Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Шакиров, Об уточнении асимптотической формулы для функции Лебега полинома Лагранжа, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 192, 142–149

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-142-149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 05:40:14

ОБ УТОЧНЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА ПОЛИНОМА ЛАГРАНЖА

© 2021 г. И. А. ШАКИРОВ

Аннотация. Для функции Лебега, соответствующей интерполяционному полиному Лагранжа, получены строгие оценки снизу и сверху и уточнение известной асимптотической формулы.

Ключевые слова: полином Лагранжа, функция Лебега, асимптотическая формула, равномерная оценка остаточного члена.

ON THE REFINEMENT OF THE ASYMPTOTIC FORMULA FOR THE LEBESGUE FUNCTION OF THE LAGRANGE POLYNOMIAL

© 2021 I. A. SHAKIROV

ABSTRACT. For the Lebesgue function corresponding to the Lagrange interpolation polynomial, strict lower and upper estimates are obtained and the well-known asymptotic formula is refined.

Keywords and phrases: Lagrange polynomial, Lebesgue function, asymptotic formula, uniform remainder estimate.

AMS Subject Classification: 34A25

1. Введение. При изучении поточечной сходимости общеизвестного интерполяционного полинома Лагранжа

$$\Phi_n^*(x, t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} D_n^*(t_k - t), \quad D_n^*(t) = \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg}(t/2)}, \quad t_k = \frac{\pi k}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

к исходной функции $x(t) \in C_{2\pi}$, принципиальное значение имеет поведение функции Лебега

$$\lambda_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} |D_n^*(t_k - t)|, \quad t \in T^* = [0, \pi/n], \quad (2)$$

где $D_n^*(u)$ — видоизмененное ядро Дирихле, $C_{2\pi} = \{x(t) \mid x(t) \in C[0, 2\pi], x(0) = x(2\pi)\}$, T^* — основной период функции (2), n — степень полинома (1).

В математической литературе для функции (2) известна асимптотическая формула

$$\lambda_n^*(t) = \frac{2}{\pi} \ln n \sin nt + O(1), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

В ее правой части содержится неопределенная ограниченная величина $O(1)$, которая появляется в связи с издержками метода получения формулы (3) из (2). Действительно, в процессе исключения модулей в сумме (2) и ее последовательном преобразовании при больших значениях параметра n ($n \gg 1$) появляются промежуточные неопределенные ограниченные величины

$O_k(1)$ ($O(1) = \sum_k O_k(1)$). Они являются следствием (продуктом) замены сложных функций и конечных сумм более простыми агрегатами при выделении главной составляющей а правой части формулы (3). Контролировать допущенную погрешность на каждом этапе не представляется возможным. Сведения об этих и других проблемах, возникающих при интерполировании функций, можно найти в монографиях [1–6].

Таким образом, до сих пор остается неясным поведение предельной величины $O(1)$. При конечных значениях параметра n аналогичный вопрос является не менее актуальным и для остаточного члена $O_n(t)$ в представлении функции Лебега вида

$$\lambda_n^*(t) = \frac{2}{\pi} \ln n \sin nt + O_n(t), \quad t \in T^*, \quad O_n(t) \equiv \lambda_n^*(t) - \frac{2}{\pi} \ln n \sin nt, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Ниже убедимся, что изучение поведения остаточных членов, входящих в формулы (3) и (4), будет более продуктивным, если при этом использовать явное выражение функции Лебега (см. [7])

$$\lambda_n^*(t) = \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=1}^n \left(\operatorname{ctg} \frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t_k - t}{2} \right) \right] \sin nt, \quad t \in T^*, \quad t_k = \frac{\pi k}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

В рамках данной работы последовательно решены следующие новые задачи:

- (1) при помощи явного выражения (5) функции Лебега получены строгие оценки снизу и сверху логарифмно-тригонометрическими полиномами (формула (16));
- (2) затем с помощью этих оценок уточнено поведение остаточного члена $O_n(t)$, который с малой погрешностью представлен в виде $O_n(t) \approx a_n \sin nt + b_n$, $n \in \mathbb{N}$, где коэффициенты $a_n = a(n)$, $b_n = b(n)$ — вполне определенные функциональные зависимости (см. (19)–(21));
- (3) получена более общая, чем (3), асимптотическая формула

$$\lambda_n^*(t) = \frac{2}{\pi} \ln n \cdot \sin nt + a \cdot \sin nt + b, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

где

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} = 0,197101817\dots, \quad b = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0,818309886\dots;$$

- (4) входящие в формулы (3), (4) остаточные члены равномерно оценены сверху вполне определенной константой.

Ясно, что асимптотическая формула (6) является обобщением и уточнением формулы (3). Ниже увидим, что возможность представления $\lambda_n^*(t)$ в таком виде напрямую связана с преимуществами явного представления (5) этой функции (см. [7]) перед формулой (2). Различные явные виды функций Лебега, соответствующие тригонометрическим интерполяционным полиномам Лагранжа, впервые введены и подробно исследованы автором в [7–9].

2. Вспомогательные сведения. Нам понадобятся классы функций V_δ^+ и V_δ^- .

Определение 1. Строго монотонная функция $\varphi = \varphi(n)$, $n \in D = D(\varphi) \subseteq \mathbb{N}$ дискретного аргумента принадлежит одному из классов $V_\delta^\pm$, если для изменения (вариации)

$$\delta_\varphi \equiv \delta(\varphi) = \sup\{\varphi(n) \mid n \in D\} - \inf\{\varphi(n) \mid n \in D\} \quad (\delta_\varphi > 0)$$

области ее значения $R(\varphi)$ выполняется условие $\delta_\varphi < \delta$, где δ — заранее выбранное положительное число. В обозначении класса используется знак плюс (V_δ^+) в случае возрастания функций в области D , знак минус (V_δ^-) — при их убывании.

Ясно, что эти классы определены как семейство функций $\{\varphi\}$, для вариации каждого из которых выполняется неравенство $\delta_\varphi < \delta$. Участвующие в леммах и теоремах функции φ в основном имеют малые изменения областей их значений $R(\varphi)$, следовательно, и малые вариации δ_φ ($\delta_\varphi \ll 1$). Даже для самой «худшей» из них $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(n)$, $n \in D$ в нашем случае имеет место неравенство $\delta(\hat{\varphi}) < 0,138$.

Замечание 1. Функции (последовательности) из классов V_δ^+ и V_δ^- обладают тем замечательным свойством, что наибольшие их вариации происходят при первоначальных значениях аргумента n ($n = 1 \vee n = \overline{1}, 2 \vee n = \overline{1}, \overline{3}$) с последующей их «стабилизацией» около вполне определенных предельных точек. Данное свойство с успехом используется для получения более тонких (сильных) оценок в утверждениях работы.

Ниже применим непрерывные продолжения дискретных функций $\varphi = \varphi(n)$, $n \in D \subset \mathbb{N}$ из классов $V_\delta^\pm$ на области $\overline{D} = \overline{D}(\varphi) \subset \mathbb{R}$. Они позволят использовать методы дифференциального исчисления для доказательства некоторых вспомогательных лемм работы.

Замечание 2. Для непрерывных продолжений $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(n)$, $n \in \overline{D}$ ($\overline{D} = \overline{\inf D; \sup D} \subset \mathbb{R}$) дискретно определенных функций $\varphi = \varphi(n)$ ($n \in D \subset \mathbb{N}$) формулировка и суть определения 1 полностью сохраняются.

Для простоты формулировок, а также с целью исключения из рассмотрения тривиального случая ($n = 1$) далее всюду положим значение параметра принадлежащим области $D^* = \{n \mid n \geq 2\} \subset \mathbb{N}$.

Приведем необходимые в дальнейшем две леммы и две теоремы из работ автора [10, 11].

Лемма 1. Функция дискретного аргумента

$$\alpha_n^* \equiv \alpha^*(n) = 1/[n \sin(\pi/2n)], \quad n \in D^* \quad (n = 1 \Rightarrow \alpha_1^* = 1) \quad (7)$$

является строго убывающей функцией; для ее образа и вариации верны соотношения

$$R(\alpha_n^*) = (2/\pi, \sqrt{2}/2] \subset (0, 636; 0, 708); \quad \delta = \delta(\alpha_n^*) = \sqrt{2}/2 - 2/\pi = 0, 072 \dots,$$

т.е. она принадлежит классу V_δ^- .

Лемма 2. Функциональные зависимости

$$\begin{aligned} \varphi_1^* \equiv \varphi_1^*(n) &= 1 - \alpha_n^* \quad (R(\varphi_1^*) = [1 - \sqrt{2}/2, 1 - 2/\pi] \subset (0, 292, 0, 364), \quad \delta(\varphi_1^*) = 0, 072 \dots), \\ \varphi_2^* \equiv \varphi_2^*(n) &= \alpha_n^* \cos(\pi/(2n)) \quad (R(\varphi_2^*) = [1/2, 2/\pi] \subset (0, 499, 0, 637), \quad \delta(\varphi_2^*) = 0, 137 \dots), \end{aligned} \quad (8)$$

определенные в области D^* и выраженные через (7), являются функциями из класса V_δ^+ .

Теорема 1. Функция Лебега $\lambda_n^*(t)$, $t \in T^*$ ($n \in D^*$), соответствующая интерполяционному полиному (1),

- (i) является π/n -периодической, четной функцией;
- (ii) на полупериоде $T_0^* = [0, \pi/2n] \subset T^*$ строго возрастает, а в его дополнении строго убывает; выпукла вверх всюду в области определения;
- (iii) в области T_0^* представима в виде

$$\lambda_n^*(t) = l_n^*(t) + a_n^*(t) \sin nt \quad (n \in D^*; \quad n = 1 \Rightarrow \lambda_1^*(t) \equiv 1), \quad (9)$$

где

$$l_n^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin nt}{n \sin t}, \quad a_n^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\operatorname{ctg} \frac{t_k - t}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t_k + t}{2} \right) \quad (n = 1 \Rightarrow l_1^*(t) \equiv 1, \quad a_1^*(t) \equiv 0). \quad (10)$$

При вышеуказанных значениях аргумента t и параметра n не только функции (10), но и сама функция Лебега (9) принимают только положительные значения, т.е. $l_n^*(t) > 0$, $a_n^*(t) > 0$, $\lambda_n^*(t) > 0$, $t \in T_0^*$ ($n \in D^*$).

Четность $\lambda_n^*(t)$ позволяет сформулировать следующую теорему лишь для полупериода T_0^* .

Теорема 2. Для функций из (10) в области T_0^* справедливы следующие утверждения:

- (i) $l_n^*(t)$ является выпукло убывающей функцией, и для нее верна двусторонняя оценка

$$\alpha_n^* \leq l_n^*(t) \leq 1, \quad t \in T_0^*, \quad l_n^*(0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0+} l_n^*(t) = 1, \quad l_n^*(\pi/(2n)) = \alpha_n^*, \quad n \in D^*; \quad (11)$$

- (ii) $a_n^*(t)$ является строго возрастающей, выпуклой вниз функцией, для которой имеет место двойное неравенство

$$a_n^*(0) \leq a_n^*(t) \leq a_n^*(\pi/2n), \quad t \in T_0^* \quad (n \in D^*). \quad (12)$$

3. Основные результаты. Исследование поведения функции Лебега $\lambda_n^*(t)$ при $n \rightarrow \infty$ и $n \in \mathbb{N}$, установление асимптотических, а также приближенных формул с оценкой допущенной погрешности относятся к актуальным задачам теории приближения функции. Ниже подробно изучены эти и другие вопросы, имеющие непосредственное отношение к формуле (4).

Используя приведенные в предыдущем пункте вспомогательные результаты, вначале установим две леммы, которые позволят доказать основные теоремы и, таким образом, решить поставленные во введении задачи.

Лемма 3. *Функциональные зависимости (последовательности)*

$$\varphi_3^* \equiv \varphi_3^*(n) = \frac{1}{2}\varphi_2^*(n) + \frac{2}{\pi} \ln \alpha_n^*, \quad n \in D^*, \quad (13)$$

$$\varphi_4^* \equiv \varphi_4^*(n) = \varphi_1^*(n) - \varphi_3^*(n), \quad n \in D^*, \quad (14)$$

выраженные через определенные в леммах 1–3 последовательности, принадлежат классу V_δ^+ , имеют характеристики

$$R(\varphi_3^*) = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \ln 2, \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} \right) \subset (0,029; 0,031), \quad \delta(\varphi_3^*) = 0,001 \dots,$$

$$R(\varphi_4^*) = \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{\pi} \ln 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} \right) \subset (0,263; 0,333), \quad \delta(\varphi_4^*) = 0,069 \dots$$

Доказательство. С целью исследования поведения функции (13) непрерывно продолжим ее на область $\overline{D}^* = [2, +\infty) \subset \mathbb{R}$ (см. замечание 2). Она представлена в виде суммы двух составляющих и является гладкой функцией. Согласно леммам 2 и 1 первая из них в рассматриваемой области строго возрастает, а вторая — строго убывает (логарифмическая функция сохраняет свойство монотонности).

Сказанное требует более детального исследования функции $\varphi_3^*(n)$, $n \in D^*$ с использованием дифференциальных методов. Предварительно ее несколько преобразуем:

$$\varphi_3^*(n) = \frac{1}{2}\varphi_2^*(n) + \frac{2}{\pi} \ln \alpha_n^* = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\cos(\pi/2n)}{\sin(\pi/2n)} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi/2n}{\sin(\pi/2n)} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\pi}, \quad n \in \overline{D}^*.$$

Замена переменной $x = \pi/2n$ ($n \in [2, +\infty) \Rightarrow x \in (0, \pi/4]$) позволяет записать полученное представление в виде

$$\tilde{\varphi}_3^*(x) = \frac{1}{\pi} x \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{\sin x} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\pi}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right],$$

а затем определить знак ее производной с использованием разложения Маклорена:

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_3^*(x))' &= \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x} \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin x}{x} \left(\sin x - \frac{x \cos x}{\sin^2 x} \right) = \\ &= \frac{x}{\pi x \sin^2 x} (2 \sin^2 x - x^2 - x \sin x \cos x) = \\ &= -\frac{x}{\pi x \sin^2 x} \left(\frac{2}{45} x^6 - \frac{2}{315} x^8 + \dots \right) < 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Поэтому $\tilde{\varphi}_3^*(x)$ ($x \in (0, \pi/4]$) является строго убывающей функцией, а исходная функция $\varphi_3^*(n)$ ($n \in [2, +\infty)$) — строго возрастающей в области своего определения. Следовательно, $\varphi_3^*(n) \in V_\delta^+$.

Функцию $\varphi_4^*(n)$, представленную в виде разности двух функций из класса V_δ^+ , как и в предыдущем случае исследуем с использованием производной. Замена переменной $x = \pi/2n$ ($n \in [2, +\infty) \Rightarrow x \in (0, \pi/4]$) позволяет выразить функцию (14) через новый аргумент в виде

$$\tilde{\varphi}_4^*(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{\sin x} - \frac{1}{\pi} x \operatorname{ctg} x - \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{\sin x} - \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\pi}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Ее производную изучим с применением разложения в степенной ряд:

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_4^*(x))' &= -\frac{1}{\pi} \left[2 \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} + 2 \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi x \sin^2 x} (2x \sin x - 2x^2 \cos x - x \sin x \cos x + 2 \sin^2 x - x^2) = \\ &= -\frac{1}{\pi x \sin^2 x} \left(\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{9}x^6 + \dots \right) < 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, имеем: $\varphi_4^*(n)$, $n \in [2, +\infty)$ является строго возрастающей функцией, т.е. $\varphi_4^*(n) \in V_\delta^+$. Приведенные в лемме характеристики функций (13) и (14) устанавливаются без особых усилий. Лемма 3 полностью доказана. $\square$

Лемма 4. Для функции $a_n^*(t)$ из (10) равномерно относительно ее аргумента верно двустороннее неравенство

$$\varphi_3^*(n) + \frac{2}{\pi} \ln n < a_n^*(t) < \varphi_1^*(n) + \frac{2}{\pi} \ln n, \quad t \in T_0^* \quad (n \in D^*), \quad (15)$$

где последовательности (φ_1^*) , (φ_3^*) определены в (8) и (13) соответственно.

Доказательство. Если значение параметра $n = 1$, то имеем тривиальный случай: $\varphi_1^*(1) = 0$, $\varphi_3^*(1) = 0$, $a_1^*(t) \equiv 0$.

Вначале несколько преобразуем $a_n^*(\pi/2n)$, входящую в правую часть (12); затем, используя неувеличиваемую верхнюю оценку для константы Лебега вида $\lambda_n^* \leq 1 + (2/\pi) \ln n$, $n \in \mathbb{N}$ ($\lambda_n^* < 1 + (2/\pi) \ln n$, $n \in D^*$) (см. [10, 12, 13]), оценим ее сверху:

$$\begin{aligned} a_n^*(\pi/2n) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\operatorname{ctg} \frac{t_k - \pi/2n}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t_k + \pi/2n}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{t_k - \pi/2n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{t_k + \pi/2n}{2} - \operatorname{ctg} \frac{t_0 + \pi/2n}{2} - \operatorname{ctg} \frac{t_n - \pi/2n}{2} \right] = \\ &= \lambda_n^* - \frac{1}{2n} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n} \right) \right] = \\ &= \lambda_n^* - \alpha_n^* < 1 - \alpha_n^* + \frac{2}{\pi} \ln n \equiv \varphi_1^*(n) + \frac{2}{\pi} \ln n, \quad t_k = \frac{\pi}{n} k. \end{aligned}$$

Теперь оценим $a_n^*(0)$ снизу:

$$\begin{aligned} a_n^*(0) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\operatorname{ctg} \frac{t_k - 0}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t_k + 0}{2} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{t_k}{2} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\operatorname{ctg} \frac{t_k}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{n} > \\ &> \frac{1}{\pi} \left[\int_{t_1}^{\pi} \operatorname{ctg}(t/2) dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{t_1}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \left[2 \ln \sin \frac{t}{2} \Big|_{t_1}^{\pi} + \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\cos(\pi/2n)}{\sin(\pi/2n)} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \ln \frac{n}{n \sin(\pi/2n)} + \frac{\cos(\pi/2n)}{2} \cdot \frac{1}{n \sin(\pi/2n)} = \frac{1}{2} \alpha_n^* \cos \frac{\pi}{2n} + \frac{2}{\pi} \ln \alpha_n^* + \frac{2}{\pi} \ln n \equiv \\ &\equiv \varphi_3^*(n) + \frac{2}{\pi} \ln n, \end{aligned}$$

где $\varphi_3^*(n)$ определена в (13). Лемма доказана. $\square$

Заметим, что среди всевозможных представлений [9] функции Лебега только формула (9) позволяет осуществить строгую двустороннюю ее оценку. Используя эту формулу и результаты предыдущих двух лемм, ниже решим эту задачу.

Теорема 3. Для функции Лебега $\lambda_n^*(t)$, $t \in T_0^*$ ($n \geq 2$) справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$\frac{2}{\pi} \ln n \cdot \sin nt + \varphi_3^*(n) \cdot \sin nt + \alpha_n^* < \lambda_n^*(t) \leq \frac{2}{\pi} \ln n \cdot \sin nt + \varphi_1^*(n) \cdot \sin nt + 1, \quad (16)$$

где α_n^* , φ_1^* , φ_3^* ранее изученные последовательности (см. (7), (8), (13)).

Доказательство. Для получения верхней оценки в (16) используем формулу (9), неравенства (11), (12), (15):

$$\begin{aligned} \lambda_n^*(t) &= l_n^*(t) + a_n^*(t) \sin nt \leq \max_{t \in T_0^*} l_n^*(t) + [\max_{t \in T_0^*} a_n^*(t)] \cdot \sin nt = l_n^*(0) + a_n^* \left(\frac{\pi}{2n} \right) \sin nt \leq \\ &\leq 1 + \left[\varphi_1^*(n) + \frac{2}{\pi} \ln n \right] \cdot \sin nt = 1 + \varphi_1^*(n) \cdot \sin nt + \frac{2}{\pi} \ln n \cdot \sin nt, \quad t \in T_0^* \quad (n \geq 2), \end{aligned}$$

где равенства достигаются лишь при значении аргумента $t = 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

Нижнюю оценку в (16) получим, применяя результаты теоремы 2 и неравенство (15):

$$\begin{aligned} \lambda_n^*(t) &= l_n^*(t) + a_n^*(t) \sin nt \geq \min_{t \in T_0^*} l_n^*(t) + [\min_{t \in T_0^*} a_n^*(t)] \cdot \sin nt = l_n^* \left(\frac{\pi}{2n} \right) + a_n^*(0) \cdot \sin nt > \\ &> \alpha_n^* + \left[\varphi_3^*(n) + \frac{2}{\pi} \ln n \right] \cdot \sin nt = \frac{2}{\pi} \ln n \cdot \sin nt + \varphi_3^*(n) \cdot \sin nt + \alpha_n^*, \quad t \in T_0^* \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Появление нестрогого неравенства в верхней оценке (16) связано с тем, что при значении аргумента $t = 0$ из области T_0^* значение функции Лебега всегда равно единице, т.е. $\lambda_n^*(0) = 1$ для всех $n \in D^*$.

Результат теоремы 3 позволяет теперь установить более точную, чем (3), асимптотическую формулу для функции (2).

Теорема 4. Для функции $\lambda_n^*(t)$, $t \in T_0^*$, верно асимптотическое равенство

$$\lambda_n^*(t) \cong \frac{2}{\pi} \ln n \cdot \sin nt + a \cdot \sin nt + b, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (17)$$

где

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} = 0,197101817\dots, \quad b = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0,818309886\dots$$

Доказательство. Используемая здесь терминология «асимптотическая формула» и символ $\cong$ не гарантируют совпадения предельных значений левой и правой частей в формуле (17); в случае их совпадения имеем «асимптотически точную формулу».

В предыдущей теореме функция (9) была достаточно строго оценена с двух сторон. Найдем полусумму $\eta_n^*(t)$ верхней и нижней оценивающих $\lambda_n^*(t)$ функций в неравенстве (16):

$$\begin{aligned} \eta_n^*(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi} \ln n \cdot \sin nt + \frac{1}{2} [\varphi_1^*(n) + \varphi_3^*(n)] \sin nt + \frac{1}{2} [1 + \alpha_n^*] = \\ &= (2/\pi) \ln n \cdot \sin nt + a_n \cdot \sin nt + b_n, \quad n \in D^*, \quad (18) \end{aligned}$$

где

$$a_n \equiv a(n) = (\varphi_1^* + \varphi_3^*)/2 \in V_\delta^+, \quad b_n \equiv b(n) = (1 + \alpha_n^*)/2 \in V_\delta^-. \quad (19)$$

Подробные сведения о последовательностях α_n^* , $\varphi_1^*(n)$, $\varphi_3^*(n)$ содержатся в леммах 1–3. Справедливость принадлежностей $a_n \in V_\delta^+$ и $b_n \in V_\delta^-$ не вызывает сомнения, так как они являются

линейными комбинациями (с положительными коэффициентами) последовательностей из соответствующих классов. Их характеристики имеют вид

$$\begin{aligned} R(a_n) &= \left[\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln 2, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} \right) \subset (0,161; 0,198), \quad \delta(a_n) = 0,035 \dots, \\ R(b_n) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right] \subset (0,818; 0,854), \quad \delta(b_n) = 0,037 \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь для функции Лебега $\lambda_n^*(t)$ за приближающий ее агрегат примем функцию (18), т.е.

$$\lambda_n^*(t) \approx \eta_n^*(t), \quad t \in T^*, \quad n \in D^* \iff O_n(t) \approx a_n \sin nt + b_n, \quad (21)$$

а за асимптотическую формулу — предельное значение $\eta_n^*(t)$ при $n \rightarrow +\infty$ функции (18), т.е.

$$\lambda_n^*(t) \cong \frac{2}{\pi} \ln n \cdot \sin nt + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right) \cdot \sin nt + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{2}{\pi} \ln n \cdot \sin nt + a \cdot \sin nt + b, \quad n \rightarrow +\infty,$$

где согласно (19) и (20) имеем

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} = 0,197101817 \dots, \quad b = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0,818309886 \dots$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие. Если в условиях теоремы 4 значение аргумента t положим равным среднему значению $\pi/2n$ периода T^* функции Лебега ($\lambda_n^*(\pi/2n) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_n^*$), то асимптотическое представление (17) с учетом (19) и (20) превращается в асимптотическую формулу для соответствующей константы Лебега вида

$$\lambda_n^* \cong \frac{2}{\pi} \ln n + \bar{\alpha}_0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \bar{\alpha}_0 = 1 + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} = 1,015411703 \dots$$

Она незначительно отличается от известной (см. [12, 13] асимптотически точной формулы

$$\lambda_n^* = \frac{2}{\pi} \ln n + \alpha_0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \alpha_0 = \frac{2}{\pi} \left[\gamma + \ln \frac{8}{\pi} \right] = 0,962522826 \dots$$

для константы λ_n^* . Действительно, их правые части различаются на малую величину

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\alpha}_0 - \alpha_0 = 1 - \frac{4\gamma - 1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{32}{\pi} = 0,052888876 \dots$$

($\gamma = 0,577215664 \dots$ — константа Эйлера), что является одним из показателей качества формулы (17).

Примечание. Асимптотическая формула (17) является естественным обобщением (уточнением) общеизвестной формулы (3), в которой $O(1)$ уточнена как

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} \right) \sin nt + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$

С целью дальнейшей равномерной оценки допущенной в приближенном равенстве (21) абсолютной погрешности введем в рассмотрение функцию погрешности

$$\varepsilon_n^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} |\lambda_n^*(t) - \eta_n^*(t)| \quad (\varepsilon_n^*(t) \geq 0 \quad \forall t \in T^*, \quad n \in D^*) \quad (22)$$

и экстремальную величину

$$\varepsilon^* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \geq 2} \max_{t \in T^*} \varepsilon_n^*(t) = \sup_{n \geq 2} \max_{t \in T^*} |\lambda_n^*(t) - \eta_n^*(t)|.$$

Теорема 5. Для функции погрешности (22) верна равномерная по переменным t и n оценка

$$\varepsilon^* = \sup_{n \geq 2} \max_{t \in T^*} |\lambda_n^*(t) - \eta_n^*(t)| < 0,348. \quad (23)$$

Доказательство. Абсолютное значение погрешности в приближенной формуле (21) всегда меньше либо равно полуразности верхней и нижней оценивающих функций в двойном неравенстве (16), т.е.

$$|\lambda_n^*(t) - \eta_n^*(t)| \leq \frac{1}{2} |(\varphi_1^* - \varphi_3^*) \cdot \sin nt + 1 - \alpha_n^*| = \frac{1}{2} (\varphi_4^* \sin nt + \varphi_1^*),$$

где свойства синуса, характеристики функций $\varphi_1^*(n)$, $\varphi_4^*(n)$, определенные в леммах 1 и 3, позволили в его правой части исключить модуль из рассмотрения.

Переходя последовательно к максимуму и супремуму в полученном неравенстве, и учитывая при этом характеристики функций (8), (14) из класса V_δ^+ , получим требуемую оценку (23):

$$\sup_{n \geq 2} \max_{t \in T^*} |\lambda_n^*(t) - \eta_n^*(t)| \leq \frac{1}{2} \left[\sup_{n \in D^*} \varphi_4^*(n) + \sup_{n \in D^*} \varphi_1^*(n) \right] \iff \varepsilon^* \leq 1 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2\pi}$$

т.е. $\varepsilon^* < 0,348$. Теорема доказана. $\square$

Оценим сверху остаточный член $O_n(t)$ и его предельное значение $O(1)$ равномерно относительно t , n . Для этого используем результат предыдущей теоремы и проведем несложные расчеты с учетом соотношений (18)–(20):

$$\begin{aligned} |O_n(t)| &= \left| \lambda_n^*(t) - \frac{2}{\pi} \ln n \sin nt \right| \leq \left| \lambda_n^*(t) - \frac{2}{\pi} \ln n \sin nt - a_n \sin nt - b_n \right| + |a_n \sin nt + b_n| \leq \\ &\leq \varepsilon_n^*(t) + (a_n + b_n) < \left(1 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2\pi} \right) + \left(1 + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} \right) = 2 - \frac{2}{\pi} < 1,364 \end{aligned}$$

для всех $t \in T^*$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$, где дополнительно использованы свойства последовательности

$$\varphi_6^*(n) \equiv a_n + b_n = 1 + \frac{1}{2} \varphi_3^*(n) \in V_\delta^+, \quad R(\varphi_6^*) = \left[\frac{9}{8} - \frac{1}{2\pi} \ln 2, 1 + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\pi}{2} \right) \subset (1,014; 1,016).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1988.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1965.
3. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976.
4. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
5. Привалов А. А. Теория интерполирования функций. Т. 1, 2. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990.
6. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960.
7. Шакиров И. А. О тригонометрическом интерполяционном полиноме Лагранжа, имеющем минимальную норму как оператор из // Изв. вузов. Мат. — 2010. — 10. — С. 60–68.
8. Шакиров И. А. Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам // Изв. вузов. Мат. — 2011. — 10. — С. 80–88.
9. Шакиров И. А. О функциях Лебега, соответствующих семейству интерполяционных полиномов Лагранжа // Изв. вузов. Мат. — 2013. — 7. — С. 77–89.
10. Шакиров И. А. О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на точные и приближенные значения констант Лебега // Сиб. мат. ж. — 2014. — 55, № 6. — С. 1404–1423.
11. Шакиров И. А. Асимптотические формулы для функций Лебега, соответствующих семейству интерполяционных полиномов Лагранжа // Мат. заметки. — 2017. — 102, № 1. — С. 133–147.
12. Brutman L. Lebesgue functions for polynomial interpolation. A survey // Ann. Numer. Math. — 1997. — 4. — P. 111–127.
13. Rivlin T. The Lebesgue constants for polynomial interpolation / Functional Analysis and Its Application. — Berlin: Springer-Verlag, 1974.

Шакиров Искандер Асгатович

Набережночелнинский государственный педагогический университет

E-mail: iskander@tatngpi.ru