Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Баев, А. А. Бабайцев, В. Д. Харченко, Теорема об ограниченности одного класса псевдодифференциальных уравнений с вырождением, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-3-10>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:04:45

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 3–10
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-3-10

УДК 517.956

ТЕОРЕМА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2021 г. А. Д. БАЕВ, А. А. БАБАЙЦЕВ, В. Д. ХАРЧЕНКО

Аннотация. Статья посвящена доказательству теоремы об ограниченности для одного класса псевдодифференциальных уравнений с вырождением. Рассматривается новый класс переменных символов, зависящих также от комплексного параметра. Псевдодифференциальные операторы построены по специальному интегральному преобразованию. Теорема об ограниченности таких операторов доказывается в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор с вырождением, теорема об ограниченности, весовое пространство Соболева.

BOUNDEDNESS THEOREM FOR ONE CLASS OF PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATION

© 2021 А. Д. БАЕВ, А. А. BABAITSEV, V. D. KHARCHENKO

ABSTRACT. In this paper, we prove a boundedness theorem for one class of pseudodifferential equations with degeneration. We consider a new class of variable symbols depending on a complex parameter. Pseudodifferential operators are constructed by a special integral transformation. The boundedness theorem for these operators is proved in special weighted Sobolev-type spaces.

Keywords and phrases: pseudodifferential operator with degeneration, boundedness theorem, weighted Sobolev space.

AMS Subject Classification: 35S05

1. Введение. Вырождающиеся дифференциальные уравнения используются при моделировании различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Такие уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции — диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 14.Z50.31.0037) и Российского научного фонда (проект № 19.11.00197).

стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются также обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции — диффузии. Кроме того, известно, что нахождение решения краевой задачи для эллиптического уравнения эквивалентно минимизации некоторого функционала. В теории управления задача о минимуме некоторого функционала соответствует задаче об оптимальном управлении. Вырождающимся эллиптическим уравнениям соответствуют вырожденные или особые оптимальные управления.

Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [15]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [18]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [17] и М. И. Вишика [12]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [13]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [14], С. З. Левендорским [16], А. Д. Баевым, Р. А. Ковалевским, А. А. Бабайцевым [1–5, 7, 9, 10].

Настоящая работа посвящена доказательству теоремы об ограниченности одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим также от комплексного параметра.

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование F_α , введенное в [1]. Преобразование F_α позволяет ввести в рассмотрение специальный класс весовых псевдодифференциальных операторов. Весовые псевдодифференциальные операторы с постоянным по y символом были изучены в [1], а в [6, 8, 11] были исследованы некоторые классы весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом.

В работе исследуются весовые псевдодифференциальные операторы с переменным по t символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S_{\alpha,p}^\sigma$, $p \in Q = \{p \in \mathbb{C}, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Доказывается теорема об ограниченности таких операторов в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}_+^1$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp \left[i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)} \right] \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \quad (1)$$

которое определено первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1)$. Здесь $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит $\mathbb{R}_+^1$. Преобразование (1) и преобразование Фурье

$$F_{\tau \rightarrow \eta}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta\tau) d\tau, \quad \eta \in \mathbb{R}^1$$

связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau \rightarrow \eta}[u_\alpha(\tau)], \quad (2)$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции

$$\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$$

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} = \sqrt{2\pi}\|u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)}. \quad (3)$$

Равенство (3) дает возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(\mathbb{R}^1)$ и $L_2(\mathbb{R}_+^1)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}[w(\eta)]|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(t) \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^1)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)} \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$, $H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ (s — действительное число) состоит из всех функций пространства $L_2(\mathbb{R}_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v, |p|\|_{s,\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2 \right)^s \left| F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} [v(x, y)] \right|^2 d\xi d\eta, \quad (4)$$

зависящая от комплексного параметра $p \in Q = \{p \in \mathbb{C}, |\arg p| < \pi/2, |p| > 0\}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n)$ ($s \geq 0, q > 1$) состоит из всех функций $v(x, y) \in H_{s,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v, |p|\|_{s,\alpha,q} = \left\{ \sum_{l=0}^{[s/q]} \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_\alpha^{-1} \left[(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{(s-ql)/2} F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} [\partial_y^l v] \right] \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \right\}^{1/2}, \quad (5)$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $[s/q]$ — целая часть числа s/q .

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует такое число $\nu \in (0, 1]$, что

$$|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leq c < \infty, \quad t \in [0, +\infty).$$

Кроме того, $\alpha(y) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geq 2N - |\sigma|$, где

$$N \geq \max_{0 \leq p_1 \leq l} \left\{ 2p_1 + \frac{l - p_1 + 3/2}{\nu} + 1, \sigma + 1, \sigma + \frac{l}{2} \right\}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

σ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x \rightarrow \xi} = F_{x_1 \rightarrow \xi_1} F_{x_2 \rightarrow \xi_2} \dots F_{x_{n-1} \rightarrow \xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$G^{(\sigma)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t})v(x, t) = F_\alpha^{-1} F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [g(p, t, \xi, \eta) F_{x \rightarrow \xi} F_\alpha [v(x, t)]]. \quad (6)$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $g(p, t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора $G^{(\sigma)}(p, t, D_x, D_{\alpha, y})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha, \rho}^{\sigma, p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}_+^1$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, $p \in Q = \{p \in \mathbb{C}, |\arg p| < \pi/2, |p| > 0\}$, если функция $g(p, t, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in \mathbb{R}^1$, причем при всех $j = 0, 1, 2, \dots, l = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$\left| (\alpha(t) \partial_t)^j \partial_\eta^l \lambda(p, t, \xi, \eta) \right| \leq c_{jl} (|p|^2 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma - \rho l} \quad (7)$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta \in \mathbb{R}^1$, $\rho \in (0; 1]$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ — действительное число.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $g(p, t, \xi, \eta) \in S_{\alpha, \rho}^{m, p}(\Omega)$, m — действительное число, $p \in Q = \{p \in \mathbb{C}, |\arg p| < \pi/2, |p| > 0\}$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $G(p, t, D_x, D_{\alpha, t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m, \alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ в $H_{s, \alpha}(\mathbb{R}_+^n)$.

2. Схема доказательства теоремы 1. Заметим, что

$$\begin{aligned} \|G(p, t, \xi, D_{\alpha, t})u(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)}^2 &= \int_0^\infty \left| F_\alpha^{-1} [g(p, t, \xi, \eta) F_\alpha[u]] \right|^2 dt = \\ &= \int_0^\infty \left| \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1} [g(p, \varphi^{-1}(\tau), \xi, \eta) F_{\tau \rightarrow \eta}[u_\alpha(\tau)]] \right|^2 \Big|_{\tau=\varphi(t)} dt. \end{aligned}$$

Сделав замену переменной $t = \varphi^{-1}(\tau)$, получим $dt = (\varphi^{-1}(\tau))'_\tau d\tau = -\alpha(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)} d\tau$. Таким образом, получаем равенство

$$\begin{aligned} \|G(p, t, \xi, D_{\alpha, t})u(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)}^2 &= \int_{-\infty}^\infty \left| F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1} [g(p, \varphi^{-1}(\tau), \xi, \eta) F_{\tau \rightarrow \eta}[u_\alpha(\tau)]] \right|^2 d\tau = \\ &= \left\| F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1} [g(p, \varphi^{-1}(\tau), \xi, \eta) F_{\tau \rightarrow \eta}[u_\alpha(\tau)]] \right\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}^2 = \left\| G(p, \tau, \xi, D_\tau) u_\alpha(\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}^2. \quad (8) \end{aligned}$$

Следовательно, норма оператора $G(p, t, \xi, D_{\alpha, t})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+^1)$ равна норме оператора $G(p, \tau, \xi, D_\tau)$, определенного в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $g(p, t, \xi, \eta) \in S_{\alpha, \rho}^{0, p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}_+^1$, $p \in Q = \{p \in \mathbb{C}, |\arg p| < \pi/2, |p| > 0\}$. Тогда существует такая константа $c > 0$, что для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1)$ справедлива оценка

$$\|G(p, t, \xi, D_{\alpha, t})u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)} \leq c \|u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)} \quad (9)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от параметра p .

Доказательство. Докажем вначале теорему 2 при следующем дополнительном предположении. Будем считать, что $g(p, \varphi^{-1}(\tau), \xi, \eta) = 0$ при $|\tau - a| > A$, где $A > 0$ — некоторое число, $a \in \mathbb{R}^1$.

Рассмотрим равенство

$$f(\tau) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\tau\eta} p(\varphi^{-1}(\tau), \xi, \eta) F_{\tau \rightarrow \eta}[u_\alpha(\tau)] d\eta.$$

Перейдя в этом равенстве к преобразованию Фурье, получим

$$\tilde{f}(z) = \int_{-\infty}^\infty \tilde{g}_1(p, z - \eta, \xi, \eta) \tilde{u}_\alpha(\eta) d\eta, \quad (10)$$

где

$$g_1(p, \tau, \xi, \eta) = g(p, \varphi^{-1}(\tau), \xi, \eta), \quad \tilde{g}_1(p, z, \xi, \eta) = F_{\tau \rightarrow z}[g_1(p, \tau, \xi, \eta)], \quad \tilde{u}_\alpha(\eta) = F_{\tau \rightarrow \eta}[u_\alpha(\tau)].$$

С помощью интегрирования по частям в интеграле

$$\tilde{g}_1(p, z, \xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} g_1(p, \tau, \xi, \eta) d\tau$$

получим, что с некоторыми константами $c > 0$ выполняются неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_1(p, z - \eta, \xi, \eta)| d\eta \leq c \int \frac{d\eta}{(|p| + |\eta|)^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_1(p, z - \eta, \xi, \eta)| dz \leq c \int \frac{dz}{(|p| + |z|)^2}.$$

Отсюда и из (10) выводим неравенство

$$\|\tilde{f}(z)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \leq c \|u_\alpha(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}. \quad (11)$$

Заметив, что

$$\|u_\alpha(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} = \|u(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)}, \quad (12)$$

получаем из (11) утверждение теоремы 2 при дополнительном предположении.

Докажем теперь теорему 2 в общем случае. Выберем некоторое $A > 0$ и установим, что для любого $a \in \mathbb{R}^1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_{|\tau-a| \leq A} |G(p, \tau, \xi, D_\tau) u_\alpha(\tau)|^2 d\tau &\leq \\ &\leq c \left\{ \int_{|\tau-a| \leq 3A} |u_\alpha(\tau)|^2 d\tau + \int_{|\tau-a| \leq A} \left(\int_{-\infty}^{\infty} r(p, \tau - y) |u(y)| dy \right)^2 d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $r(p, z) = (|p| + |z|)^{-2}$. Константа c не зависит от выбора функции $u(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1)$ и $a \in \mathbb{R}^1$. Пусть $\varphi(\tau)$ — такая основная функция с носителем в шаре $|\tau| \leq 3A$, что $\varphi(\tau) = 1$ в шаре $|\tau| \leq 2A$, причем $|\varphi(\tau)| \leq 1$. Тогда для оператора $\varphi(\tau - a)P(\tau, \xi, D_\tau)$ символ равен нулю при $|\tau - a| > 3A$ и мы можем воспользоваться доказанной только что оценкой:

$$\|\varphi(\tau - a)G(p, \tau, \xi, D_\tau)v_\alpha(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \leq c \|v_\alpha(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} = c \|v(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)}, \quad (14)$$

причем из предыдущих рассуждений видно, что константа $c > 0$ не зависит от $v(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1)$ и $a \in \mathbb{R}^1$.

Обозначим $f(p, \tau) = G(p, \tau, \xi, D_\tau)u_\alpha(\tau)$ и заметим, что при $|\tau - a| \leq 2A$ справедливо равенство

$$f(p, \tau) = \varphi(\tau - a)G(p, \tau, \xi, D_\tau)[\varphi(\tau - a)u_\alpha(\tau)] + G(p, \tau, \xi, D_\tau)[(1 - \varphi(\tau - a))u_\alpha(\tau)].$$

Воспользовавшись неравенством (14), получим оценку

$$\left\| \varphi(\tau - a)G(p, \tau, \xi, D_\tau)[\varphi(\tau - a)u_\alpha(\tau)] \right\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \leq c \|\varphi(\tau - a)u_\alpha(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)};$$

следовательно,

$$\int_{|\tau-a| \leq A} \left| g(p, \tau, \xi, D_\tau)[\varphi(\tau - a)u_\alpha(\tau)] \right|^2 d\tau \leq c \int_{|\tau-a| \leq 3A} |u_\alpha(\tau)|^2 d\tau. \quad (15)$$

Так как $1 - \varphi(\tau - a) = 0$ в шаре $|\tau - a| \leq 2A$, то

$$G(p, \tau, \xi, D_\tau)[(1 - \varphi(\tau - a))u_\alpha(\tau)] = \int_{|y-a| > 2A} k(p, \tau, \xi, \tau - y)(1 - \varphi(y - a))u_\alpha(y) dy,$$

где $k(p, \tau, \xi, z)$ — ядро псевдодифференциального оператора $G(p, \tau, \xi, D_\tau)$.

Заметим, что

$$|\partial_\tau^i \partial_\eta^l g(p, \varphi^{-1}(\tau), \xi, \eta)| \leq c_{il} (|p| + |\xi| + |\eta|)^{m-\rho l}.$$

По определению ядра имеем

$$k(p, \tau, \xi, z) = F_{\eta \rightarrow z}^{-1} [g(p, \varphi^{-1}(\tau), \xi, \eta)].$$

Так как преобразование Фурье любой абсолютно интегрируемой функции является непрерывной и ограниченной функцией, то можно утверждать, что функция $z^q \partial_\tau^i \partial_z^j k(p, \tau, \xi, z)$ для любых i, j при $q > m + j + 1$ будет непрерывной и ограниченной функцией при всех $\tau \in \mathbb{R}^1$, $z \in \mathbb{R}^1$ и

$$|z|^q |\partial_\tau^i \partial_z^j k(p, \tau, \xi, z)| \leq c_{ij} < \infty,$$

т.е. при всех $z \neq 0$ справедливо неравенство

$$|\partial_\tau^i \partial_z^j k(p, \tau, \xi, z)| \leq c_{ij} |z|^{-q}. \quad (16)$$

Из (16) получим, что

$$|k(p, \tau, \xi, \tau - y)| \leq c (|p| + |\tau - y|)^{-2} \quad \text{при } |\tau - y| \geq A.$$

Отсюда при $|\tau - a| \geq A$ получаем, что

$$\left| G(p, \tau, \xi, D_\tau) [(1 - \varphi(\tau - a)) u_\alpha(\tau)] \right| \leq c \int_{-\infty}^{\infty} (|p| + |\tau - y|)^{-2} |u(y)| dy. \quad (17)$$

Неравенство (13) вытекает теперь из неравенств (15) и (17).

Чтобы закончить доказательство теоремы, достаточно в неравенстве (13) выбрать $A = 1$ и просуммировать неравенства (13) по всем a , принадлежащим множеству целых чисел. Так как отрезки $|\tau - a| \leq 1$ покрывают все $\mathbb{R}^1$, причем каждая точка $\tau \in \mathbb{R}^1$ принадлежит не более чем двум таким отрезкам, то получим, что с некоторой константой выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(p, \tau, \xi, D_\tau) u_\alpha(\tau)|^2 d\tau \leq c \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |u_\alpha(\tau)|^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (|p| + |\tau - y|)^{-2} |u_\alpha(y)| dy \right)^2 d\tau \right\}.$$

Остается заметить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (|p| + |\tau - y|)^{-2} |u_\alpha(y)| dy \right)^2 d\tau \leq c \int_{-\infty}^{\infty} |u_\alpha(\tau)|^2 d\tau = c \int_0^\infty |u(t)|^2 dt. \quad \square$$

Теорема 3. Пусть $g(p, t, \xi, \eta) \in S_{\alpha, p}^m(\Omega)$ ($m \in \mathbb{R}$), $\Omega \subset \bar{\mathbb{R}}_+^1$, $p \in Q = \{p \in \mathbb{C}, |\arg p| < \pi/2, |p| > 0\}$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $G(p, t, \xi, D_{\alpha, t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m, \alpha}(\mathbb{R}_+^1)$ в $H_{s, \alpha}(\mathbb{R}_+^1)$.

Доказательство. Из (8) вытекает, что достаточно доказать, что оператор $G(p, \tau, \xi, D_\tau)$, определенный в (11), является ограниченным оператором из $H_{s+m}(\mathbb{R}^1)$ в $H_s(\mathbb{R}^1)$.

Обозначим через $\Lambda^s(p, \xi, D_\tau)$ псевдодифференциальный оператор вида

$$\Lambda^s(p, \xi, D_\tau) u_\alpha(\tau) = F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1} \left[(|p| + |\xi| + |\eta|)^s F_{\tau \rightarrow \eta} [u_\alpha(\tau)] \right]. \quad (18)$$

Заметим, что для функции $u(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1)$ справедливо равенство

$$\|G(p, \tau, \xi, D_\tau) u_\alpha(\tau)\|_s = \left\| \Lambda^s(p, \xi, D_\tau) G(p, \tau, \xi, D_\tau) \Lambda^{-m-s}(p, \xi, D_\tau) v(\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}, \quad (19)$$

где $v(\tau) = \Lambda^{s+m}(p, \xi, D_\tau) u_\alpha(\tau)$, $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве $H_s(\mathbb{R}^1)$.

Заметим, что $\Lambda^s(p, \xi, D_\tau)G(p, \tau, \xi, D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p, \xi, D_\tau)$ — псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_{\rho}^{0,p}$. Таким образом, из (19) в силу теоремы 2 получим

$$\begin{aligned}\|G(p, \tau, \xi, D_{\alpha,t})u\|_{s,\alpha} &= \|G(p, \tau, \xi, D_\tau)u_\alpha(\tau)\|_s = \\ &= \left\| \Lambda^s(p, \xi, D_\tau)G(p, \tau, \xi, D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p, \xi, D_\tau)v(\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \leq \\ &\leq c\|v(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \leq c\|u(t), |p|\|_{s+m,\alpha}.\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баяев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы // Докл. АН СССР. — 1982. — 265, № 5. — С. 1044–1046.
2. Баяев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // Докл. РАН. — 2008. — 422, № 6. — С. 727–728.
3. Баяев А. Д., Бахтина Ж. И., Бунеев С. С., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А. О существовании решений граничных задач в полупространстве для некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — 2. — С. 64–76.
4. Баяев А. Д., Бахтина Ж. И., Бунеев С. С., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А. Об априорных оценках решений граничных задач для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — 2. — С. 77–92.
5. Баяев А. Д., Бахтина Ж. И., Бунеев С. С., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А., Леженина И. Ф., Глушко А. В. Об априорных оценках решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — 3. — С. 64–76.
6. Баяев А. Д., Кобылинский П. А. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов // Докл. РАН. — 2015. — 460, № 2. — С. 133–135.
7. Баяев А. Д., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А., Харченко В. Д. О существовании решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — 4. — С. 51–66.
8. Баяев А. Д., Ковалевский Р. А., Кобылинский П. А. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением // Докл. РАН. — 2016. — 471, № 4. — С. 387–390.
9. Баяев А. Д., Найдюк Ф. О., Бабайцев А. А., Харченко В. Д., Леженина И. Ф., Плетнева О. К. О некоторых начально-краевых задачах для вырождающихся параболических уравнений // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2019. — 1. — С. 59–69.
10. Баяев А. Д., Панков В. В., Харченко В. Д. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — 4. — С. 161–171.
11. Баяев А. Д., Работинская Н. И. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов // Докл. РАН. — 2017. — 477, № 1. — С. 7–10.
12. Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Мат. сб. — 1954. — 35 (77), № 33. — С. 513–568.
13. Вишик М. И., Грушин В. В. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы // Усп. мат. наук. — 1970. — 25, № 4. — С. 29–56.
14. Глушко В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // в кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. Тр. семин. акад. С. Л. Соболева. — Новосибирск, 1978. — С. 49–68.
15. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. — 1951. — 77, № 2. — С. 181–183.
16. Левендорский С. З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе // Мат. сб. — 1980. — 111 (153), № 4. — С. 483–501.

17. *Михлин С. Г.* Вырождающиеся эллиптические уравнения// Вестн. Ленинград. ун-та. — 1954. — 8. — С. 19–48.
18. *Олейник О. А.* Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области// Докл. АН СССР. — 1952. — 87, № 6. — С. 885–887.

Баев Александр Дмитриевич
Воронежский государственный университет
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бабайцев Андрей Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: 259608@mail.ru

Харченко Виктория Дмитриевна
Воронежский государственный университет
E-mail: dmitrieva9696@gmail.com