Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Денисов, Об асимптотических свойствах решений итерированного уравнения теплопроводности, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 192, 155–160

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-155-160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:40:10

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ИТЕРИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2021 г. П. В. ДЕНИСОВ

Аннотация. Показано, что для некоторого класса решений итерированного уравнения теплопроводности справедливы теоремы о стабилизации.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, итерированное решение, асимптотическое свойство.

ON THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE ITERATED HEAT EQUATION

© 2021 P. V. DENISOV

ABSTRACT. In this paper, we prove that stabilization theorems are valid for a certain class of solutions of the iterated heat equation.

Keywords and phrases: heat equation, iterated solution, asymptotic property.

AMS Subject Classification: 35K05

Пусть $x = (x_1, \dots, x_N)$ — точка N -мерного евклидова пространства E^N . Введем в E^{N+1} множества

$$\{t > 0\} = \{x, t : x \in E^N, t > 0\}, \quad \{t \geq 0\} = \{x, t : x \in E^N, t \geq 0\}.$$

Символами Δ и Ω обозначим соответственно оператор Лапласа и оператор теплопроводности:

$$\Delta = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad \Omega = \Delta - \frac{\partial}{\partial t},$$

а символом $\Omega^{(p)}u$, $p \in \mathbb{N}$, — результат p -кратного повторного применения оператора Ω к функции $u(x, t) \in C^{2p,p}(t > 0)$ (см. [3]). Считаем по определению, что $\Omega^{(0)}u \equiv u$ в $\{t > 0\}$.

В полупространстве $\{t \geq 0\}$ рассмотрим следующую задачу (см. [3]):

$$\Omega^{(p)}u(x, t) = 0 \quad \text{в } \{t > 0\}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad p \geq 2, \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = f_0(x), \quad \Omega^{(k)}u(x, t)|_{t=0} = f_k(x), \quad k = 1, \dots, p-1, \quad (2)$$

где $f_k(x)$, $k = 0, \dots, p-1$, — заданные функции из $C(E^N)$, для которых выполнены условия А. Н. Тихонова (см. [4]): для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C(\varepsilon) > 0$, что при всех $x \in E^N$ справедливо неравенство

$$|f_k(x)| < C(\varepsilon)e^{\varepsilon|x|^2}, \quad k = 0, \dots, p-1. \quad (3)$$

В [3] установлено, что при сформулированных условиях существует и единственно решения задачи (1), (2); при этом справедлива формула

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^N} \int_{E^N} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) F(y, t) dy, \quad (4)$$

где

$$r^2 = |x - y|^2, \quad F(x, t) = \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l \frac{t^l}{l!} f_l(x). \quad (5)$$

Обозначим через $u_l(x, t)$ решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией $f_l(x)$:

$$\Omega u_l(x, t) = 0, \quad u_l(x, 0) = f_l(x); \quad (6)$$

тогда решение (4) задачи (1), (2) можно записать в виде

$$u(x, t) = \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l u_l(x, t) \frac{t^l}{l!}. \quad (7)$$

Пусть начальные функции $f_l(x)$, $l = 0, \dots, p-1$, являются гармоническими в E^N , т.е.

$$f_l(x) \in C^{(2)}(E^N), \quad \Delta f_l(x) = 0 \quad \forall x \in E^N.$$

Тогда, как легко видеть, решение задачи (1), (2) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^l f_l(x). \quad (8)$$

Ясно, что для решения (8) стабилизация не имеет места. Поэтому представляет интерес изучение стабилизации не самого решения $u(x, t)$ задачи (1), (2), а изучение равностабилизации, т.е. стабилизации разности

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u(x, t) - v(x, t)) = 0$$

для некоторой функции $v(x, t)$.

При фиксированном $x \in E^N$ рассмотрим шаровые средние Рисса (см. [1]) порядка $\alpha \geq 0$ функции $\varphi \in C(E^N)$:

$$S_R^\alpha \varphi(x) = \frac{C}{R^N} \int_{r \leq R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^\alpha u_0(y) dy, \quad (9)$$

где

$$C = \frac{2}{w_N B(N/2, \alpha + 1)}, \quad w_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}, \quad (10)$$

— площадь поверхности сферы единичного радиуса в E^N .

При фиксированных $x \in E^N$, $t > 0$, $\alpha > 0$ рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} v(x, t, \alpha) &:= \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^l S_{2\sqrt{t}\sqrt{\alpha}}^\alpha f_l(x) = \\ &= \frac{2}{B(N/2, \alpha + 1) w_N \alpha^{N/2}} \int_{|\sigma| \leq \sqrt{\alpha}} \left(1 - \frac{|\sigma|^2}{\alpha}\right)^\alpha \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^l f_l(x + 2\sqrt{t}\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (11)$$

Совершая замену переменных по формулам $y_k = x_k + 2\sqrt{t}\sigma_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, представим решение $u(x, t)$ задачи (1), (2) в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{E^N} e^{-|\sigma|^2} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^l f_l(x + 2\sqrt{t}\sigma) d\sigma. \quad (12)$$

Пусть все начальные функции $f_l(x)$, $l = 0, \dots, p-1$, имеют на бесконечности не более чем степенной рост, т.е.

$$|f_l(x)| \leq M(1 + |x|^m), \quad M > 0, \quad m > 0. \quad (13)$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (13) роста функций $f_l(x)$, $l = 0, \dots, p-1$, и

$$\alpha(t) = t^{m+p-1}, \quad (14)$$

где p — порядок уравнения (1), m — степень в оценке (13). Тогда решение $u(x, t)$ задачи (1), (2) и функция $v(x, t, \alpha(t))$, определенная равенством (11), равностабилизируется при $t \rightarrow \infty$ равномерно по x на каждом компакте K в E^N со скоростью не меньше, чем $t^{-m/2}$, т.е.

$$\sup_K |u(x, t) - v(x, t, \alpha(t))| \leq C \cdot t^{-m/2}, \quad t \geq t_0 > 0. \quad (15)$$

Следствие 1. Если существует предел решения задачи (1), (2)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = A(x) \quad (16)$$

равномерно по x на каждом компакте K в E^N , то при $\alpha(t)$ из равенства (14) и из оценки (15) следует, что существует равный ему предел функции (11):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(x, t, \alpha(t)) = A(x) \quad (17)$$

равномерно по x на каждом компакте K в E^N . Верно и обратное утверждение: если существует предел (17) равномерно по x на каждом компакте K в E^N , то из (15) вытекает, что существует равный ему предел (16) равномерно по x на любом компакте K в E^N .

Доказательство. Вычитая равенство (12) из равенства (11) и переходя под знаком интегралов к сферическим N -мерным координатам с центром в точке x , получим

$$\begin{aligned} Q \equiv u(x, t) - v(x, t, \alpha) &= \frac{2}{\Gamma(N/2)} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^{N-1} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l t^l}{l!} t^l M(x, 2\sqrt{t}\rho, f_l) d\rho - \\ &- \frac{2}{B(N/2, \alpha + 1)\alpha^{N/2}} \int_0^{\sqrt{\alpha}} \left(1 - \frac{\rho^2}{\alpha}\right)^\alpha \rho^{N-1} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l t^l}{l!} M(x, 2\sqrt{t}\rho f_l) d\rho, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$M(x, \rho, f_l) = \frac{1}{w_N \rho^{N-1}} \int_{|x-y|=\rho} f_l(y) dS_y \quad (19)$$

— сферическое среднее функций $f_l(x)$, $l = 0, \dots, p-1$, по поверхности сферы с центром в точке x радиуса ρ . Совершая в правой части (18) замену $\rho^2 = \sigma$, представим равенство (18) в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\Gamma(N/2)} \int_0^\alpha \sigma^{(N-2)/2} \left(e^{-\sigma} - \left(1 - \frac{\sigma}{\alpha}\right)^\alpha \right) \sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l t^l}{l!} M(x, 2\sqrt{t}\sqrt{\sigma}, f_l) d\sigma + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(N/2)} \int_\alpha^\infty \sigma^{(N-2)/2} e^{-\sigma} \left(\sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l t^l}{l!} M(x, 2\sqrt{t}\sqrt{\sigma}, f_l) \right) d\sigma + \\ &+ \left(\frac{1}{\Gamma(N/2)} - \frac{1}{B(N/2, \alpha + 1)\alpha^{N/2}} \right) \int_0^\alpha \sigma^{(N-2)/2} \left(1 - \frac{\sigma}{\alpha}\right)^\alpha \left(\sum_{l=0}^{p-1} \frac{(-1)^l t^l}{l!} M(x, 2\sqrt{t}\sqrt{\sigma}, f_l) \right) d\sigma = \\ &= K_1 + K_2 + K_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как все функции $f_l(x)$, $l = 0, \dots, p-1$, удовлетворяют условию степенного роста (13), а модуль усреднения (19) не превосходит модуля усредняемых функций $f_l(x)$, то получим неравенство

$$\left| M(x, 2\sqrt{t}\sqrt{\sigma}, f_l) \right| \leq C \left(1 + |x|^m + t^{m/2} \sigma^{m/2} 2^m \right). \quad (21)$$

Лемма 1. При $\alpha \geq 1$ и $0 \leq x \leq \alpha$ имеет место неравенство

$$0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)^\alpha \leq \frac{x^2}{\alpha} e^{-x}. \quad (22)$$

Доказательство. Левое неравенство в (22) имеет вид

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)^\alpha \leq e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq \alpha, \quad (23)$$

и хорошо известно. Докажем правое неравенство (22). Умножив (22) на e^x , получим

$$1 \leq e^x \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)^\alpha + \frac{x^2}{\alpha}. \quad (24)$$

Введем обозначение

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{\alpha} + e^x \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)^\alpha;$$

тогда неравенство (24) примет вид $\varphi(x) \geq 1$. Докажем, что $\varphi(x) \geq 1$ для $0 < x < \alpha$, для которых $\varphi'(x) = 0$.

Вычисляя производную $\varphi'(x)$ и приравнявая её нулю, находим

$$e^x \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)^{\alpha-1} = 2.$$

В нулях производной функции $\varphi(x)$ имеем

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{\alpha} + e^x \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right) = \frac{x^2}{\alpha} + 2 \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right) = \frac{(x-1)^2}{\alpha} + 2 - \frac{1}{\alpha} \geq 1.$$

Лемма 1 доказана. $\square$

Оценим слагаемые K_i , $i = 1, 2, 3$, в правой части (20). Применяя неравенства (21), (22), имеем

$$\begin{aligned} |K_1| &\leq \left(\sum_{l=0}^{p-1} \frac{(t)^l}{l!} \right) \frac{1}{\Gamma(N/2)} \int_0^\alpha \sigma^{\frac{N-2}{2}} \left(e^{-\sigma} - \left(1 - \frac{\sigma}{\alpha} \right)^\alpha \right) \left(1 + |x|^m + t^{m/2} \sigma^{m/2} 2^m \right) d\sigma \leq \\ &\leq \frac{pt^{p-1}C}{\alpha \cdot \Gamma(N/2)} \int_0^\alpha \sigma^{N/2+1} e^{-\sigma} \left(1 + |x|^m + t^{m/2} \sigma^{m/2} 2^m \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь и далее будем учитывать, что

$$\left(\sum_{l=0}^{p-1} \frac{(t)^l}{l!} \right) \leq pt^{p-1}, \quad t \geq 0. \quad (26)$$

Заменяя в интеграле (25) верхний предел α на $+\infty$, получим оценку

$$|K_1| \leq \frac{C_1 pt^{p-1}}{\alpha} \left(1 + |x|^m + t^{m/2} \right), \quad (27)$$

где C_1 зависит от N и m .

Оценим слагаемое K_2 в правой части (20). Используя оценки (21), (26) при $\sigma > \alpha$ и очевидные неравенства

$$e^{-\sigma} = e^{-\sigma/2} e^{-\sigma/2} \leq e^{-\alpha/2} e^{-\sigma/2} \leq \frac{2}{\alpha} e^{-\sigma/2},$$

получим:

$$\begin{aligned}
 |K_2| &\leq pt^{p-1} \frac{1}{\Gamma(N/2)} \int_{\alpha}^{\infty} \sigma^{(N-2)/2} e^{-\sigma} \left| M(x, 2\sqrt{t}\sqrt{\sigma}, f_l) \right| d\sigma \leq \\
 &\leq pt^{p-1} \cdot \frac{C}{\alpha \Gamma(N/2)} \int_0^{\infty} \sigma^{(N-2)/2} e^{-\sigma/2} \left[(1 + |x|^m + t^{m/2} \sigma^{m/2} 2^m) \right] d\sigma \leq \\
 &\leq \frac{C_2 pt^{p-1}}{\alpha} (1 + |x|^m + t^{m/2}), \quad (28)
 \end{aligned}$$

где C_2 зависит от N и m .

Оценим слагаемое K_3 в правой части (20), используя оценку (21), неравенство (23), а также следующую оценку из [2, лемма 2]:

$$0 < \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) - \alpha^{N/2} B\left(\frac{N}{2}, \alpha + 1\right) < \frac{C}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (29)$$

Из оценки (29) вытекает, что существует предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{N/2} B\left(\frac{N}{2}, \alpha + 1\right) = \Gamma\left(\frac{N}{2}\right). \quad (30)$$

Из (30) при достаточно больших α следует, что справедливо неравенство

$$\alpha^{N/2} B\left(\frac{N}{2}, \alpha + 1\right) > \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) - \frac{1}{2}. \quad (31)$$

Применяя неравенства (21), (23), (26), (29), (31), имеем

$$\begin{aligned}
 |K_3| &< \frac{\left| \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) - \alpha^{N/2} B\left(\frac{N}{2}, \alpha + 1\right) \right|}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) - \frac{1}{2} \right)} \frac{pt^{p-1}}{\alpha} \int_0^{\infty} \sigma^{(N-2)/2} e^{-\sigma} C \left(1 + |x|^m + t^{m/2} \sigma^{m/2} 2^m \right) d\sigma \leq \\
 &\leq \frac{C_3}{\alpha} pt^{p-1} (1 + |x|^m + t^{m/2}), \quad (32)
 \end{aligned}$$

где C_3 зависит от N и m .

Докажем оценку (15). Положим $\alpha(t) = t^{p-1+m}$, где p — порядок уравнения (1), а m — степень в оценке (13), и воспользуемся оценками (27), (28), (32). При этом получим искомую оценку (15):

$$\left| u(x, t) - v(x, t, \alpha(t)) \right| \leq C(K) t^{-m/2},$$

где

$$C(K) = \sup_{x \in K} C(1 + |x|^m).$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Пусть теперь функции $f_l(x)$, $l = 0, \dots, p-1$, в задаче (1), (2) являются непрерывными и ограниченными в E^N :

$$|f_l(x)| \leq C, \quad x \in E^N, \quad l = 0, \dots, p-1. \quad (33)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия ограниченности (33) и

$$\alpha(t) = t^{p-1} \beta(t), \quad (34)$$

где p — порядок уравнения (1), $\beta(t)$ — такая монотонно возрастающая функция, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 0. \quad (35)$$

Тогда решение задачи (1), (2) и функция $v(x, t, \alpha(t))$, определенная равенством (11), равностабилизируются при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по x в E^N со скоростью не менее, чем $1/\beta(t)$, т.е.

$$\sup_{x \in E^N} |u(x, t) - v(x, t, \alpha(t))| \leq \frac{C}{\beta(t)}. \quad (36)$$

Доказательство. Доказательство теоремы 2 очевидно вытекает из доказательства теоремы 1, так как оценки (27), (28), (32) при условии (33) и (34) переходят в оценки

$$|K_i| \leq \frac{C_i p t^{p-1}}{\alpha(t)} = \frac{C_i}{\beta(t)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (37)$$

Тогда из (37) и формулы (20) получим оценку

$$|u(x, t) - v(x, t, \alpha(t))| \leq \frac{C}{\beta(t)}, \quad C = C_1 + C_2 + C_3,$$

равномерно по x в E^N . Теорема 2 доказана. $\square$

Автор выражает глубокую признательность профессору М. В. Шамолину за постоянное внимание к работе и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов В. Н., Репников В. Д. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Диффер. уравн. — 1984. — 20, № 1. — С. 20–41.
2. Денисов В. Н., Шелепова Е. В. О скорости стабилизации параболического уравнения // Пробл. мат. анализ. — 2020. — 103. — С. 85–90.
3. Nicolescu M. Ecuatia iterata a caldurii // Stud. Cerc. Mat. — 1954. — 5, № 3-4. — P. 243–332.
4. Tychonoff A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Мат. сб. — 1935. — 42, № 2. — С. 199–216.

Денисов Петр Васильевич

Московский педагогический государственный университет

E-mail: denisov.piter@gmail.com