Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Владимиров, Е. С. Карулина, Об одной априорной мажоранте наименьших собственных значений задачи Штурма—Лиувилля, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 25–27

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-25-27>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 09:52:36

ОБ ОДНОЙ АПРИОРНОЙ МАЖОРАНТЕ НАИМЕНЬШИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

© 2021 г. А. А. ВЛАДИМИРОВ, Е. С. КАРУЛИНА

Аннотация. Изучается вопрос о точной априорной мажоранте $M_\gamma = \sup_{q \in A_\gamma} \lambda_0(q)$ наименьшего собственного значения задачи Штурма—Лиувилля $-y'' + qy = \lambda y$, $y(0) = y(1) = 0$, с потенциалом $q \in C[0, 1]$ класса A_γ , выделенного условиями $q \leq 0$ и $\int_0^1 |q|^\gamma dx = 1$, где $\gamma \in (0, 1/2)$. Показано, что эта мажоранта подчиняется строгой оценке $M_\gamma < \pi^2$. Ранее справедливость последней оценки была известна лишь для случая $\gamma < 1/3$.

Ключевые слова: задача Штурма—Лиувилля, оценка собственных значений.

ON AN A PRIORI MAJORANT OF THE LEAST EIGENVALUES OF THE STURM—LIOUVILLE PROBLEM

© 2021 A. A. VLADIMIROV, E. S. KARULINA

ABSTRACT. We examine the exact a priori majorant $M_\gamma = \sup_{q \in A_\gamma} \lambda_0(q)$ of the least eigenvalue of the Sturm—Liouville problem $-y'' + qy = \lambda y$, $y(0) = y(1) = 0$, with a potential $q \in C[0, 1]$ of the class A_γ determined by the conditions $q \leq 0$ and $\int_0^1 |q|^\gamma dx = 1$, where $\gamma \in (0, 1/2)$. For this majorant, we prove the strict estimate $M_\gamma < \pi^2$. The last estimate was known earlier in the case where $\gamma < 1/3$.

Keywords and phrases: Sturm—Liouville problem, estimate of eigenvalues.

AMS Subject Classification: 34L15, 34L40

Рассмотрим граничную задачу

$$-y'' + qy = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

где потенциал выбирается внутри семейства

$$A_\gamma = \left\{ q \in C[0, 1] : q \leq 0, \int_0^1 |q|^\gamma dx = 1 \right\}.$$

Свяжем с указанной задачей априорную мажоранту $M_\gamma = \sup_{q \in A_\gamma} \lambda_0(q)$ наименьшего собственного значения. Как было установлено в [1, теорема 1.2] (см. также [3, Theorem 2], [2, теорема 2.1], [4, Theorem 2.4]), при $\gamma \geq 1/2$ выполняется равенство $M_\gamma = \pi^2$, а при $\gamma < 1/3$ справедлива строгая

оценка $M_\gamma < \pi^2$. Целью настоящей заметки является установление справедливости строгой оценки $M_\gamma < \pi^2$ также в случае $\gamma \in [1/3, 1/2)$. Иначе говоря, нами доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *При любом выборе значения $\gamma \in (0, 1/2)$ справедлива оценка $M_\gamma < \pi^2$.*

Доказательство. Далее мы всегда будем предполагать величину $\gamma \in (0, 1/2)$ каким-либо образом зафиксированной. Пусть $q \in C[0, 1]$ — неположительный потенциал, удовлетворяющий соотношению $\lambda_0(q) > (\pi - \varepsilon)^2$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое достаточно малое число. Рассмотрим связанные с соответствующей собственной функцией $y \in C^2[0, 1]$ функции $\varrho, \vartheta \in C^1[0, 1]$ и $\sigma \in C[0, 1]$ вида

$$\varrho \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' / \sqrt{\lambda_0(q)} \end{pmatrix}, \quad \sigma = |q| \sin^2 \vartheta.$$

Функция ϑ подчиняется уравнению

$$\vartheta' = \frac{1}{\varrho} \cdot (\cos \vartheta \quad -\sin \vartheta) \cdot \begin{pmatrix} y' \\ y'' / \sqrt{\lambda_0(q)} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_0(q) + \sigma}{\sqrt{\lambda_0(q)}}$$

и пробегает, строго возрастаая, отрезок $[0, \pi]$. Соотношения

$$\int_0^1 \frac{\sigma \vartheta'}{\lambda_0(q) + \sigma} dx = \int_0^1 [\vartheta' - \sqrt{\lambda_0(q)}] dx = \pi - \sqrt{\lambda_0(q)} < \varepsilon$$

означают при этом, что множество

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in [0, 1] : \sigma(x) > \varepsilon^{(1-2\gamma)/(1-\gamma)} \right\}$$

подчиняется оценке

$$\int_{E_\varepsilon} \vartheta' dx < \mu(\varepsilon),$$

где положено $\mu(\varepsilon) = \pi^2 \varepsilon^{\gamma/(1-\gamma)} + \varepsilon$. Далее мы, не ограничивая общности рассмотрения, всегда будем предполагать выполненным неравенство $\mu(\varepsilon) < \pi$. В этом случае справедливы оценки

$$\begin{aligned} \int_{E_\varepsilon} \sin^{-2\gamma} \vartheta \cdot \vartheta' dx &\leq 2 \int_0^{\mu(\varepsilon)/2} \sin^{-2\gamma} x dx \leq 2 \int_0^{\pi^2 \varepsilon^{\gamma/(1-\gamma)}} \left(\frac{2x}{\pi} \right)^{-2\gamma} dx = \\ &= \frac{2\pi^2 \cdot (2\pi)^{-2\gamma}}{1-2\gamma} \varepsilon^{(1-2\gamma)\gamma/(1-\gamma)} < \frac{2\pi^2}{1-2\gamma} \varepsilon^{(1-2\gamma)\gamma/(1-\gamma)}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\int_{\overline{E_\varepsilon}} \sin^{-2\gamma} \vartheta \cdot \vartheta' dx \leq \int_0^\pi \sin^{-2\gamma} x dx \leq 2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} \right)^{-2\gamma} dx < \frac{4}{1-2\gamma}. \quad (2)$$

Кроме того, в случае $\sigma(x) \geq 1$ справедливы оценки

$$2\sqrt{\lambda_0(q)}\sigma^\gamma(x) \leq \lambda_0(q) + \sigma^{2\gamma}(x), \quad (3)$$

а в случае $\sigma(x) < 1$ справедливы обусловленные неравенством $\lambda_0(q) > 4$ оценки

$$2\sqrt{\lambda_0(q)}\sigma^\gamma(x) \leq \lambda_0(q). \quad (4)$$

Объединяя (3) и (4) в единую оценку

$$2\sqrt{\lambda_0(q)}\sigma^\gamma(x) \leq \lambda_0(q) + \sigma(x)$$

и учитывая ранее полученные оценки (1) и (2), устанавливаем справедливость соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^1 |q|^\gamma dx &= \sqrt{\lambda_0(q)} \cdot \int_0^1 \frac{\sigma^\gamma \sin^{-2\gamma} \vartheta}{\lambda_0(q) + \sigma} \cdot \vartheta' dx = \\ &= \sqrt{\lambda_0(q)} \cdot \left[\int_{E_\varepsilon} \frac{\sigma^\gamma \sin^{-2\gamma} \vartheta}{\lambda_0(q) + \sigma} \cdot \vartheta' dx + \int_{\frac{E}{E_\varepsilon}} \frac{\sigma^\gamma \sin^{-2\gamma} \vartheta}{\lambda_0(q) + \sigma} \cdot \vartheta' dx \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \int_{E_\varepsilon} \sin^{-2\gamma} \vartheta \cdot \vartheta' dx + \frac{\varepsilon^{(1-2\gamma)\gamma/(1-\gamma)}}{\sqrt{\lambda_0(q)}} \cdot \int_{\frac{E}{E_\varepsilon}} \sin^{-2\gamma} \vartheta \cdot \vartheta' dx \leq \frac{\pi^2 + 2}{1 - 2\gamma} \cdot \varepsilon^{(1-2\gamma)\gamma/(1-\gamma)}. \end{aligned}$$

Тем самым справедливость соотношения $q \in A_\gamma$ несовместима с предположением о значительной малости параметра $\varepsilon > 0$. Это и означает выполнение искомой оценки $M_\gamma < \pi^2$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ежак С. С. Оценки первого собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с условиями Дирихле // в кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — С. 517–559.
2. Ежак С. С. Об одной задаче минимизации функционала, порожденного задачей Штурма—Лиувилля с интегральным условием на потенциал // Вестн. СамГУ. — 2015. — 6 (128). — С. 57–61.
3. Ezhak S. S. On estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with Dirichlet boundary conditions and integral condition // in: Differential and Difference Equations with Applications. — New York: Springer-Verlag, 2013. — P. 387–394.
4. Ezhak S., Telnova M. On estimates for the first eigenvalue of some Sturm–Liouville problems with Dirichlet boundary conditions and a weighted integral condition // Proc. Int. Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations “QUALITDE-2016”. — Tbilisi, Georgia: A. Razmadze Math. Inst., 2016. — P. 81–85.

Владимиров Антон Алексеевич

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, Москва

E-mail: vladimirov@shkal.math.msu.su

Карулина Елена Сергеевна

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва

E-mail: karulinaes@yandex.ru