–141
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-192-131-141

УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

О СОХРАНЕНИИ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С УПРАВЛЯЕМОЙ ДОБАВОЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2021 г. А. В. ЧЕРНОВ

Аннотация. Для задачи Коши, связанной с эволюционным операторным уравнением первого рода, дополненным управляемым слагаемым, нелинейно зависящим от фазовой переменной, в банаховом пространстве, получены условия сохранения однозначной глобальной разрешимости при малых вариациях управления (иначе говоря, условия устойчивости существования глобальных решений), а также равномерная оценка приращения решений по норме пространства. В качестве примера рассматривается начально-краевая задача, связанная с системой уравнений Осколкова.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, операторное уравнение, банахово пространство, управляемая нелинейность, сохранение однозначной глобальной разрешимости, устойчивость существования глобальных решений, система уравнений Осколкова.

PRESERVATION OF THE GLOBAL SOLVABILITY OF A FIRST-KIND OPERATOR EQUATION WITH CONTROLLED ADDITIONAL NONLINEARITY

© 2021 A. V. CHERNOV

ABSTRACT. For the Cauchy problem associated with a first-kind evolutionary operator equation in a Banach space supplemented by a controlled term that depends nonlinearly on the phase variable, we obtain conditions for the preservation of unique global solvability under small variations of control (in other words, conditions for the stability of the existence of global solutions) and also a uniform estimate of the increment of solutions with respect to the norm of the space. As an example, we consider the initial-boundary-value problem for the Oskolkov system.

Keywords and phrases: evolution equation, operator equation, Banach space, controlled nonlinearity, preservation of unique global solvability, stability of the existence of global solutions, Oskolkov's system of equations.

AMS Subject Classification: 47J05, 47J35, 47N10

1. Введение. В данной статье для задачи Коши, связанной с эволюционным (вообще говоря, не обязательно дифференциальным) операторным уравнением первого рода, дополненным управляемым слагаемым, нелинейно зависящим от фазовой переменной, в банаховом пространстве, получены условия *устойчивости существования глобальных решений* (УСГР), иначе говоря, сохранения однозначной глобальной разрешимости при малых вариациях управления. Частным случаем такого уравнения (при фиксированном приращении f) является, например, операторное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве X с правой частью $f \in L_2([0; T]; X)$ (см. [1, гл. V, § 1]).

Проблема УСГР актуальна при выводе необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления, вычислении градиентов функционалов в таких задачах и обосновании соответствующих численных методов оптимизации. В случае отсутствия информации об УСГР при варьировании оптимального управления, в частности, при выводе необходимых условий оптимальности обычно переходят к рассмотрению пар «управление — состояние» (см., например, [4], [11, гл. 2]). В результате уравнение состояния приходится учитывать как дополнительное фазовое ограничение особого типа, что приводит к определенным техническим сложностям. Укажем, например, метод адаптированного штрафа, предложенный в [4]. В [4] приведен ряд нерешенных задач, т.е. управляемых распределенных систем, для которых не удалось вывести необходимые условия оптимальности с помощью метода адаптированного штрафа. Между тем, в [8, гл. 5, § 2, п. 2], [12, гл. 3, §1] представлены некоторые задачи из этого ряда, необходимые условия оптимальности в которых удалось вывести с помощью использования теории УСГР. Дело в том, что при наличии информации об УСГР можно использовать альтернативный подход, основанный на рассмотрении функционалов оптимизационной задачи как функций, зависящих только от управлений, опираясь (при исследовании различных вопросов) на соответствующие теоремы функционального анализа или их обобщения (см., например, [6, 13]). В частности, можно использовать технику параметризации управления для численной оптимизации управляемых распределенных систем (см. [13]). Таким образом, наличие УСГР открывает дополнительное окно возможностей при выводе необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления и их численном решении.

Отметим, что нарушение глобальной разрешимости эволюционной управляемой системы, связанной с дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением, весьма вероятно, когда порядок роста правой части соответствующего уравнения по фазовой переменной превышает линейный (см. на этот счет показательные примеры в [3, 6], [7, введение, п. 2]). При наличии нелинейности в дифференциальном операторе эта ситуация усугубляется (см., например, [25]).

При исследовании различных задач управления (помимо простого постулирования глобальной разрешимости управляемой системы для всех управлений из заданного множества) различными исследователями используются, как правило, некоторые общие (основанные на теоремах Минти—Браудера, Лакса—Мильграма, Шаудера и т. д., см., например, [30]) или специфические результаты о достаточных условиях однозначной глобальной разрешимости, уже известные из теории дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений конкретного вида с неуправляемой правой частью, нелинейно зависящей от переменной состояния. Условиям глобальной разрешимости для уравнений с неуправляемой правой частью посвящена достаточно обширная литература (см., например, [5, 17–24, 26–29, 31–33]). Между тем, при исследовании глобальной разрешимости начально-краевых задач с нелинейной правой частью, зависящей от управления, имеет смысл использовать информацию о факте и характере этой зависимости. В частности, может оказаться так, что наличие глобальной разрешимости или ее отсутствие существенным образом зависит от того, насколько широко варьируются управляемые параметры, входящие в нелинейную правую часть уравнения. Во многих ситуациях удается доказать, что если, например, система глобально разрешима для некоторого фиксированного управления, то она сохраняет это свойство для всех малых (в том или ином смысле) вариациях этого управления (при том, что для каких-то допустимых управлений глобальной разрешимости может и не быть). Это свойство в совокупности со свойством единственности решения как раз и называется устойчивостью существования глобальных решений (или, более общо, сохранением однозначной глобальной разрешимости; см., например, обзоры в [9, 10, 14, 15]).

Ранее при исследовании вопроса УСГР управляемых распределенных систем использовался метод, основанный на сведении таких систем к вольтеррову функционально-операторному (операторному) уравнению в лебеговом (или, более общо, в банаховом идеальном) пространстве измеримых функций, с последующим применением соответствующих абстрактных результатов. Подробнее об истории развития метода вольтерровых операторных уравнений для получения условий УСГР управляемых распределенных систем см. уже упомянутые обзоры [9, 10, 14, 15]. В [15] для начально-краевой задачи, связанной с управляемым полулинейным уравнением глобальной

электрической цепи, получен признак УСГР, использующий ту же идею сведения к вольтерровому функционально-операторному уравнению (типа Гаммерштейна). Принципиальное отличие от прежних результатов состояло в том, что указанная задача не допускала сведения к абстрактному уравнению в банаховом идеальном пространстве; уравнение рассматривалось в пространстве вида $\mathbf{C}([0, T]; X)$ с некоторым банаховым пространством X функций, определенных на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Вместе с тем, методика [15] применима лишь к полулинейным уравнениям. В [16] доказан признак тотального (по всем допустимым управлениям) сохранения глобальной разрешимости эволюционного операторного уравнения I рода общего вида с управляемой добавочной нелинейностью в банаховом пространстве. Методика, предложенная в [16], применима в том числе и к существенно нелинейным уравнениям в частных производных эволюционного типа. Суть признака, полученного в [16], состояла в том, что тотальное сохранение глобальной разрешимости указанного уравнения обеспечивалась за счет предположения о глобальной разрешимости некоторого мажорантного (равномерно по всем управлениям) интегрального уравнения относительно неизвестной функции, зависящей лишь от переменной времени. При этом само мажорантное уравнение строилось на основе постулируемых оценок управляемой добавочной нелинейности. Далее представляется результат распространения методики работы [15] получения условий УСГР на эволюционное операторное уравнение первого рода с управляемой добавочной нелинейностью (вида [16]) в банаховом пространстве. Разумеется, УСГР устанавливается здесь при существенно более слабых требованиях по сравнению с требованиями работы [16], обеспечивающими тотальное сохранение глобальной разрешимости. Путем сведения к указанному уравнению удастся, в частности, получить признак УСГР системы уравнений Осколкова (с нелинейным дифференциальным оператором) с управляемой правой частью, нелинейно зависящей от фазовой переменной.

2. Формулировка основного результата. Пусть X, Y — вещественные банаховы пространства, $T > 0$, $q \in [1, \infty)$ — заданные константы, $\mathcal{M}[0; T]$ — некоторое множество, содержащее пространство $L_q([0; T]; Y)$; $W[0; T] \subset \mathbf{C}([0; T]; X)$; $\mathcal{F}: W[0; T] \rightarrow \mathcal{M}[0; T]$ — заданный оператор, обладающий свойством вольтерровости: из равенства $x(t) = y(t)$ для п. в. $t \in [0; \tau]$, $\tau \in [0; T]$, следует, что $(\mathcal{F}x)(t) = (\mathcal{F}y)(t)$ для п. в. $t \in [0; \tau]$. Прежде всего, для произвольных $a \in X$, $z \in L_q([0; T]; Y)$ рассмотрим эволюционное операторное уравнение первого рода:

$$(\mathcal{F}\varphi, \varphi(0)) = (z, a), \quad \varphi \in W[0; T]. \quad (1)$$

Вольтерровость оператора позволяет рассматривать локальные, на $[0; \tau]$, при $\tau \in [0; T]$, решения задачи (1). Ясно, что для решения $\varphi(t)$ его сужение на $[0; \tau]$ является локальным на этом отрезке решением уравнения (1).

Далее будем предполагать, что элемент $a \in X$ произвольно фиксирован и выполнены следующие условия.

- (G₁) Для всякого $z \in L_q([0; T]; Y)$ уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi = \varphi[z]$, причем всякое локальное решение единственно.
- (G₂) Существуют такие строго возрастающие функции $\beta_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $i = 0, 1$, $\beta_1(0) = 0$, и функция $\nu_1(t, M): [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная по (t, M) и не убывающая по M , что для всех $z, g \in L_q([0; T]; Y)$, $t \in [0; T]$ и для числа $M \geq \max\{\|z\|_{L_q([0; t]; Y)}, \|g\|_{L_q([0; t]; Y)}\}$ имеем

$$\beta_0\left(\|\varphi[z](t) - \varphi[g](t)\|_X\right) \leq \nu_1(t, M) \int_0^t \beta_1(\|z(s) - g(s)\|_Y) ds.$$

Замечание 1. В случае линейного уравнения естественно ожидать выполнения оценки

$$\|\varphi[z] - \varphi[g]\|_{\mathbf{C}([0; t]; X)} \leq L\|z - g\|_{L_q([0; t]; Y)},$$

т.е.

$$\|\varphi[z](t) - \varphi[g](t)\|_X^q \leq L^q \int_0^t \|z(s) - g(s)\|_Y^q ds,$$

$t \in [0; T]$. А это есть условие $(\mathbf{G}_2)$ при $\beta_0(\tau) = \tau^q$, $\beta_1(\tau) = (L\tau)^q$, $\nu_1(t, M) = 1$. Для нелинейного уравнения оценка может быть более сложной. Обычно получение подобных оценок является промежуточным этапом при доказательстве единственности решения.

Теперь в правую часть добавим зависимость от фазовой переменной, а также от управления. А именно, будем рассматривать управляемый аналог уравнения (1):

$$(\mathcal{F}\varphi, \varphi(0)) = (f[u](\cdot, \varphi), a), \quad \varphi \in W[0; T]. \quad (2)$$

Здесь $u \in U$ — управление из, вообще говоря, произвольного множества U в линейном нормированном пространстве $\mathcal{U}$, и предполагается, что для каждого $u \in U$ определена функция $f[u](t, \xi): [0; T] \times X \rightarrow Y$, обладающая следующими свойствами:

- (F₁) Для всех $u \in U$, $x \in \mathbf{C}([0; T]; X)$ функция $t \rightarrow f[u](t, x(t))$, определяемая для $t \in [0; T]$, принадлежит пространству $L_q([0; T]; Y)$.
(F₂) Существует функция $\mathcal{N}_0(t, M): [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающая по M и такая, что $\mathcal{N}_0(\cdot, M) \in L_q[0; T]$ для всякого $M \geq 0$, обеспечивающая оценку

$$\|f[u](t, \xi)\|_Y \leq \mathcal{N}_0(t, M),$$

для всех $t \in [0; T]$, $M > 0$, $\xi \in X$, $\|\xi\| \leq M$, $u \in U$.

- (F₃) Существуют число $\sigma \in [0; 1]$ и функция $\mathcal{N}_1(t, M): [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающая по M и суммируемая по Лебегу по t такие, что

$$\beta_1\left(\|f[u](t, \xi) - f[v](t, \eta)\|_Y\right) \leq \mathcal{N}_1(t, M)\beta_0\left(\sigma[\|\xi - \eta\|_X + \|u - v\|_U]\right)$$

для всех $t \in [0; T]$, $M > 0$, $\xi, \eta \in X$, $\|\xi\|, \|\eta\| \leq M$, $u, v \in U$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия $(\mathbf{G}_1)$ – $(\mathbf{G}_2)$, $(\mathbf{F}_1)$ – $(\mathbf{F}_3)$, и, кроме того, функция β_0 обладает следующим свойством:

$$\beta_0(s_1) + \beta_0(s_2) \leq \beta_0(s_1 + s_2) \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+. \quad (3)$$

Предположим, что управлению $u = \bar{u} \in U$ отвечает глобальное решение $\varphi = \bar{\varphi} \in W[0; T]$ уравнения (2). Тогда существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $C > 0$, что для каждого $u \in U$, $\|u - \bar{u}\|_U \leq \varepsilon$, существует единственное глобальное решение $\varphi \in W[0; T]$ уравнения (2), и, более того, справедлива оценка

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{\mathbf{C}([0; T]; X)} \leq C\|u - \bar{u}\|_U.$$

Доказательство теоремы 1 см. в разделе 3.

3. Доказательство основного результата — теоремы 1. Пусть число $M > 0$ произвольно фиксировано,

$$M_1 = M + \|\bar{\varphi}\|_{\mathbf{C}([0; T]; X)}; \quad M_2 = \|\mathcal{N}_0(\cdot, M_1)\|_{L_q[0; T]}; \quad \bar{\nu}_1 = \max_{t \in [0; T]} \nu_1(t, M_2).$$

Пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, подберем число $\delta > 0$ так, чтобы

$$\bar{\nu}_1 \int_h \mathcal{N}_1(t, M_1) dt \leq 1 \quad (4)$$

при любом измеримом $h \subset [0; T]$, $\text{mes } h \leq \delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0; T]$ вида $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$, $|t_i - t_{i-1}| \leq \delta$, $i = \overline{1, k}$. Определим числовую последовательность

$$C_i = \frac{1}{1 - \sigma} [C_{i-1} + i\sigma] \Leftrightarrow \sigma[C_i + i] = C_i - C_{i-1}, \quad i = \overline{1, k}; \quad C_0 = 0.$$

Выберем произвольно $u \in U$: $0 < \|u - \bar{u}\|_U \leq M$, $C_k\|u - \bar{u}\|_U \leq M$, и покажем, что задача (2) имеет решение. Единственность решения следует из [16, теорема 1.1].

Будем рассматривать локальные аналоги задачи (2):

$$(\mathcal{F}\varphi)(t) = f[u](t, \varphi(t)), \quad t \in [0; t_j]; \quad \varphi(0) = a, \quad (\mathcal{P}_j)$$

$j = \overline{0, k}$. При $j = 0$ задача $(\mathcal{P}_j)$ имеет очевидное решение $\varphi = \varphi_0 = a$. Разрешимость задач $(\mathcal{P}_j)$ будем доказывать индукцией по $j = \overline{1, k}$.

Предположим, мы уже доказали существование функции $\varphi = \varphi_{i-1} \in W[0; t_{i-1}]$, являющейся решением задачи $(\mathcal{P}_j)$ при $j = i - 1$ и удовлетворяющей оценке

$$\|\varphi_{i-1}(t) - \overline{\varphi}(t)\|_X \leq (C_j - C_{j-1})\|u - \overline{u}\|_{\mathcal{U}} \quad \forall t \in [t_{j-1}; t_j], \quad j = \overline{1, i-1}. \quad (5)$$

Исходя из этого предположения, докажем существование функции $\varphi = \varphi_i \in W[0; t_i]$, являющейся решением задачи $(\mathcal{P}_j)$ при $j = i$ и удовлетворяющей оценке

$$\|\varphi_i(t) - \overline{\varphi}(t)\|_X \leq (C_j - C_{j-1})\|u - \overline{u}\|_{\mathcal{U}}, \quad \forall t \in [t_{j-1}; t_j], \quad j = \overline{1, i}. \quad (6)$$

Определим Ψ_i как множество всех $\psi \in \mathbf{C}([0; t_i]; X)$, удовлетворяющих условиям

$$\|\psi(t) - \overline{\varphi}(t)\|_X \leq (C_i - C_{i-1})\|u - \overline{u}\|_{\mathcal{U}} \quad \forall t \in [t_{i-1}; t_i], \quad (7)$$

$$\psi|_{t \in [0; t_{i-1}]} \equiv \varphi_{i-1}. \quad (8)$$

При $i = 1$ имеем $\Psi_i \neq \emptyset$, так как $\psi = \overline{\varphi}|_{t \in [0; t_i]} \in \Psi_1$. Покажем, что $\Psi_i \neq \emptyset$ также и при $i > 1$.

Определим $\eta \in W[0; t_i]$ как решение задачи

$$(\mathcal{F}\eta)(t) = z(t), \quad t \in [0; t_i]; \quad \eta(0) = a, \quad (9)$$

при $z(t) = f[u](t, \xi(t))$, где

$$\xi(t) = \begin{cases} \varphi_{i-1}(t), & t \in [0; t_{i-1}], \\ \omega(t)\varphi_{i-1}(t_{i-1}) + (1 - \omega(t))\overline{\varphi}(t), & t \in (t_{i-1}; t_i], \end{cases}$$

где $\omega(t)$ — произвольная непрерывная функция, заданная на отрезке $[t_{i-1}; t_i]$, принимающая значения в $[0; 1]$ и такая, что $\omega(t_{i-1}) = 1$, $\omega(t) \equiv 0$ при $t > \tau$, а параметр $\tau \in (t_{i-1}; t_i)$ определяется из условия:

$$\overline{\nu}_1 \beta_0 (2\sigma M_1 + M) \int_{t_{i-1}}^{\tau} \mathcal{N}_1(s, M_1) ds \leq \beta_0 (\sigma [C_i - C_{i-1}] \|u - \overline{u}\|_{\mathcal{U}}). \quad (10)$$

Ясно, что $\xi \in \mathbf{C}([0; t_i]; X)$. Однозначная разрешимость задачи (9) на $[0; t_i]$ следует из условия $(\mathbf{G}_1)$.

По предположению индукции, на $[0; t_{i-1}]$ уравнение (9) имеет локальное решение $\eta(t) = \varphi_{i-1}(t)$, и по условию $(\mathbf{G}_1)$, это решение единственно. Таким образом, функция $\eta(t)$ удовлетворяет условию вида (8).

При $t \in [0; t_i]$, пользуясь условием $(\mathbf{F}_2)$, получим оценку

$$\|f[\overline{u}](t, \overline{\varphi}(t))\|_Y \leq \mathcal{N}_0(t, M_1),$$

откуда

$$\|f[\overline{u}](\cdot, \overline{\varphi}(\cdot))\|_{L_q([0; t_i]; Y)} \leq \|\mathcal{N}_0(\cdot, M_1)\|_{L_q[0; T]} = M_2.$$

При этом, согласно предположению индукции,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{i-1}(t_{i-1})\|_X &\leq \|\overline{\varphi}(t_{i-1})\|_X + \|\varphi_{i-1}(t_{i-1}) - \overline{\varphi}(t_{i-1})\|_X \leq \\ &\leq \|\overline{\varphi}\| + (C_{i-1} - C_{i-2})\|u - \overline{u}\| \leq \|\overline{\varphi}\| + C_k \|u - \overline{u}\| \leq \|\overline{\varphi}\| + M = M_1. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что $\|\xi(t)\|_X \leq M_1 \quad \forall t \in [0; t_i]$.

Таким образом, согласно условию $(\mathbf{F}_2)$,

$$\|f[u](\cdot, \xi(\cdot))\|_{L_q([0; t_i]; Y)} \leq M_2.$$

Выберем произвольно $t \in [t_{i-1}; t_i]$. Пользуясь условиями $(\mathbf{G}_2)$, $(\mathbf{F}_3)$, получаем:

$$\beta_0 (\|\eta(t) - \overline{\varphi}(t)\|_X) \leq \nu_1(t, M_2) \int_0^t \beta_1 (\|f[u](s, \xi(s)) - f[\overline{u}](s, \overline{\varphi}(s))\|_Y) ds \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bar{\nu}_1 \int_0^{t_i} \mathcal{N}_1(s, M_1) \beta_0(\sigma[\|\xi(s) - \bar{\varphi}(s)\|_X + \|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}]) ds \leq \\
&\leq \bar{\nu}_1 \sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathcal{N}_1(s, M_1) \beta_0(\sigma[\|\varphi_{i-1}(s) - \bar{\varphi}(s)\|_X + \|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}]) ds + \\
&\quad + \bar{\nu}_1 \int_{t_{i-1}}^{\tau} \mathcal{N}_1(s, M_1) \beta_0(\sigma[2M_1 + M]) ds + \bar{\nu}_1 \int_{\tau}^{t_i} \mathcal{N}_1(s, M_1) \beta_0(\sigma\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}) ds.
\end{aligned}$$

Пользуясь предположением индукции и условиями (4), (10), получаем:

$$\beta_0(\|\eta(t) - \bar{\varphi}(t)\|_X) \leq \sum_{j=1}^{i-1} \beta_0(\sigma[C_j - C_{j-1} + 1]\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}) + \beta_0(\sigma[C_i - C_{i-1}]\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}) + \beta_0(\sigma\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}).$$

Пользуясь условием (3), получаем оценку

$$\beta_0(\|\eta(t) - \bar{\varphi}(t)\|_X) \leq \beta_0\left(\sigma \sum_{j=1}^i [C_j - C_{j-1} + 1]\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}\right),$$

откуда

$$\|\eta(t) - \bar{\varphi}(t)\|_X \leq \sigma[C_i + i]\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}} = (C_i - C_{i-1})\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}},$$

следовательно, η удовлетворяет условию вида (7). Таким образом, $\eta \in \Psi_i$, т.е. $\Psi_i \neq \emptyset$.

Определим оператор $F_i: \Psi_i \rightarrow \mathbf{C}([0; t_i]; X)$ формулой $F_i[\psi] = \eta$, где $\eta \in W[0; t_i]$ — решение задачи Коши вида (9) при $z(t) = f[u](t, \psi(t))$.

Выберем произвольно $\psi \in \Psi_i$ и исследуем $\eta = F_i[\psi]$. Из (8) следует, что $\eta(t) = \varphi_{i-1}(t) \forall t \in [0; t_{i-1}]$, так как $\varphi_{i-1}(t)$ — локальное решение задачи (2) на $[0; t_{i-1}]$. Таким образом, η удовлетворяет условию вида (8).

При $t \in [0; t_i]$, пользуясь условием (7), получаем оценку

$$\|\psi(t)\|_X \leq \|\bar{\varphi}(t)\|_X + \|\psi(t) - \bar{\varphi}(t)\|_X \leq \|\bar{\varphi}\| + C_k\|u - \bar{u}\| \leq M_1.$$

Тогда согласно условию (**F**₂)

$$\|f[u](\cdot, \psi(\cdot))\|_{L_q([0; t_i]; Y)} \leq M_2.$$

Выберем произвольно $t \in [t_{i-1}; t_i]$. Пользуясь условиями (**G**₂), (**F**₃), (7), (8), имеем

$$\begin{aligned}
\beta_0(\|\eta(t) - \bar{\varphi}(t)\|_X) &\leq \nu_1(t, M_2) \int_0^t \beta_1(\|f[u](s, \psi(s)) - f[\bar{u}](s, \bar{\varphi}(s))\|_Y) ds \leq \\
&\leq \bar{\nu}_1 \int_0^{t_i} \mathcal{N}_1(s, M_1) \beta_0(\sigma[\|\psi(s) - \bar{\varphi}(s)\|_X + \|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}]) ds \leq \\
&\leq \bar{\nu}_1 \sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathcal{N}_1(s, M_1) \beta_0(\sigma[\|\varphi_{i-1}(s) - \bar{\varphi}(s)\|_X + \|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}]) ds + \\
&\quad + \bar{\nu}_1 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}_1(s, M_1) \beta_0(\sigma[C_i - C_{i-1} + 1]\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}) ds.
\end{aligned}$$

Пользуясь предположением индукции и условием (4), находим

$$\beta_0(\|\eta(t) - \bar{\varphi}(t)\|_X) \leq \sum_{j=1}^{i-1} \beta_0(\sigma[C_j - C_{j-1} + 1]\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}) + \beta_0(\sigma[C_i - C_{i-1} + 1]\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}).$$

Пользуясь условием (3), получаем оценку

$$\beta_0(\|\eta(t) - \bar{\varphi}(t)\|_X) \leq \beta_0\left(\sigma \sum_{j=1}^i [C_j - C_{j-1} + 1] \|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}\right),$$

откуда

$$\|\eta(t) - \bar{\varphi}(t)\|_X \leq \sigma [C_i + i] \|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}} = (C_i - C_{i-1}) \|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}};$$

следовательно, η удовлетворяет условию вида (7). Таким образом, $\eta \in \Psi_i$, т.е. $F_i: \Psi_i \rightarrow \Psi_i$.

Установим сжимаемость оператора F_i . Выберем произвольно $\psi, \tilde{\psi} \in \Psi_i$. В соответствии с определением оператора F_i , условиями $(\mathbf{G}_2)$, $(\mathbf{F}_3)$, для $t \in [0; t_i]$ получаем оценку

$$\begin{aligned} \beta_0[\|F_i[\tilde{\psi}](t) - F_i[\psi](t)\|_X] &\leq \nu_1(t, M_1) \int_0^{t_i} \beta_1(\|f[u](s, \tilde{\psi}(s)) - f[u](s, \psi(s))\|_Y) ds = \\ &= \nu_1(t, M_1) \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} \beta_1(\|f[u](s, \tilde{\psi}(s)) - f[u](s, \psi(s))\|_Y) ds \leq \bar{\nu}_1 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}_1(s, M_1) \beta_0(\sigma \|\tilde{\psi}(s) - \psi(s)\|_X) ds \leq \\ &\leq \bar{\nu}_1 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}_1(s, M_1) ds \beta_0[\sigma \|\tilde{\psi} - \psi\|_{\mathbf{C}([0; t_i]; X)}] \leq \beta_0[\sigma \|\tilde{\psi} - \psi\|_{\mathbf{C}([0; t_i]; X)}]; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\|F_i[\tilde{\psi}] - F_i[\psi]\|_{\mathbf{C}([0; t_i]; X)} \leq \sigma \|\tilde{\psi} - \psi\|_{\mathbf{C}([0; t_i]; X)}, \quad \sigma < 1.$$

По принципу сжимающих отображений заключаем, что уравнение

$$\varphi = F_i[\varphi], \quad \varphi \in \Psi_i,$$

имеет единственное решение на множестве Ψ_i . Это означает, что существует функция $\varphi = \varphi_i \in W[0; t_i]$, являющаяся решением задачи $(\mathcal{P}_j)$ при $j = i$ и удовлетворяющая оценке (6). По индукции делаем вывод, что аналогичное утверждение справедливо и при $j = k$. Это, в свою очередь, означает, что задача (2) имеет решение $\varphi = \varphi_k \in W[0; T]$, удовлетворяющее оценке

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{\mathbf{C}([0; T]; X)} \leq C_k \|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}.$$

Единственность решения следует из [16, теорема 1.1]. Теорема 1 доказана.

4. Пример: система уравнений Осколкова. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — ограниченная область с локально липшицевой границей $\partial\Omega$, $T > 0$, $\Gamma = [0; T] \times \partial\Omega$, $\Pi_T = [0; T] \times \Omega$. Следуя [2, гл. 2], рассмотрим в цилиндре Π_T систему

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu_1 \Delta \varphi + \sum_{i=1}^n \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \mu_2 \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} - \int_0^t h(s, t) \Delta \varphi(s) ds + \nabla p = g; \quad (11)$$

$$\operatorname{div} \varphi = 0, \quad (t, x) \in \Pi_T;$$

$$\varphi(0, x) = a(x), \quad x \in \Omega; \quad \varphi|_{\Gamma} = 0. \quad (12)$$

Система (11) называется системой уравнений Осколкова, или интегродифференциальной системой Кельвина—Фойгта. Она является модельной для описания движения неньютоновской жидкости, которой требуется время для того, чтобы среагировать на действие внезапно приложенной силы (в рамках модели Кельвина—Фойгта). Здесь $\varphi(t, x)$ — вектор скорости частицы жидкости, расположенной в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t \in [0; T]$; $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — компоненты вектора φ ; $p = p(t, x)$ — давление жидкости; $g = g(t, x)$ — вектор внешних сил, действующих на жидкость (их также называют объемными); μ_1, μ_2 ($\mu_2 > 0$) — константы; $h \in L_\infty((0, T) \times (0, T))$. С физической точки зрения число μ_1 также должно быть положительным (поскольку это вязкость жидкости), однако с математической точки зрения это не важно.

Обозначим $\mathcal{D}(\Omega)^n$ — пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса $\mathbf{C}^\infty$ с компактным носителем в Ω ; $H_0^1(\Omega)^n$ — замыкание $\mathcal{D}(\Omega)^n$ в норме пространства $H^1(\Omega)^n$; $\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^n : \operatorname{div} \varphi = 0\}$ — множество соленоидальных функций; H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2^n(\Omega)$; V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $H^1(\Omega)^n$ со скалярным произведением

$$(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w dx, \quad \nabla v : \nabla w = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i}.$$

Соответствующая норма $\|\cdot\|_V$ эквивалентна норме пространства $H^1(\Omega)^n$. Согласно [1] имеют место непрерывные и плотные вложения $V \subset H$, $H^* \subset V^*$, причем H допускает отождествление с H^* . Определим пространство

$$W = W[0; T] = \{\varphi : \varphi \in \mathbf{C}([0; T]; V), \varphi' \in L_2([0; T]; V)\}$$

с нормой

$$\|\varphi\|_W = \|\varphi\|_{\mathbf{C}([0; T]; V)} + \|\varphi'\|_{L_2([0; T]; V)}.$$

Производная φ' понимается в смысле распределений. Следуя [2, определение 2.2.1], слабым решением задачи (11)–(12) назовем функцию $\varphi \in W$, удовлетворяющую для всех $\omega \in V$ и почти всех $t \in [0; T]$ тождеству¹

$$\langle J\varphi'(t), \omega \rangle + \langle \mu_2 A\varphi'(t), \omega \rangle + \langle \mu_1 A\varphi(t), \omega \rangle + \langle (N\varphi)(t), \omega \rangle - \langle B\varphi(t), \omega \rangle = \langle g, \omega \rangle, \quad (13)$$

с начальным условием

$$\varphi(0) = a. \quad (14)$$

Здесь предполагается, что $a \in V$, $g \in L_2([0; T]; V^*)$ и используются следующие операторы:

$$\begin{aligned} J : V &\rightarrow V^*, \quad \langle J\varphi, \omega \rangle = \int_{\Omega} \varphi \omega dx, \quad \varphi, \omega \in V; \quad A : V \rightarrow V^*, \\ \langle A\varphi, \omega \rangle &= \int_{\Omega} \nabla \varphi : \nabla \omega dx, \quad \varphi, \omega \in V; \quad N : L_2([0; T]; V) \rightarrow L_2([0; T]; V^*), \\ \langle (N\varphi)(t), \omega \rangle &= \int_{\Omega} \int_0^t h(s, t) \nabla \varphi(s) ds : \nabla \omega dx, \quad \varphi \in L_2([0; T]; V), \quad \omega \in V; \\ B : L_4^n(\Omega) &\rightarrow V^*, \quad \langle B\varphi, \omega \rangle = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx, \quad \varphi \in L_4^n(\Omega), \quad \omega \in V. \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора $\omega \in V$ тождество (13) эквивалентно операторному дифференциальному уравнению

$$(\mu_2 A + J)\varphi' + \mu_1 A\varphi + N\varphi - B\varphi = g, \quad \varphi \in W. \quad (15)$$

В [2, теорема 2.2.1] устанавливается, что для всех $a \in V$, $g \in L_2([0; T]; V^*)$ существует единственное слабое решение исходной задачи, т.е. решение задачи Коши (15), (14). Делается это с помощью методики, основанной на использовании теории топологической степени, а также следующего специфического свойства (для оценки решений): $\langle B\varphi, \varphi \rangle = 0$ для всех $\varphi \in V$.

Положим²

$$\mathcal{F}\varphi = (\mu_2 A + J)\varphi' + \mu_1 A\varphi + N\varphi - B\varphi, \quad X = V, \quad Y = V^*, \quad q = 2.$$

В результате задача (15), (14) принимает вид уравнения (1). Поскольку, как уже было сказано, она обладает однозначной разрешимостью при любом $T > 0$, то условие $(\mathbf{G}_1)$ выполняется. В [16, лемма 3.3.3] было доказано следующее утверждение.

¹ Давление p здесь отсутствует, поскольку $\int_{\Omega} \nabla p \omega dx = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \omega dx = 0$.

² В [2, гл. 2] число $q \geq 1$ было произвольным. Мы берем $q = 2$ только для упрощения записи и ввиду того, что и в этом случае пример остается достаточно содержательным.

Лемма 1. *Существует такая непрерывная неубывающая функция $\nu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, что для любых решений $\varphi_i = \varphi[g_i]$ задачи (15), (14) при заданном $a \in V$, $i = 1, 2$, для всех $t \in [0; T]$ и $M \geq \|g_i\|_{L_2([0; t]; V^*)}$, $i = 1, 2$, имеем*

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_V^2 \leq \nu(M) \int_0^t \|g_1(s) - g_2(s)\|_{V^*}^2 ds.$$

Непосредственно из леммы 1 следует, что условие $(\mathbf{G}_2)$ выполнено при $\beta_0(\tau) = \beta_1(\tau) = \tau^2$, $\nu_1(t, M) = \nu(M)$. Таким образом, условие (3) выполнено:

$$\xi^2 + \eta^2 \leq \xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2 = (\xi + \eta)^2 \quad \forall \xi, \eta \geq 0.$$

Пусть $u \in U$ — управление из, вообще говоря, произвольного множества U в линейном нормированном пространстве $\mathcal{U}$, и предполагается, что для каждого $u \in U$ определена функция $f[u](t, \xi) : [0; T] \times V \rightarrow V^*$. Условия $(\mathbf{F}_1)$ – $(\mathbf{F}_3)$ конкретизируются следующим образом:

$(\mathbf{F}'_1)$ Для всех $u \in U$, $\xi \in \mathbf{C}([0; T]; V)$ функция $t \rightarrow f[u](t, \xi(t))$, определяемая для $t \in [0; T]$, принадлежит пространству $L_2([0; T]; V^*)$.

$(\mathbf{F}'_2)$ Существуют функция $\mathcal{N}_0(t, M) : [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающая по M и такая, что $\mathcal{N}_0(\cdot, M) \in L_2[0; T]$ для всякого $M \geq 0$, обеспечивающая оценку

$$\|f[u](t, \xi)\|_{V^*} \leq \mathcal{N}_0(t, M),$$

для всех $t \in [0; T]$, $M > 0$, $\xi \in V$, $\|\xi\| \leq M$, $u \in U$.

$(\mathbf{F}'_3)$ Существует функция $\mathcal{N}_2(t, M) : [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающая по M , суммируемая по Лебегу по t и такая, что

$$\|f[u](t, \xi) - f[v](t, \eta)\|_{V^*} \leq \mathcal{N}_2(t, M) \{\|\xi - \eta\|_V + \|u - v\|_{\mathcal{U}}\}$$

для всех $t \in [0; T]$, $M > 0$, $\xi, \eta \in V$, $\|\xi\|, \|\eta\| \leq M$, $u, v \in U$.

Что касается условия $(\mathbf{F}'_3)$, для его сопряжения с условием $(\mathbf{F}_3)$ необходимо пояснить, что при выполнении условия $(\mathbf{F}'_3)$ условие $(\mathbf{F}_3)$ (при $X = V$, $Y = V^*$, $q = 2$) оказывается выполненным при произвольном выборе числа $\sigma \in (0; 1)$ и функции $\mathcal{N}_1(t, M) = \mathcal{N}_2^2(t, M)/\sigma^2$.

Для функции $f[u](t, \xi) : [0; T] \times V \rightarrow V^*$, удовлетворяющей условиям $(\mathbf{F}'_1)$ – $(\mathbf{F}'_3)$, рассмотрим управляемый аналог системы уравнений (11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu_1 \Delta \varphi + \sum_{i=1}^n \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \mu_2 \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} - \int_0^t h(s, t) \Delta \varphi(s) ds + \nabla p = f[u](t, \varphi); \\ \operatorname{div} \varphi = 0, \quad (t, x) \in \Pi_T; \end{aligned} \quad (16)$$

при условиях (12). Теорема 1 конкретизируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия $(\mathbf{F}'_1)$ – $(\mathbf{F}'_3)$. Предположим, что управлению $u = \bar{u} \in U$ отвечает глобальное решение $\varphi = \bar{\varphi} \in W[0; T]$ задачи (16), (12). Тогда существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $C > 0$, что для каждого $u \in U$, $\|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}} \leq \varepsilon$, существует единственное глобальное решение $\varphi \in W[0; T]$ задачи (16), (12), и, более того,*

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{\mathbf{C}([0; T]; V)} \leq C \|u - \bar{u}\|_{\mathcal{U}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
2. Звягин В. Г., Турбин М. В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта // Совр. мат. Фундам. напр. — 2009. — 31. — С. 3–144.
3. Калантаров В. К., Ладыженская О. А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Зап. науч. семин. ЛОМН. — 1977. — 69. — С. 77–102.
4. Лионс Ж. Л. Управление сингулярными распределенными системами. — М.: Наука, 1987.

5. *Серегин Г. А., Шилкин Т. Н.* Теоремы лиувилевского типа для уравнений Навье–Стокса // Усп. мат. наук. — 2018. — 73, № 4 (442). — С. 103–170.
6. *Сумин В. И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1990. — 30, № 1. — С. 3–21.
7. *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч. I. — Н. Новгород: ННГУ, 1992.
8. *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в математической теории оптимального управления распределенными системами / Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Н. Новгород, 1998.
9. *Сумин В. И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестн. ННГУ. Мат. — 2003. — 1. — С. 91–107.
10. *Сумин В. И., Чернов А. В.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем. — Екатеринбург: Ин-т мат. мех. УрО РАН, 2015.
11. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
12. *Чернов А. В.* Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Н. Новгород, 2000.
13. *Чернов А. В.* О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2013. — 53, № 12. — С. 2029–2043.
14. *Чернов А. В.* О тотальной глобальной разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с варьируемым линейным оператором // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2015. — 25, № 2. — С. 230–243.
15. *Чернов А. В.* О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2018. — 58, № 12. — С. 2095–2111.
16. *Чернов А. В.* О тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости операторного уравнения первого рода с управляемой добавочной нелинейностью // Изв. вузов. Мат. — 2018. — 11. — С. 60–74.
17. *Biler P., Hilhorst D., Nadzieja T.* Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, II // Colloq. Math. — 1994. — 67, № 2. — P. 297–308.
18. *Blokhin A. M., Tkachev D. L.* Asymptotic stability of the stationary solution for a new mathematical model of charge transport in semiconductors // Q. Appl. Math. — 2012. — 70, № 2. — P. 357–382.
19. *Carasso C., Hassnaoui E. H.* Mathematical analysis of the model arising in study of chemical reactions in a catalytic cracking reactor // Math. Comput. Model. — 1993. — 18, № 2. — P. 93–109.
20. *Catalano F.* The nonlinear Klein–Gordon equation with mass decreasing to zero // Adv. Differ. Equations. — 2002. — 7, № 9. — P. 1025–1044.
21. *Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Soriano J. A.* On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — 281, № 1. — P. 108–124.
22. *Hu B., Yin H. M.* Global solutions and quenching to a class of quasilinear parabolic equations // Forum Math. — 1994. — 6, № 3. — P. 371–383.
23. *Kobayashi T., Pecher H., Shibata Y.* On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity // Math. Ann. — 1993. — 296, № 2. — P. 215–234.
24. *Korpusov M. O., Ovchinnikov A. V., Sveshnikov A. G.* On blow up of generalized Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation // Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. — 2009. — 71, № 11. — P. 5724–5732.
25. *Korpusov M. O., Sveshnikov A. G.* Blow-up of solutions of strongly nonlinear equations of pseudoparabolic type // J. Math. Sci. — 2008. — 148, № 1. — P. 1–42.
26. *Lu G.* Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: A Cauchy problem // Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. — 1995. — 24, № 8. — P. 1193–1206.
27. *Rozanova-Pierrat A.* Qualitative analysis of the Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov (KZK) equation // Math. Models Meth. Appl. Sci. — 2008. — 18, № 5. — P. 781–812.
28. *Saito H.* Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal regularity $L_p - L_q$ class // J. Differ. Equations. — 2018. — 264, № 3. — P. 1475–1520.
29. *Terseinov A.* The Dirichlet problem for second order semilinear elliptic and parabolic equations // Differ. Eqs. Appl. — 2009. — 1, № 3. — P. 393–411. — 22.
30. *Tröltzsch F.* Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2010.

31. *Turo J.* Global solvability of the mixed problem for first order functional partial differential equations// Ann. Pol. Math. — 1991. — 52, № 3. — P. 231–238.
32. *Yamazaki T.* Scattering for a quasilinear hyperbolic equation of Kirchhoff type// J. Differ. Equations. — 1998. — 143, № 1. — P. 1–59.
33. *Zhao X.* Self-similar solutions to a generalized Davey-Stewartson system// Math. Comput. Model. — 2009. — 50, № 9–10. — P. 1394–1399.

Чернов Андрей Владимирович

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского;

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

E-mail: chavnn@mail.ru