Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Шананин, К продолжению ростков решений уравнений второго порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 192, 150–154

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-150-154>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:16:59

К ПРОДОЛЖЕНИЮ РОСТКОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. Н. А. ШАНАНИН

Аннотация. Для решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами и знакоопределенным старшим символом получены теоремы об однозначном продолжении ростков вдоль кривых.

Ключевые слова: росток решения, однозначное продолжение.

ON THE CONTINUATION OF GERMS OF SOLUTIONS OF SECOND-ORDER EQUATIONS

© 2021 N. A. SHANANIN

ABSTRACT. For solutions of second-order linear differential equations with real coefficients and a sign-definite leading symbol, theorems on the unique continuation of germs along curves are obtained.

Keywords and phrases: germ of solution, unique continuation.

AMS Subject Classification: 35A01

Статья дополняет работы автора [5, 6] по однозначному продолжению ростков решений дифференциальных уравнений вдоль кривых. В статье рассматривается класс операторов второго порядка с вещественными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, со знакоопределенным старшим символом и двукратным характеристическим множеством. Терминология и обозначения соответствуют принятым в [2, 3].

1. Основные результаты. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и

$$P = \sum_{l,k=1}^n a_{l,k}(x) \partial_{x_l} \partial_{x_k} + \sum_{k=1}^n b_k(x) \partial_{x_k} + c(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

— дифференциальный оператор с вещественными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, $a_{l,k}(x) = a_{k,l}(x)$, $l, k = 1, 2, \dots, n$. Система координат x на множестве Ω индуцирует систему координат $(x, \partial/\partial x)$ на кокасательном пространстве $T^*(\Omega)$, определяя изоморфизм кокасательного пространства на произведение $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Везде ниже в формулировках используется указанная система координат. Предположим, что выполнены следующие условия:

(i) в каждой точке $x \in \Omega$ главный символ

$$p_2(x, \xi) = - \sum_{l,k=1}^n a_{l,k}(x) \xi_l \xi_k, \quad (x, \xi) \in T^*(\Omega),$$

оператора P является знакоопределенной квадратичной формой на слоях кокасательного расслоения $T_x^*(\Omega)$;

- (ii) в каждой точке $x \in \Omega$ ядро $\mathcal{K}_x(P) \subset T_x^*(\Omega)$ одномерно;
- (iii) $\mathcal{L}(P)$ — инволютивная дифференциальная система;
- (iv) суглавный символ

$$p_{\text{sub}}(x, \xi) = i \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial a_{l,k}}{\partial x_l}(x) + b_k(x) \right) \xi_k$$

оператора P , определенный в точках (x, ξ) , принадлежащих характеристическому множеству, отличен от нуля при $\xi \in \mathcal{K}_x(P)$.

Из канонического представления квадратичной формы следует, что при выполнении условия (i) характеристическое множество оператора $\text{Char}(P) = \{(x, \xi) \mid p_2(x, \xi) = 0, \xi \neq 0\}$ состоит из множества двукратно-характеристических (см. определение в [2, 3]) точек оператора:

$$\left\{ (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \mid p_2(x, \xi) = 0, d_\xi p_2(x, \xi) = 0 \right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{K}_x(P)$ ядро в точке $x \in \Omega$ квадратичной по $\xi \in \mathbb{R}^n$ формы $p_2(x, \xi)$:

$$\mathcal{K}_x(P) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \sum_{l,k=1}^n a_{l,k}(x) \eta_l \xi_k \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Для операторов P , удовлетворяющего условию (i), включение $(x, \xi) \in \text{Char}(P)$ равносильно включению $\xi \in \mathcal{K}_x(P)$ и $\xi \neq 0$.

Из условия (ii) следует, что множество

$$\mathcal{L}(P) = \left\{ (x, \tau) \in T(\Omega) \mid \xi(\tau) = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{K}_x(P) \right\}$$

образует $(n-1)$ -мерную дифференциальную систему в касательном пространстве $T(\Omega)$. Гладкую кривую $\Gamma = \{x(t) \in \Omega \mid t \in (a, b) \subset \mathbb{R}\}$ называют интегральной кривой для дифференциальной системы $\mathcal{L}(P)$, если в каждой точке $x \in \Gamma$ касательный к кривой вектор τ_x удовлетворяет условию $\tau_x \in \mathcal{L}(P)$.

При выполнении условия (iii) через каждую точку x множества Ω проходит интегральное подмногообразие $\Omega_{x, \mathcal{L}(P)}$ дифференциальной системы $\mathcal{L}(P)$ максимальной размерности $\dim \Omega_{x, \mathcal{L}(P)} = n-1$.

Говорят, что линейный дифференциальный оператор P является гипоеллиптическим на множестве Ω , если для любого открытого подмножества $V \subset \Omega$ из включений $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $Pu(x) \in C^\infty(V)$ следует включение $u(x) \in C^\infty(V)$.

Теорема 1. Если оператор P вида (1) удовлетворяет условиям (i)–(iv), то он является гипоеллиптическим на множестве Ω .

Говорят, что ростки функций $u^j(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $j = 1, 2$, равны в точке $x^0 \in \Omega$ и пишут $u_{x^0}^1 \cong u_{x^0}^2$, если существует открытая окрестность $V \subset \Omega$ этой точки, в которой $u^1(x) = u^2(x)$, т.е. для любой основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ с носителем $\text{supp } \varphi(x) \subset V$ выполняется равенство $\langle u^1, \varphi \rangle = \langle u^2, \varphi \rangle$.

Теорема 2. Если оператор P вида (1) удовлетворяет условиям (i)–(iv), то для любых $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ из равенства ростков $u_{x^0}^1 \cong u_{x^0}^2$ в точке x^0 вытекает равенство $u_x^1 \cong u_x^2$ во всех точках связной компоненты Π_{x^0} множества

$$\Omega_{x^0, \mathcal{L}(P)} \cap \{x \mid (Pu^1)_x \cong (Pu^2)_x\},$$

содержащей точку x^0 .

Пусть $\Gamma = \{x(t) \in \Omega \mid t \in (a, b) \subset \mathbb{R}\}$ — непрерывная кривая. Будем говорить, что ростки решений дифференциального уравнения

$$Pu = f \tag{2}$$

однозначно продолжаются вдоль Γ , если для любых двух обобщенных функций $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$, удовлетворяющих условию $Pu_x^1 \cong Pu_x^2$ при всех $x \in \Gamma$, из равенства ростков $u_{x^*}^1 \cong u_{x^*}^2$ в некоторой точке $x^* \in \Gamma$ следует, что $u_x^1 \cong u_x^2$ во всех точках $x \in \Gamma$.

Как следствие из теоремы 2 получаем теорему об однозначном продолжении ростков решений дифференциального уравнения вдоль интегральных кривых дифференциальной системы, ассоциированной со старшим символом.

Теорема 3. Если оператор P вида (1) удовлетворяет условиям (i)–(iv), то ростки решений дифференциального уравнения $Pu = f$ однозначно продолжаются вдоль интегральных кривых дифференциальной системы $\mathcal{L}(P)$.

Отметим, что утверждение теоремы можно формально усилить, заменив в его формулировке множество интегральных кривых на множество непрерывных кривых, содержащихся в интегральных слоях $\Omega_{x, \mathcal{L}(P)}$ дифференциальной системы $\mathcal{L}(P)$.

2. Доказательства теорем. Начнем с построения локальной замены координат к виду анизотропного оператора со взвешенными производными. В результате замены координат $x = x(y)$ старший символ оператора (1) преобразуется по хорошо известному закону

$$p_2(y, \eta) = p_2(x, J(x)\eta)|_{x=x(y)},$$

где $J(x)$ — матрица Якоби. При выполнении наложенных условий замену координат можно подобрать так, что оператор будет преобразован к специальному виду.

Лемма 1. Предположим, что оператор P вида (1) удовлетворяет условиям (i)–(iii). Тогда для любой точки $x^0 \in \Omega$ найдется локальная система координат $y = (y_1(x), \dots, y_{n-1}(x), \varphi(x))$, определенная в некоторой окрестности U точки x^0 , в которой оператор имеет следующий вид:

$$P = \sum_{l,k=1}^{n-1} \tilde{a}_{l,k}(y) \partial_{y_l} \partial_{y_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{b}_k(y) \partial_{y_k} + \frac{1}{i} p_{\text{sub}}(x, \varphi_x(x))|_{x=x(y)} \partial_{y_n} + \tilde{c}(y), \quad (3)$$

где $y_n = \varphi(x)$.

Доказательство. Из условий (ii) и (iii) следует, для любой точки $x^0 \in \Omega$ найдется локальная система координат $(y_1(x), \dots, y_{n-1}(x), y_n(x))$, определенная в окрестности U рассматриваемой точки, в которой интегральные многообразия дифференциальной системы задаются уравнениями вида $y_n = \text{const}$. В каждой точке $x \in U$ функция $\varphi(x) = y_n(x)$ удовлетворяет включению $\varphi_x(x) \in \mathcal{K}_x(P)$, равносильному системе дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{j,k}(x) \varphi_{x_k}(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда, во-первых, вытекает, что $\tilde{a}_{j,n}(y) = \tilde{a}_{n,j}(y) = 0$ при всех $j = 1, 2, \dots, n$, и, кроме того,

$$\sum_{j,k=1}^n a_{j,k}(x) \varphi_{x_j, x_k}(x) = - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{j,k}}{\partial x_j}(x) \varphi_{x_k}(x).$$

Из полученных равенств, очевидно, следует координатное представление (3).

Обозначим через y^0 и $\tilde{U}$ образы точки x^0 и ее окрестности U , индуцированные отображением $x \rightarrow y(x)$ соответственно. В операторе (3) произведем взвешивание производных. Операциям дифференцирования

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

по переменным y_j при $j = 1, \dots, n-1$ присвоим веса, равные 1, а дифференцированию

$$D_n = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_n}$$

по переменной y_n — вес 2. Взвешенный порядок рассматриваемого оператора равен 2, причем его взвешенный главный символ имеет вид

$$p_{2,w}(y, \eta) = - \sum_{l,k=1}^{n-1} \tilde{a}_{l,k}(y) \eta_l \eta_k + \tilde{a}_n(y) \eta_n,$$

где $\tilde{a}_n(y) = p_{\text{sub}}(x, \varphi_x(x))|_{x=x(y)}$. В силу условия (iv) коэффициент $\tilde{a}_n(y)$ отличен от нуля и принимает чисто мнимые значения.

В соответствии со взвешиванием, используя координаты (y, η) , определим в слоях кокасательного расслоения $T^*(U)(\cong \tilde{U} \times \mathbb{R}_\eta^n)$ действие мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$:

$$\lambda \circ (x; \eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \eta_n) = (x; \lambda \cdot \eta_1, \dots, \lambda \cdot \eta_{n-1}, \lambda^2 \cdot \eta_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}_\eta^n$ называют квазиконическим, если из включения $\eta \in \Gamma$ следует, что $\lambda \circ \eta \in \Gamma$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Введем в рассмотрение весовую функцию

$$|\eta|_w = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k^2 + |\eta_n| \right)^{1/2}.$$

Говорят, что точка $(y^*, \eta^*) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}_\eta^n$ не принадлежит взвешенному волновому фронту $WF_w(u)$ обобщенной функции $u(y) \in \mathcal{D}'(\tilde{U})$ и пишут $(y^*, \eta^*) \notin WF_w(u)$, если существуют такие окрестность $U_{y^*} \subset \tilde{U}$ точки y^* и квазиконическая окрестность Γ_{η^*} точки η^* , что для любых основной функции $v(y) \in \mathcal{D}(U_{y^*})$ и вещественного числа N найдется константа C , с которой для всех $\eta \in \Gamma_{\eta^*}$ выполняется оценка

$$|(u(y), v(y) \exp(i\langle y, \eta \rangle))| \leq C |\eta|^{-N},$$

где $\langle y, \eta \rangle = y_1 \eta_1 + \dots + y_{n-1} \eta_{n-1} + y_n \eta_n$. Очевидно, $u(y) \in C^\infty(\tilde{U})$, если и только если $WF_w(u) = \emptyset$.
Множество

$$\text{Char}(P) = \left\{ (y, \eta) \in \tilde{U} \times (\mathbb{R}_\eta^n \setminus \{0\}) \mid p_{2,w}(y, \eta) = 0 \right\}$$

характеристических точек анизотропного оператора (3) состоит из точек, в которых

$$- \sum_{l,k=1}^{n-1} \tilde{a}_{l,k}(y) \eta_l \eta_k = 0 \text{ и } \tilde{a}_n(y) \eta_n = 0.$$

Из условий (i) и (iv) следует, что оно пусто. □

2.1. Доказательство теоремы 1. Предположим, что $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $Pu(x) \in C^\infty(V)$. Достаточно доказать, что для любой точки $x^0 \in V$ найдется окрестность, в которой функция u является бесконечно дифференцируемой. В силу леммы 1 для x^0 найдется окрестность U и определенная в ней локальная замена координат, в которой оператор P имеет вид анизотропного оператора (3). Поскольку при сделанных предположениях множество характеристических точек оператора (3) является пустым, то в силу [1, теорема 1] для анизотропного волнового фронта функции u выполняется включение

$$WF_w(u) \cap (\tilde{U} \times \mathbb{R}_\eta^n) \subset WF_w(Pu) \cap (\tilde{U} \times \mathbb{R}_\eta^n).$$

Так как $Pu(x) \in C^\infty(U \cap V)$, то $WF_w(Pu) \cap (\widetilde{(U \cap V)} \times \mathbb{R}_\eta^n) = \emptyset$. Вследствие включения отсюда имеем $WF_w(u) \cap (\widetilde{(U \cap V)} \times \mathbb{R}_\eta^n) = \emptyset$ и, следовательно, $u \in C^\infty(U \cap V)$. Теорема доказана.

2.2. *Доказательство теоремы 2.* Положим $w = u^1(x) - u^2(x)$. Тогда по условию теоремы $w_{x^0} \cong 0$ и $Pw = 0$ в некоторой окрестности Ω_1 связной компоненты Π_{x^0} . В силу теоремы 1 $w(x) \in C^\infty(\Omega_1)$. Если утверждение теоремы не верно, то найдется точка $x^1 \in \Pi_{x^0}$, в которой $w_{x^1} \not\cong 0$. Пусть $\Gamma = \{x(t) \in \Pi_{x^0} \mid t \in [0, 1]\}$ — гладкий путь, соединяющий точки $x^0 = x(0)$ и $x^1 = x(1)$. Обозначим через

$$t^* = \sup\{t \in [0, 1] \mid w_{x(s)} \cong 0 \text{ при всех } s < t\}.$$

Поскольку $w_{x^1} \not\cong 0$, то $t^* \in (0, 1]$. Положим $x^* = x(t^*)$. В силу леммы 1 в некоторой окрестности U точки x^* заменой координат оператор P можно привести к виду анизотропного оператора (3). Сужая при необходимости окрестность точки x^* , можно добиться того, что пересечение $U \cap \Pi_{x^*}$ будет связным и содержать точку, в окрестности которой $w(x) = 0$, функция $w(x)$ будет бесконечно дифференцируемой в U и удовлетворять уравнению $Pw(x) = 0$.

Для завершения доказательства воспользуемся теоремой 4.4 из [4], предварительно проверив выполнение ее условий. В обозначениях [4] $\eta' = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ и $\eta'' = \eta_n$. Поскольку характеристическое множество анизотропного оператора пусто, то оператор является η' -квазиэллиптическим. Далее при всех неколлинеарных $(\eta', 0)$ и (ζ', ζ_n) квадратный многочлен

$$p_{2,w}(y, z\eta' + \zeta', \zeta_n) = -z^2 \langle \tilde{A}(y)\eta', \eta' \rangle - 2z \langle \tilde{A}(y)\eta', \zeta' \rangle - \langle \tilde{A}(y)\zeta', \zeta' \rangle + \tilde{a}_n(y)\zeta_n,$$

где

$$\langle \tilde{A}(y)\eta', \zeta' \rangle = \sum_{l,k=1}^{n-1} \tilde{a}_{l,k}(y)\eta'_l \zeta'_k,$$

ζ'_k не имеет вещественных корней. Кроме того, в силу условия (i) имеем

$$\frac{\langle \tilde{A}(y)\zeta', \zeta' \rangle}{\langle \tilde{A}(y)\eta', \eta' \rangle} = \frac{p_{2,w}(y, \zeta', 0)}{p_{2,w}(y, \eta', 0)} > 0$$

для любого $\zeta' \neq 0$. Отсюда следует, что дискриминант

$$4 \left(\langle \tilde{A}(y)\eta', \zeta' \rangle^2 - \langle \tilde{A}(y)\eta', \eta' \rangle \langle \tilde{A}(y)\zeta', \zeta' \rangle - \langle \tilde{A}(y)\eta', \eta' \rangle \tilde{a}_n(y)\zeta_n \right)$$

многочлена $p_{2,w}(y, z\eta' + \zeta', \zeta_n)$ отличен от нуля при всех $y \in U$ и неколлинеарных $(\eta', 0)$ и (ζ', ζ_n) и, следовательно, кратных корней на этом множестве параметров многочлен не имеет. Теперь, применяя [4, предложение 4.1 и теорема 4.4], получаем, что $\text{supp } w \cap (U \cap \Pi_{x^*}) = \emptyset$, т.е. $w_x \cong 0$ в точках $x \in U \cap \Pi_{x^*}$ и, в частности, $w_{x^*} \cong 0$. Последнее противоречит выбору точки x^* . Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грушин В. В., Шананин Н. А. Некоторые теоремы об особенностях решений дифференциальных уравнений со взвешенными главными символами // Мат. сб. — 1977. — 103, № 1. — С. 37–51.
2. Трев Ф. Введение в теорию псевдо-дифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. — М.: Мир, 1984.
3. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. — М.: Мир, 1984.
4. Шананин Н. А. Об однозначном продолжении решений дифференциальных уравнений со взвешенными производными // Мат. сб. — 2000. — 191, № 3. — С. 113–142.
5. Шананин Н. А. Об однозначном продолжении вдоль кривых ростков решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Мат. заметки. — 2017. — 102, № 1. — С. 152–157.
6. Шананин Н. А. Об однозначном продолжении ростков решений дифференциальных уравнений первого порядка вдоль кривых // Мат. заметки. — 2017. — 102, № 6. — С. 917–930.

Шананин Николай Алексеевич

Государственный университет управления, Москва

E-mail: nashananin@inbox.ru