Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бирюкова, Аналог теоремы Жордана—Дирихле для оператора с инволюцией на графе, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 17–24

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-17-24>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:54:31

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 17–24
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-17-24

УДК 517.984

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА—ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГРАФЕ

© 2021 г. Е. И. БИРЮКОВА

Аннотация. В работе исследуются вопросы сходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$, который задан на геометрическом графе, состоящем из двух ребер, одно из которых образует цикл-петлю. Получены достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье по собственным функциям оператора (аналог теоремы Жордана—Дирихле).

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, инволюция, геометрический граф, ряд Фурье.

AN ANALOG OF THE JORDAN–DIRICHLET THEOREM FOR AN OPERATOR WITH INVOLUTION ON A GRAPH

© 2021 Е. И. BIRYUKOVA

ABSTRACT. In this paper, we examine the convergence of eigenfunction expansions of a functional-differential operator with involution $\nu(x) = 1 - x$, which is defined on a geometric graph consisting of two edges, one of which is a loop. Sufficient conditions are obtained for the uniform convergence of the Fourier series in the eigenfunctions of the operator (an analog of the Jordan–Dirichlet theorem).

Keywords and phrases: functional-differential operator, involution, geometric graph, Fourier series.

AMS Subject Classification: 34L10, 34K08

1. Введение. Пусть Γ — геометрический граф, состоящий из двух ребер γ_1 и γ_2 , и γ_2 образует цикл-петлю. Параметризуя каждое ребро графа отрезком $[0, 1]$, зададим на Γ оператор как оператор в пространстве вектор-функций:

$$(Ly)(x) = (y'_1(1-x), y'_2(x))^T, \quad y = (y_1, y_2)^T, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) \quad (2)$$

(T — знак транспонирования). Считаем, что область определения D_L оператора L включает вектор-функции с непрерывно дифференцируемыми компонентами, удовлетворяющими условиям (2) (условие непрерывности в узле графа).

Оператор L относится к классу функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$ и является невозмущенным для операторов более общего вида, задаваемых дифференциальным выражением вида

$$l(y) = \alpha y'(x) + \beta y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad x \in [0, 1].$$

Такие операторы активно изучаются (см., например, [1–5, 7, 9–11]). Для операторов с такой инволюцией на графах исследовались вопросы равносходимости с тригонометрическим рядом, базисность по Риссу системы собственных и присоединенных функций (см. [1, 4]). Отметим, что граф

рассматриваемой структуры является базовым для моделей более сложных структур (см. [1]). Методами из [5] результаты могут быть обобщены на случай оператора общего вида.

Целью работы является получение условий, при которых ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора L равномерно сходится к заданной функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ при $x \in [0, 1]$. Будем использовать представление частичной суммы ряда Фурье по с.п.ф. оператора L через контурные интегралы от резольвенты оператора (см. [8]).

2. Краевая задача для резольвенты оператора L . Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор). Для $y = R_\lambda f$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} y_1'(1-x) = \lambda y_1(x) + f_1(x), \\ y_2'(x) = \lambda y_2(x) + f_2(x), \\ y_1(0) = y_2(0) = y_2(1). \end{cases}$$

Как и в [4, лемма 1], эта задача сводится к задаче в пространстве вектор-функций с бóльшим числом компонент. Дальнейшее преобразование полученной системы и ее решение проводится аналогично [4].

Лемма 1. Если λ таково, что резольвента R_λ оператора L существует и

$$y_1(x) = [R_\lambda f]_1(x), \quad y_2(x) = [R_\lambda f]_2(x)$$

($[]_k$ означает k -ю компоненту вектора), то вектор-функция $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x))^T$, где $z_1(x) = y_1(x)$, $z_2(x) = y_1(1-x)$, $z_3(x) = y_2(x)$, является решением краевой задачи

$$Bz'(x) - \lambda z(x) = F(x), \quad (3)$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0, \quad (4)$$

где $F(x) = (f_1(x), f_1(1-x), f_2(x))^T$ и

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (3), (4) и задача (3), (4) невырождена, то R_λ существует и $[R_\lambda f]_1(x) = z_1(x)$, $[R_\lambda f]_2(x) = z_3(x)$, где z_1 и z_3 — первая и третья компоненты решения системы (3), (4).

Преобразуем (3) к диагональному виду. Положим

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $B\Gamma = \Gamma D^{-1}$, где

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполнив в (3), (4) замену $z(x) = \Gamma u(x)$, получим следующую задачу для $u(x)$;

$$u'(x) - \mu D_1 u(x) = \Phi(x), \quad (5)$$

$$U_0(u) = M_0 \Gamma u(0) + M_1 \Gamma u(1) = 0, \quad (6)$$

где $\mu = -i\lambda$, $D_1 = \text{diag}(1, -1, i)$, $\Phi(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$.

Лемма 2. Если μ таково, что обратима матрица $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x, \mu))$, где $V(x, \mu) = \text{diag}(e^{\mu x}, e^{-\mu x}, e^{i\mu x})$, то краевая задача (5), (6) однозначно разрешима при любой $\Phi(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$, и ее решение $u(x) = u(x, \mu)$ имеет вид

$$u(x, \mu) = R_{0\mu} \Phi(x) = -V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu \Phi) + g_\mu \Phi(x), \quad (7)$$

где

$$g_\mu \Phi(x) = \int_0^1 g(x, t, \mu) \Phi(t) dt, \quad U_0(g_\mu \Phi) = \int_0^1 U_{0x}(g(x, t, \mu)) \Phi(t) dt,$$

(символ U_{0x} означает, что U_0 применяется к g по переменной x),

$$g(x, t, \mu) = \text{diag} (g_1(x, t, \mu), g_2(x, t, \mu), g_3(x, t, \mu)),$$

$$g_k(x, t, \mu) = \begin{cases} -\varepsilon(t, x) \exp\{\omega_k \mu(x - t)\}, & \text{Re } \mu \omega_k \geq 0, \\ \varepsilon(x, t) \exp\{\omega_k \mu(x - t)\}, & \text{Re } \mu \omega_k \leq 0, \end{cases} \quad \varepsilon(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq t, \\ 0, & \text{если } x < t, \end{cases}$$

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = -1, \omega_3 = i.$$

Таким образом, $z(x) = \Gamma u(x, \mu) = \Gamma R_{0\mu} \Phi(x)$, и тем самым по лемме 1

$$[R_\lambda f]_1 = [\Gamma R_{0\mu} \Phi]_1, \quad [R_\lambda f]_2 = [\Gamma R_{0\mu} \Phi]_3. \quad (8)$$

3. Исследование резольвенты. Пусть непрерывные функции ограниченной вариации $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_k(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ удовлетворяют условиям

$$f_1(0) = f_2(0) = f_2(1). \quad (9)$$

Исследуем компоненты решения в (7) при условии $\text{Re } \mu \geq 0$, $\text{Im } \mu \geq 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично).

Лемма 3. При $\text{Re } \mu \geq 0$, $\text{Im } \mu \geq 0$ имеет место формула

$$g_\mu \Phi(x) = \frac{1}{\mu} \{G_1(x) + G_2(x, \mu) + G_3(x, \mu)\},$$

где

$$G_1(x) = (-\Phi_1(x), \Phi_2(x), i\Phi_3(x))^T,$$

$$G_2(x, \mu) = (e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1), -e^{-\mu x}\Phi_2(0), -ie^{i\mu x}\Phi_3(0))^T,$$

$$G_3(x, \mu) = \left(-\int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t), -\int_0^x e^{-\mu(x-t)} d\Phi_2(t), -i \int_0^x e^{i\mu(x-t)} d\Phi_3(t) \right)^T.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$(g_\mu \Phi(x))_1 = \int_0^1 g_1(x, t, \mu) \Phi_1(t) dt = -\int_x^1 e^{\mu(x-t)} \Phi_1(t) dt$$

$$= \frac{1}{\mu} \left[e^{\mu(x-1)} \Phi_1(1) - \Phi_1(x) - \int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t) \right],$$

$$(g_\mu \Phi(x))_2 = \int_0^1 g_2(x, t, \mu) \Phi_2(t) dt = \int_0^x e^{-\mu(x-t)} \Phi_2(t) dt$$

$$= \frac{1}{\mu} \left[\Phi_2(x) - e^{-\mu x} \Phi_2(0) - \int_0^x e^{-\mu(x-t)} d\Phi_2(t) \right],$$

$$\begin{aligned}
(g_\mu \Phi(x))_3 &= \int_0^1 g_3(x, t, \mu) \Phi_1(t) dt = \int_0^x e^{i\mu(x-t)} \Phi_3(t) dt \\
&= \frac{i}{\mu} \left[\Phi_3(x) - e^{i\mu x} \Phi_3(0) - \int_0^x e^{i\mu(x-t)} d\Phi_3(t) \right],
\end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы. $\square$

Так как $\Phi(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$, $F(x) = (f_1(x), f_1(1-x), f_2(x))^T$ в (5), то очевидна следующая лемма.

Лемма 4. Для компонент вектора $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x))^T$ в (5) имеют место формулы

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2}[-if_1(x) + f_1(1-x)], \quad \Phi_2(x) = \frac{1}{2}[-f_1(x) + if_1(1-x)], \quad \Phi_3(x) = f_2(x).$$

Отсюда и из (9) вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Для функций $\Phi_k(x)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
\Phi_2(x) &= -\Phi_1(1-x), & \Phi_1(1) &= -\Phi_2(0), \\
\Phi_1(0) &= \frac{1}{2}(-if_1(0) + f_1(1)), & \Phi_2(0) &= \frac{1}{2}(-f_1(0) + if_1(1)), \\
\Phi_1(1) &= \frac{1}{2}(-if_1(1) + f_1(0)), & \Phi_2(1) &= \frac{1}{2}(-f_1(1) + if_1(0)), \\
\Phi_3(0) &= f_2(0), & \Phi_3(1) &= f_2(1).
\end{aligned}$$

Лемма 5. При $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Im} \mu \geq 0$ для компонент $U_0(g_\mu \Phi)$ имеют место соотношения

$$U_0(G_1) = (0, 0, 0)^T, \quad U_0(G_2) = (i - e^{-\mu}) \begin{pmatrix} \Phi_2(0) \\ 0 \\ \Phi_2(0) \end{pmatrix} + i\Phi_3(0) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\mu} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Доказательство. Имеем

$$M_0\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_1\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая (9) и соотношения из следствия 1, получим:

$$U_0(G_1) = M_0\Gamma G_1(0) + M_1\Gamma G_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Phi_1(0) \\ \Phi_2(0) \\ i\Phi_3(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Phi_1(1) \\ \Phi_2(1) \\ i\Phi_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, пользуясь тем, что $\Phi_1(1) = -\Phi_2(0)$, имеем

$$U_0(G_2) = M_0\Gamma G_2(0) + M_1\Gamma G_2(1) = \begin{pmatrix} -e^{-\mu}\Phi_2(0) + i\Phi_2(0) + i\Phi_3(0) \\ -i\Phi_3(0) + ie^{i\mu}\Phi_3(0) \\ i\Phi_3(0) + i\Phi_2(0) - e^{-\mu}\Phi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2(0)(i - e^{-\mu}) + i\Phi_3(0) \\ i\Phi_3(0)(e^{i\mu} - 1) \\ \Phi_2(0)(i - e^{-\mu}) + i\Phi_3(0) \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем второе соотношение в (10). $\square$

Лемма 6. Имеет место формула

$$\Delta_0^{-1}(\mu) = \frac{1}{\delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} e^{-\mu}(e^{i\mu} - 1) & -i - e^{-\mu} & -i(1 - e^{i\mu}) \\ ie^{\mu}(e^{i\mu} - 1) & -1 - ie^{\mu} & e^{i\mu} - 1 \\ 0 & -e^{\mu} - e^{-\mu} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\delta_0(\mu) = \det \Delta_0(\mu) = -(1 - e^{i\mu})(e^{\mu} + e^{-\mu})$.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}\Delta_0(\mu) &= U_0(V(x, \mu)) = M_0 \Gamma V(0, \mu) + M_1 \Gamma V(1, \mu) = M_0 \Gamma + M_1 \Gamma \operatorname{diag}(e^\mu, e^{-\mu}, e^{i\mu}) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 - e^{i\mu} \\ -ie^\mu & e^{-\mu} & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Отсюда получается явное выражение для $\delta_0(\mu)$. Вычисляя алгебраические дополнения, получим утверждение леммы. $\square$

Из леммы 6 непосредственно выводится формула

$$V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) = \frac{1}{\delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} e^{\mu(x-1)}(e^{i\mu} - 1) & e^{\mu x}(-i - e^{-\mu}) & e^{\mu x}i(e^{i\mu} - 1) \\ ie^{\mu(1-x)}(e^{i\mu} - 1) & e^{-\mu x}(-1 - ie^\mu) & e^{-\mu x}(e^{i\mu} - 1) \\ 0 & -e^{i\mu x}(e^\mu + e^{-\mu}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Из (11) и леммы 5 получаем следующее утверждение.

Лемма 7. При $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Im} \mu \geq 0$ имеют место соотношения

$$V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(G_1) = (0, 0, 0)^T, \quad V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(G_2) = \begin{pmatrix} -\Phi_2(0)e^{\mu(x-1)} \\ -\Phi_2(0)e^{-\mu x} \\ -i\Phi_3(0)e^{i\mu x} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Если $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Im} \mu \geq 0$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_k(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ и $f_1(0) = f_2(0) = f_2(1)$, то

$$\begin{aligned}y_1 &= [R_\lambda f]_1 = -\frac{f_1(x)}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \left(-\int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t) + i \int_0^x e^{-\mu(x-t)} d\Phi_2(t) \right) - \frac{1}{\mu} [\Gamma V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(G_3)]_1, \\ y_2 &= [R_\lambda f]_3 = -\frac{f_2(x)}{\lambda} - \frac{i}{\mu} \int_0^x e^{i\mu(x-t)} d\Phi_3(t) - \frac{1}{\mu} [\Gamma V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(G_3)]_3.\end{aligned}$$

Доказательство. Имеем в силу (8) и (7)

$$\begin{aligned}[R_\lambda f]_1 &= [\Gamma R_{0\mu} \Phi]_1 = [\Gamma(g_\mu \Phi(x) - V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu \Phi))]_1, \\ [R_\lambda f]_2 &= [\Gamma R_{0\mu} \Phi]_3 = [\Gamma(g_\mu \Phi(x) - V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu \Phi))]_3.\end{aligned}$$

Из лемм 3 и 4 получаем:

$$\begin{aligned}[\Gamma G_1(x)]_1 &= -\Phi_1(x) - i\Phi_2(x) = \frac{1}{2}[-if_1(x) + f_1(1-x)] - \frac{i}{2}[-f_1(x) + if_1(1-x)] = if_1(x), \\ [\Gamma G_1(x)]_3 &= i\Phi_3(x) = if_2(x), \\ [\Gamma G_2(x, \mu)]_1 &= e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1) + ie^{-\mu x}\Phi_2(0), \quad [\Gamma G_2(x, \mu)]_3 = -ie^{i\mu x}\Phi_3(0), \\ [\Gamma G_3(x, \mu)]_1 &= \left(-\int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t) + i \int_0^x e^{-\mu(x-t)} d\Phi_2(t) \right), \quad [\Gamma G_3(x, \mu)]_3 = \int_0^x e^{i\mu(x-t)} d\Phi_3(t).\end{aligned}$$

Далее, по лемме 7

$$\begin{aligned}[\Gamma V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(G_1)]_1 &= [\Gamma V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(G_1)]_3 = 0, \\ [\Gamma V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(G_2)]_1 &= e^{\mu(x-1)}\Phi_1(1) + ie^{-\mu x}\Phi_2(0), \\ [\Gamma V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(G_2)]_3 &= ie^{i\mu x}\Phi_3(0).\end{aligned}$$

Из этих соотношений, учитывая $\mu = -i\lambda$, вытекает утверждение теоремы. $\square$

4. Аналог теоремы Жордана—Дирихле. Для получения основного результата потребуется следующее утверждение (см. также [2]).

Лемма 8. Если $\varphi(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$, то при $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Im} \mu \geq 0$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t) = O(e^{\mu x} e^{-\mu \delta}) + o_\delta(1) e^{\mu x}, \quad (12)$$

$$\int_x^1 e^{-\mu t} d\varphi(t) = O(e^{-\mu x} e^{-\mu \delta}) + o_\delta(1) e^{-\mu x}, \quad (13)$$

$$\int_0^x e^{-i\mu t} d\varphi(t) = O(e^{-i\mu x} e^{-i\mu \delta}) + o_\delta(1) e^{-i\mu x}, \quad (14)$$

где $o_\delta(1) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по $x \in [0, 1]$, $O(\cdot)$ не зависит от δ .

Доказательство. В силу непрерывности $\varphi(x)$ функция

$$\bigvee_0^x(\varphi) = \int_0^x |d\varphi(x)|$$

также непрерывна на отрезке $[0, 1]$ (см. [6, с. 110]) и, следовательно, равномерно непрерывна на нем и

$$\bigvee_x^{x+\delta}(\varphi) = o_\delta(1) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Если $x \geq \delta$, то

$$\left| \int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t) \right| = \left| \int_0^{x-\delta} e^{\mu t} d\varphi(t) + \int_{x-\delta}^x e^{\mu t} d\varphi(t) \right| \leq \left| \int_0^{x-\delta} e^{\mu t} d\varphi(t) \right| + \left| \int_{x-\delta}^x e^{\mu t} d\varphi(t) \right|. \quad (15)$$

Рассмотрим первый интеграл в (15). Пользуясь тем, что

$$|e^{\mu t}| = e^{\operatorname{Re} \mu t} \leq e^{\operatorname{Re} \mu (x-\delta)} = |e^{\mu (x-\delta)}|,$$

получаем:

$$\left| \int_0^{x-\delta} e^{\mu t} d\varphi(t) \right| \leq \int_0^{x-\delta} |e^{\mu t}| |d\varphi(t)| \leq \int_0^{x-\delta} |e^{\mu (x-\delta)}| |d\varphi(t)| \leq |e^{\mu (x-\delta)}| \bigvee_0^{x-\delta}(\varphi).$$

Рассмотрим второй интеграл в (15). Учитывая, что

$$|e^{\mu t}| = e^{\operatorname{Re} \mu t} \leq e^{\operatorname{Re} \mu x} = |e^{\mu x}|,$$

имеем

$$\left| \int_{x-\delta}^x e^{\mu t} d\varphi(t) \right| \leq \int_{x-\delta}^x |e^{\mu t}| |d\varphi(t)| \leq |e^{\mu x}| \bigvee_{x-\delta}^x(\varphi) = |e^{\mu x}| o_\delta(1).$$

Если $x \leq \delta$, то

$$\left| \int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t) \right| \leq |e^{\mu x}| \int_0^x |d\varphi(t)| \leq |e^{\mu x}| \int_0^\delta |d\varphi(t)| = |e^{\mu x}| \bigvee_0^\delta(\varphi).$$

Отсюда и из двух предыдущих оценок следует (12). Оценка (13) получается из (12) с помощью замены переменной $t = 1 - \tau$, а (14) — с помощью замены $-i\mu = \lambda$. $\square$

Теорема 2. Если $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ такова, что $f_k(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ и $f_1(0) = f_2(0) = f_2(1)$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) - S_r(f, x)\| = 0,$$

где $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора L , включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k , для которых

$$|\lambda_k| < r, \quad \|u\| = \max_{k=1,2} \max_{0 \leq x \leq 1} |u_k(x)|.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением частичной суммы ряда Фурье через контурный интеграл от резольвенты:

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda f)(x) d\lambda.$$

По теореме 1 для первой компоненты имеем:

$$[S_r(f, x)]_1 = f_1(x) + I_1 + I_2 + I_3, \quad (16)$$

где

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left(\frac{1}{\mu} \int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t) \right) d\lambda, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left(\frac{i}{\mu} \int_0^x e^{-\mu(x-t)} d\Phi_2(t) \right) d\lambda,$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left(\frac{i}{\mu} [\Gamma V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(G_3)]_1 \right) d\lambda.$$

Оценим интегралы в I_1 . Имеем, учитывая, что $\lambda = i\mu$:

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq s \leq 4} \int_{l_s} \left(\frac{1}{\mu} \int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t) \right) d\mu,$$

где $l_s = \{\mu : |\mu| = r, \arg \mu \in [\pi(s-1)/2, \pi s/2]\}$, $s = \overline{1, 4}$. На контуре l_1 выполняются неравенства $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Im} \mu \geq 0$, поэтому, используя оценки из леммы 8, получим:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{l_1} \frac{1}{\mu} e^{\mu x} \int_x^1 e^{-\mu t} d\Phi_1(t) d\mu \right| \leq c \int_{l_1} \frac{1}{r} |e^{\mu x}| (|e^{-\mu x}| |e^{-\mu \delta}| + o_\delta(1) |e^{-\mu x}|) |d\mu| =$$

$$= \frac{c}{r} \left(\int_{l_1} |e^{-\mu \delta}| |d\mu| + o_\delta(1) \int_{l_1} |d\mu| \right) \leq \frac{c}{r} \int_{l_1} |e^{-\mu \delta}| |d\mu| + o_\delta(1). \quad (17)$$

Докажем ограниченность интеграла в первом слагаемом. Выполняя замену $\mu = r e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, учитывая, что при $\varphi \in [0, \pi/2]$ справедлива оценка $\sin \varphi \geq 2\varphi/\pi$, получим:

$$\int_{l_1} |e^{-\mu \delta}| |d\mu| = \int_{l_1} e^{-\operatorname{Re} \mu \delta} |d\mu| = r \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \varphi \delta} d\varphi \leq r \int_0^{\pi/2} e^{-rc\varphi \delta} d\varphi \leq \frac{1}{c} \int_0^\infty e^{-\xi \delta} d\xi \leq c$$

(здесь одним символом c обозначаются различные константы). Отсюда, из (17) и оценок, аналогичных леммам 3, 5, 7 при остальных комбинациях знаков $\operatorname{Re} \mu$ и $\operatorname{Im} \mu$ (т.е. по остальным контурам l_s), следует, что

$$|I_1| \leq \frac{c}{r} + c\varepsilon.$$

В силу леммы 8 такую же оценку получаем для I_2 , а из соотношения $V(x, \mu) \Delta^{-1}(\mu) = O(1)$, следующего из (11), — и для интегралов в I_3 . В силу произвольности ε следует, что $I_k \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Отсюда и из (16) следует, что $[S_r(f, x)]_1 = f_1(x) + o(1)$. Аналогично доказывается, что $[S_r(f, x)]_2 = f_2(x) + o(1)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлуцкая М. Ш. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций одного класса функционально-дифференциальных операторов на графе// Диффер. уравн. — 2009. — 45, № 6. — С. 763–771.
2. Бурлуцкая М. Ш. Теорема Жордана—Дирихле для функционально-дифференциального оператора с инволюцией// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. — 2013. — 13, № 3. — С. 9–14.
3. Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией// Докл. РАН. — 2007. — 414, № 4. — С. 1309–1312.
4. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл// Диффер. уравн. — 2007. — 43, № 12. — С. 1597–1605.
5. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. — 2009. — 9, № 4. — С. 3–10.
6. Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. — М.: Факториал, 1998.
7. Платонов С. С. Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов// Тр. Петрозавод. гос. ун-та. Сер. мат. — 2004. — 11. — С. 15–35.
8. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964.
9. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu. Spectral analysis of a differential operator with an involution// J. Evolut. Equat. — 2017. — 17. — P. 669–684.
10. Kritskov L. V., Sarsenbi A. M. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution// Differ. Equations. — 2015. — 51, № 8. — P. 984–990.
11. Wiener J. Generalized Solutions of Functional-Differential Equations. — World Scientific, 1993.

Бирюкова Елена Игоревна
Воронежский государственный университет
E-mail: elenabiryukova2010@yandex.ru