Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Бесова, Голоморфная регуляризация в теории краевых задач, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 11–16

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-11-16>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:12:53

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 11–16
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-11-16

УДК 517.925

ГОЛОМОРФНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© 2021 г. М. И. БЕСОВА

Аннотация. Метод голоморфной регуляризации сингулярных возмущений применен для изучения краевой задачи для уравнения второго порядка. Доказано, что после точного описания сингулярностей регулярная часть решения аналитически зависит от параметра.

Ключевые слова: тихоновская система, голоморфная регуляризация, аналитический интеграл, псевдоголоморфное решение.

HOLOMORPHIC REGULARIZATION IN THE THEORY OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

© 2021 M. I. BESOVA

ABSTRACT. The method of holomorphic regularization of singular perturbations is applied to a boundary-value problem for a second-order equation. We prove that after an precise description of singularities, the regular part of the solution depends analytically on the parameter.

Keywords and phrases: Tikhonov system, holomorphic regularization, analytic integral, pseudoholomorphic solution.

AMS Subject Classification: 34B15

1. Введение. В настоящее время для решения краевых сингулярно возмущенных задач наиболее широко используется метод погранфункций Васильевой—Бутузова—Нефедова (см. [1]). Для доказательства существования решения на всем промежутке задания уравнения в нем применяется метод дифференциальных неравенств, в основе которого заложены идеи Чаплыгина и Нагумо [2, 9] о верхних и нижних решениях. Для построения решения краевой задачи используется «метод стрельбы», законность применения которого фактически означает существование решения соответствующей начальной задачи на всем промежутке. В данной работе изложен подход, связанный с голоморфной регуляризацией сингулярно возмущенных задач [3, 4]. Этот подход является продолжением идей С. А. Ломова о существовании, при определенных условиях, решений, представимых сходящимися в обычном смысле рядами по степеням малого параметра [6–8]. Такие решения называются псевдоаналитическими (псевдоголоморфными) и ранее строились преимущественно для начальных задач, причем локально [3–5], поэтому в работе применяется алгоритм псевдоголоморфного продолжения решений.

2. Метод голоморфной регуляризации и аналитические по параметру интегралы. Исследуем на отрезке $[0, 1]$ следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' &= f(x, y, y'), \quad 0 < x < 1, \\ a_1 y(0) - a_2 y'(0) &= a, \quad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = b, \\ a_2 \geq 0, \quad b_2 \geq 0, \quad a_1^2 + a_2^2 &> 0, \quad b_1^2 + b_2^2 > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с малым положительным параметром ε . Сведем задачу (1) к краевой задаче для тихоновской системы [1, 5] с одной быстрой и одной медленной переменной:

$$\begin{cases} y' = v, \\ \varepsilon v' = f(x, y, v), \end{cases} \quad (2)$$

$$a_1 y(0) - a_2 v(0) = a, b_1 y(1) + b_2 v(1) = b.$$

В соответствии с методом голоморфной регуляризации, перейдем от нелинейной системы к линейному уравнению ее интегралов [3, 5]:

$$\varepsilon L U + f(x, y, v) U_v = 0, \quad (3)$$

где $L = \partial_x + v \partial_y$ — дифференциальный оператор первого порядка в частных производных. Будем считать оператор L подчиненным оператору $f \partial_v$, и в этом случае решение уравнения (3) ищем в виде регулярного ряда по степеням малого параметра:

$$U(x, y, v, \varepsilon) = U_0(x, y, v) + \varepsilon U_1(x, y, v) + \dots + \varepsilon^n U_n(x, y, v) + \dots \quad (4)$$

Применив метод неопределенных коэффициентов, получаем следующую серию задач:

$$\begin{aligned} (f \partial_v) U_0 &= 0 \\ (f \partial_v) U_1 &= -L U_0 \\ (f \partial_v) U_2 &= -L U_1 \\ &\dots \\ (f \partial_v) U_n &= -L U_{n-1} \\ &\dots \end{aligned} \quad (5)$$

Зададим для функции $f(x, y, v)$ условия (α) : $f(x, y, v)$ аналитична на ограниченной замкнутой области $\overline{\Omega}_{xyv} \subset \mathbb{R}^3$, $f(x, y, v) \neq 0 \forall (x, y, v) \in \Omega_{xyv}$ и обращается в нуль на ее границе Λ . Предположим также, что отрезок $[0, 1]$ принадлежит $\overline{\Omega}_{xyv}$ и ее проекции $\overline{\omega}_{xy}$ на пространство $\mathbb{R}^2$. В качестве решения первого уравнения серии (5) рассмотрим произвольную функцию $\psi(x, y)$, аналитическую на замкнутой области $\overline{\omega}_{xy}$. Обозначим через $\tilde{v}$ значение быстрой переменной w на левом конце отрезка задания уравнения и потребуем, чтобы $U_n(x, y, \tilde{v}) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. В результате имеем:

$$\begin{aligned} U_1(x, y, v) &= - \int_{\tilde{v}}^v \frac{L_1 \psi dv_1}{f(x, y, v_1)}, \quad L_1 = \partial_x + v_1 \partial_y; \\ U_2(x, y, v) &= \int_{\tilde{v}}^w \left[L_1 \int_{\tilde{v}}^{v_1} \frac{L_2 \psi dv_2}{f(x, y, v_2)} \right] \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)}, \quad L_2 = \partial_x + v_2 \partial_y; \\ U_3(x, y, v) &= - \int_{\tilde{v}}^v \left[L_1 \int_{\tilde{v}}^{v_1} \left[L_2 \int_{\tilde{v}}^{v_2} \frac{L_3 \psi dv_3}{f(x, y, v_3)} \right] \frac{dv_2}{f(x, y, v_2)} \right] \frac{dv_1}{f(x, y, v_1)}, \quad L_3 = \partial_x + v_3 \partial_y; \\ &\dots \end{aligned} \quad (6)$$

Перепишем формулы (6), введя следующие обозначения:

$$I_k g = \int_{\tilde{v}}^{v_k} \frac{g(x, y, v_{k+1}) dv_{k+1}}{f(x, y, v_{k+1})}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где положим $v_0 = v$. В этих обозначениях

$$U(x, y, v, \tilde{v}, \varepsilon) = \psi - \varepsilon I_0(L_1 \psi) + \varepsilon^2 I_0(L_1 I_1(L_2 \psi)) - \varepsilon^3 I_0(L_1 I_1(L_2 I_2(L_3 \psi))) + \dots \quad (7)$$

Сходимость этого степенного ряда доказана в работе [5]. Таким образом, установлено существование в области Ω_{xyv} аналитических по малому параметру интегралов системы (2). В данной

работе будет рассмотрен случай, когда $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = a = b = 0$ (задача Дирихле). Пусть $v = F(x, y)$ является корнем уравнения $f(x, y, v) = 0$, аналитическим в области $\overline{\omega_{xy}}$, а $\overline{y}(x)$ — решением задачи Коши

$$y' = F(x, y), \quad y(0) = 0,$$

которое аналитично на отрезке $[0, 1]$. Положив $\psi(x, y)$ равной $\varphi(x)$, аналитической на отрезке $[0, 1]$ и такой, что $\varphi(0) = 0$, а затем равной $y - \overline{y}(x)$, построим два независимых интеграла:

$$\begin{aligned} U^{[1]}(x, y, v, \tilde{v}, \varepsilon) &= \varphi(x) - \varepsilon(I_0\varphi') + \varepsilon^2 I_0(L_1(I_1\varphi')) - \varepsilon^3 I_0(L_1 I_1(L_2(I_2\varphi'))) + \dots \\ U^{[2]}(x, y, v, \tilde{v}, \varepsilon) &= y - \overline{y}(x) - \varepsilon I_0(v_1 - \overline{y}') + \varepsilon^2 I_0(L_1 I_1(v_2 - \overline{y}')) - \dots \end{aligned} \quad (8)$$

3. Псевдоголоморфные решения и их продолжения.

Определение 1. Решение $y(x, \varepsilon)$ краевой задачи (1) называется псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$, если существует функция $Y(x, \eta, \varepsilon)$, аналитическая по третьей переменной в точке $\varepsilon = 0$ при каждом $x \in [0, 1]$ и каждом η из некоторого неограниченного множества T , и такая, что для некоторой функции $\varphi(x)$ выполняется равенство для

$$y(x, \varepsilon) = Y(x, \varphi(x)/\varepsilon, \varepsilon), \quad \forall x \in [0, 1],$$

когда ε принадлежит достаточно малой окрестности значения $\varepsilon = 0$.

Сформулируем достаточные условия существования псевдоголоморфного решения у краевой задачи.

Теорема 1. Пусть аналитическая на отрезке $[0, 1]$ функция $\varphi(x)$ такова, что $\varphi(0) = 0$, и уравнение

$$\varphi'(x) \int_{\tilde{v}}^v \frac{dv_1}{f(x, \overline{y}(x), v_1)} = \varphi(x)/\varepsilon$$

имеет решение вида

$$v = V_0(x, \Psi(\varphi(x)/\varepsilon), \tilde{v}),$$

в котором $q = \Psi(\eta)$ — целая функция с асимптотическим значением, равным p_0 , и функция $V_0(x, q, \tilde{v})$ является аналитической на параллелепипеде $\Pi_0 = [0, 1] \times Q \times G$, где Q и G — отрезки, причем Q содержит точки $\Psi(0)$ и p_0 . Тогда решение $y(x, \varepsilon)$ краевой задачи (1) является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Вначале необходимо доказать, что при любом $\tilde{v} \in G$ на всем отрезке $[0, 1]$ существует решение задачи Коши

$$\varepsilon y'' = f(x, y, y'); \quad y(0, \varepsilon) = 0, \quad y'(0, \varepsilon) = \tilde{v} \quad (9)$$

при достаточно малом положительном ε . Сведем задачу (9) к начальной задаче для системы

$$\begin{cases} y' = v, \\ \varepsilon v' = f(x, y, v); \\ y(0, \varepsilon) = 0, \\ v(0, \varepsilon) = \tilde{v}, \end{cases} \quad (10)$$

и запишем первые интегралы этой системы:

$$\begin{cases} \tilde{U}^{[1]}(x, y, v, \tilde{v}, \varepsilon) = \varphi(x)/\varepsilon \\ y = \overline{y}(x) + \varepsilon \tilde{U}^{[2]}(x, y, v, \tilde{v}, \varepsilon), \end{cases} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{[1]} &= I_0\varphi' - \varepsilon I_0(L_1(I_1\varphi')) + \varepsilon^2 I_0(L_1 I_1(L_2(I_2\varphi'))) - \dots; \\ \tilde{U}^{[2]} &= I_0(v_1 - \overline{y}') - \varepsilon I_0(L_1 I_1(v_2 - \overline{y}')) + \dots \end{aligned}$$

Вычислим значения функции Ψ от левой и правой частей первого из уравнений системы (11):

$$\Psi(\tilde{U}^{[1]}(x, y, v, \tilde{v}, \varepsilon)) = \Psi(\varphi(x)/\varepsilon).$$

Обозначим правую часть через q и в левой части выделим главный член. В итоге имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \Psi(I_0\varphi') + \varepsilon\Phi(x, y, v, \tilde{v}, \varepsilon) = q, \\ y = \bar{y}(x) + \varepsilon\tilde{U}^{[2]}(x, y, v, \tilde{v}, \varepsilon). \end{cases} \quad (12)$$

Возьмем $p > p_0$ очень близким к p_0 , предположим, что $p_0 < \Psi(0)$ и построим параллелепипед $\Pi = [0, 1] \times [p, \Psi(0)] \times G$. Поскольку $W_0(x, q, \tilde{v})$ аналитична на замкнутом параллелепипеде Π_0 , то оценка ее модуля не зависит от p . Нетрудно видеть, что для системы (12) выполняются все условия теоремы о неявной функции и при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{cases} v = V_0(x, q, \tilde{v}), \\ y = \bar{y}(x). \end{cases}$$

Отсюда можно утверждать, что в некой окрестности $\sigma_{xq\tilde{v}}$ каждой точки $(x, q, \tilde{v}) \in \Pi$ существует решение

$$\begin{cases} v = V(x, q, \tilde{v}, \varepsilon), \\ y = Y(x, q, \tilde{v}, \varepsilon), \end{cases} \quad (13)$$

системы (12), аналитическое в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$. Выберем из покрытия $\{\sigma_{xq\tilde{v}}\}$ параллелепипеда Π конечное подпокрытие, тогда функции (13) будут аналитическими в наименьшей окрестности $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, соответствующей этому подпокрытию. Обозначим через $\tilde{\Pi}$ прямоугольник, являющийся проекцией Π на плоскость переменных (x, q) . Если величина параметра ε в уравнении (1) удовлетворяет неравенству $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, и кривая Γ , описываемая уравнением $q = \Psi(\varphi(x)/\varepsilon)$, целиком принадлежит $\tilde{\Pi}$, то решение $(y(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon))$ системы (10) представимо в виде рядов:

$$\begin{cases} y(x, \varepsilon) = \bar{y}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Y_n(x, \Psi(\varphi(x)/\varepsilon), \tilde{v}), \\ w(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x, \Psi(\varphi(x)/\varepsilon), \tilde{v}), \end{cases} \quad (14)$$

равномерно сходящихся на отрезке $[0, 1]$. В случае, если прямоугольнику $\tilde{\Pi}$ принадлежит только часть кривой Γ , соответствующая $x \in [0, x_1]$ ($0 < x_1 < 1$), то ряды (14) сходятся равномерно лишь на $[0, x_1]$. Обозначим это решение через $(y^{[0]}(x, \varepsilon), v^{[0]}(x, \varepsilon))$. В этом случае его нужно продолжить вправо, для чего применим алгоритм псевдоголоморфного продолжения. Решим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{dy^{[1]}}{dx} = v^{[1]}, \\ \varepsilon \frac{dv^{[1]}}{dx} = f(x, y^{[1]}, v^{[1]}), \\ y^{[1]}(x_1, \varepsilon) = y^{[0]}(x_1, \varepsilon), \\ v^{[1]}(x_1, \varepsilon) = v^{[0]}(x_1, \varepsilon). \end{cases} \quad (15)$$

Запишем систему, аналогичную системе (11) первых интегралов:

$$\begin{cases} \tilde{U}^{[1]}(x, y^{[1]}, v^{[1]}, v(x_1, \varepsilon), \varepsilon) = (\varphi(x) - \varphi(x_1))/\varepsilon, \\ y = \bar{y}(x) + \varepsilon\tilde{U}^{[2]}(x, y^{[1]}, v^{[1]}, v(x_1, \varepsilon), \varepsilon). \end{cases} \quad (16)$$

Она задает неявно решение $(y^{[1]}(x, \varepsilon), v^{[1]}(x, \varepsilon))$ системы (16). В итоге решение $(y^{[0]}(x, \varepsilon), v^{[0]}(x, \varepsilon))$ продолжится на некоторый отрезок $[x_1, x_2]$, причем псевдоголоморфным образом, и т. д. Не ограничивая общности, будем предполагать, что регуляризирующая функция $\varphi(x)$, описывающая погранслои, строго монотонно убывает на промежутке $[0, 1]$ (например, в методе погранфункций $\varphi(x) = -x$), а функция Ψ , напротив, на интервале $(p_0, \Psi(0))$ строго возрастает (в большинстве

случаев это экспонента) [1, 7]. При продолжении с помощью систем, аналогичных (16), получим цепочку следующих равенств:

$$\frac{\varphi(x_1)}{\varepsilon} = \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{\varepsilon} = \dots = \frac{\varphi(x_m) - \varphi(x_{m-1})}{\varepsilon} = \dots, \quad m = 2, 3, \dots, j.$$

По формуле Лагранжа $\varphi'(\tilde{x}_m)(x_m - x_{m-1}) = \varphi(x_1)$, где $\tilde{x}_m \in (x_{m-1}, x_m)$, $m = \overline{2, j}$. Так как $\varphi(x)$ голоморфна на отрезке $[0, 1]$, то $|\varphi'(x)| \leq l \quad \forall x \in [0, 1]$ для некоторой константы l , а значит, $x_m - x_{m-1} \geq |\varphi(x_1)|/l$ при каждом $m \in \{1, 2, 3, \dots, j\}$. Таким образом, точки $x = 1$ можно достичь за конечное число шагов. В итоге решение $y^{[0]}(x, \varepsilon)$ будет продолжено на весь отрезок, а под решением начальной задачи (10) будем понимать совокупность элементов $(y^{[0]}(x, \varepsilon), y^{[1]}(x, \varepsilon), \dots, y^{[j]}(x, \varepsilon))$.

Поскольку каждый элемент зависит от $\tilde{v}$, то

$$y^{[j]}(x, \varepsilon) = T^{[j]}(x, (\varphi(x) - \varphi(x_{j-1}))/\varepsilon, \tilde{v}),$$

откуда вытекает уравнение для определения $\tilde{v}$:

$$T^{[j]}(1, (\varphi(1) - \varphi(x_{j-1}))/\varepsilon, \tilde{v}) = 0.$$

Одно из найденных значений подставим в формулы для $y^{[m]}(x, \varepsilon) (\overline{m} = \overline{1, j})$ и получим псевдо-голоморфное решение $y(x, \varepsilon)$ краевой задачи (1). Теорема доказана. $\square$

Приведем пример нахождения $y^{[0]}(x, \varepsilon)$ первого порядка, удовлетворяющего краевым условиям. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y'' = x^2 + y^2/4 + (y')^2 - 4, \quad x \in [0, 1], \quad y(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon) = 0.$$

Здесь предельная задача

$$y' = \sqrt{4 - x^2 - y^2/4}, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 0.$$

Докажем существование решения этой задачи на всем отрезке с помощью теоремы Чаплыгина [2]. Поскольку $0 \leq y'(x) \leq 2$, то $0 \leq y(x) \leq 2$. Далее, $\tilde{f}(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2/4}$ аналитична вместе со своей частной производной по y на прямоугольнике $[0, 1] \times [0, 2]$, и легко построить нижнее и верхнее решения: $\overline{y}_n = 2\sqrt{3}\sin(x/2)$, $\overline{y}_b = 4\sin(x/2)$. Значит, решение $\overline{y}(x)$ существует на всем промежутке. Вернемся к исходной задаче и сведем ее к системе:

$$\begin{cases} y' = v, \\ \varepsilon v' = x^2 + y^2/4 + v^2 - 4; \\ y(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Здесь поверхностью Λ служит эллипсоид $x^2 + y^2/4 + v^2 = 4$. Будем строить интегралы этой системы в области $\Omega_{xyv} = \{(x, y, v) : x^2 + y^2/4 + v^2 < 4\}$, в которой $f(x, y, v) < 0$. В результате, применив метод голоморфной регуляризации, получим решение $y_1^{[0]}(x, \varepsilon)$ первого порядка поставленной краевой задачи:

$$y_1^{[0]}(x, \varepsilon) = \overline{y}(x) + \varepsilon \ln \frac{2A(x)}{\tilde{v} + A(x) - (\tilde{v} - A(x))e^{2\overline{y}(x)/\varepsilon}},$$

где

$$A(x) = \sqrt{4 - x^2 - \overline{y}^2(x)/4}, \quad \tilde{v} = A(1)th(\overline{y}(1)/2\varepsilon).$$

В заключение следует отметить, что развитие метода голоморфной регуляризации может существенно оптимизировать решение нелинейных сингулярно возмущенных задач, так как данный метод применим также для уравнений и систем уравнений высших порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
2. *Васильева А. Б., Нефедов Н. Н.* Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. — М.: Изд-во МГУ, 2007.
3. *Качалов В. И.* Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач // Вестн. МЭИ/ — 2010. — 6. — С. 54–62.
4. *Качалов В. И.* О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 4. — С. 64–71.
5. *Качалов В. И.* Об одном методе решения сингулярно возмущенных систем тихоновского типа // Изв. вузов. Мат. — 2018. — 6. — С. 25–30.
6. *Качалов В. И., Ломов С. А.* Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач // Докл. РАН. — 1994. — 334, № 6. — С. 694–695.
7. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
8. *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011.
9. *Chang K. W, Howes F. A* Nonlinear singular perturbation phenomena: theory and applications. — New York: Springer-Verlag, 1984.

Бесова Маргарита Ильинична

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

E-mail: besova.margarita@yandex.ru