Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Гиат, С. Камуш, А. Хеллаф, В. Мерчела, Об одной системе интегральных уравнений Вольтерра со слабо сингулярным ядром, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 33–44

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-33-44>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:23:45

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА СО СЛАБО СИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

© 2021 г. М. ГИАТ, С. КАМУШ, А. ХЕЛЛАФ, В. МЕРЧЕЛА

Аннотация. В работе исследуется существование и единственность решений системы интегральных уравнений Вольтерра со слабо сингулярным ядром. Аппроксимация решения производится при помощи метода интегрирования произведения. Точность и эффективность метода проиллюстрированы на некоторых численных примерах.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение Вольтерра, интегро-дифференциальное уравнение, неподвижная точка, метод интегрирования произведения.

ON A SYSTEM OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH A WEAKLY SINGULAR KERNEL

© 2021 M. GHIAT, S. KAMOUICHE, A. KHELLAF, W. MERCHELA

ABSTRACT. In this paper, we examine the existence and uniqueness of solutions for a system of Volterra integral equations with a weakly singular kernel. We approximate the solution of this system using the product integration method. The accuracy and efficiency of this method are illustrated in some numerical examples.

Keywords and phrases: nonlinear Volterra integral equation, integro-differential equation, fixed point, product integration method.

AMS Subject Classification: 45D05, 65D07, 65R20.

1. Введение. Многие физические процессы и математические модели описываются нелинейными интегральными уравнениями Вольтерры (см. [1, 2, 6–8]). Уравнения этого типа привлекают внимание многих исследователей. В данной работе рассматриваются нелинейные интегральные уравнения Вольтерры со *слабо-сверточными сингулярными ядрами*, которые определяются следующим образом: найти функции $x(t)$ и $y(t)$, определенные для всех $t \in [a, b]$ и удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} x(t) = \int_a^t p_1(t-s)K_1(t, s, x(s), y(s))ds + f_1(t), \\ y(t) = \int_a^t p_2(t-s)K_2(t, s, x(s), y(s))ds + f_2(t), \end{cases} \quad (P1)$$

где $f_1, f_2, p_1, p_2, K_1, K_2$ — заданные функции. Отметим, что многие интегральные уравнения типа Вольтерры, возникающие в прикладных задачах, имеют сверточные ядра (см. [3]).

Отметим, что интегро-дифференциальные нелинейные уравнения Вольтерры вида

$$u(t) = f(t) + \int_0^t k(s, u(s), u'(s)) ds, \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

рассматривались в [5, 9], а уравнения вида

$$u(t) = f(t) + \int_0^t p(t-s)k(s, u(s), u'(s)) ds, \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

— в [4]; здесь f , k и p — заданные функция, u — неизвестная. В [4] при исследовании условий на функцию $p(\cdot)$ было установлено, что уравнение (1) эквивалентно системе нелинейных интегральных уравнений вида

$$\begin{cases} u(t) = \int_a^t p(t-s)k(t, s, u(s), u'(s)) ds + f(t), \\ u'(t) = \int_a^t p'(t-s)k(s, u(s), u'(s)) ds + \int_a^t p(t-s) \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds + f'(t), \end{cases} \quad (P2)$$

для всех $t \in [a, b]$, причем *сингулярность определяется только функцией $p'(\cdot)$* .

В данной работе мы получим условия на функции $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$ в системе (P1), обобщающие аналитическое и численное исследование системы (P2), и, как следствие, уравнение (1). Отметим, что сингулярность задается для $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$.

Далее система (P1) исследуется аналитически; существование решения доказано при помощи теоремы Шаудера о неподвижной точке, а единственность — при помощи методов, предложенных в [4]. Далее приводятся результаты численных экспериментов, проведенных при помощи метода интегрирования произведения (см. [6]).

Отметим, что использование классических методов (например, метод Нистрома) для поиска приближенного решения системы (P1) в рассматриваемом случае невозможно, в то время как применение метода интегрирования произведения позволяет обойти сингулярности функций $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$. Кроме того, этот метод позволяет обобщить рассмотрение на случай системы типа (P1) с n неизвестными функциями, $n \geq 2$.

Пусть $p_1, p_2, f_1, f_2, K_1, K_2$ — вещественные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} p_i &: [a-b, b-a] \rightarrow \mathbb{R}, & t &\mapsto p_i(t), \\ f_i &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, & t &\mapsto f_i(t), \\ K_i &: [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & (t, s, x, y) &\mapsto K_i(t, s, x, y), \end{aligned}$$

где $i = 1, 2$. Также предположим, что

$$\begin{aligned} f_1, f_2 &\in \mathcal{C}([a, b]), \quad K_1, K_2 \in \mathcal{C}([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ \exists M_1, M_2 > 0 \forall t, s \in [a, b] \forall x, y \in \mathbb{R} : & |K_1(t, s, x, y)| \leq M_1, \quad |K_2(t, s, x, y)| \leq M_2; \end{aligned} \quad (H1)$$

$$p_1, p_2 \in L^1(a-b, b-a), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} p_1(\tau) ds = +\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} p_2(\tau) ds = +\infty,$$

$$\forall t \in [a, b] : \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_t^{t+\delta} |p_1(t+\delta-s)| ds = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_t^{t+\delta} |p_2(t+\delta-s)| ds = 0. \quad (H2)$$

Условие (H2) объясняет сингулярность в системе (P1): эта сингулярность является слабой, поскольку для всех $t \in [a, b]$

$$\int_a^t |p_i(t-s)|ds \leq \int_0^{t-a} |p_i(\tau)|d\tau \leq \int_{a-b}^{b-a} |p_i(\tau)|d\tau < \infty, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Наша задача — найти условия, обеспечивающие существование и единственность решения системы (P1) и разработать численный алгоритм поиска этого решения. Отметим, что предположение (H1) аналогично условиям, наложенным в [4, 5]. В дальнейшем будем обозначать через $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_1$ нормы банаховых пространств $\mathcal{C}([a, b])$ и $L^1(a-b, b-a)$, соответственно.

2. Аналитическое исследование. Докажем, что система (P1) имеет единственное решение в $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$. Введем некоторые определения.

Модуль непрерывности функции x в $\mathcal{C}([a, b])$:

$$\omega_0(x, h) = \sup_{|t-\sigma| \leq h} |x(t) - x(\sigma)|. \quad (4)$$

Колесание функции q в $L^1(a-b, b-a)$:

$$\omega_1(q, h) = \sup_{|t-\sigma| \leq h} \int_{a-b}^{b-a} |q(t-s) - q(\sigma-s)|ds. \quad (5)$$

Модуль переноса функции q in $L^1(a-b, b-a)$:

$$\tau(q, h) = \int_t^{t+h} |q(t+h-s)|ds. \quad (6)$$

Докажем некоторые вспомогательные факты.

Лемма 1. Если $x \in \mathcal{C}([a, b])$, то $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_0(x, h) = 0$.

Доказательство. Это утверждение вытекает из равномерной непрерывности функции x на компакте $[a, b]$. $\square$

Лемма 2. Если $q \in L^1(a-b, b-a)$, то $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_1(q, h) = 0$.

Доказательство. Используем тот факт, что $\mathcal{C}([a-b, b-a])$ плотно в $L^1(a-b, b-a)$ и затем применим лемму 1. $\square$

Из (H2) при $i = 1, 2$ имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(p_i, h) = 0. \quad (7)$$

Теорема 1. При выполнении условий (H1) и (H2) система (P1) имеет решение $(x, y) \in \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$.

Доказательство. Для $f_1, f_2 \in \mathcal{C}([a, b])$ рассмотрим множество

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) : \begin{array}{l} x(a) = f_1(a), \|x - f_1\|_\infty \leq M_1 \|p_1\|_1 \\ y(a) = f_2(a), \|y - f_2\|_\infty \leq M_2 \|p_2\|_1 \end{array} \right\}. \quad (8)$$

Для всех $(x, y) \in \mathcal{D}$ определим функционал

$$\Phi(x, y)(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{f_1}(x, y)(t) \\ \Phi_{f_2}(x, y)(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) + \int_a^t p_1(t-s)K_1(t, s, x(s), y(s))ds \\ f_2(t) + \int_a^t p_2(t-s)K_2(t, s, x(s), y(s))ds \end{pmatrix} \quad (9)$$

Ясно, что множество $\mathcal{D}$ замкнуто и выпукло в $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$. Далее, для всех $(x, y) \in \mathcal{D}$, $t \in [a, b]$, $i = 1, 2$ имеем

$$\Phi_{f_i}(x, y)(a) = f_i(a), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} |\Phi_{f_i}(x, y)(t) - f_i(t)| &= \left| \int_a^t p_i(t-s) K_i(t, s, x(s), y(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \int_a^t |p_i(t-s)| |K_i(t, s, x(s), y(s))| ds \leq M_i \int_a^t |p_i(t-s)| ds \leq M_i \|p_i\|_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда заключаем, что $\Phi(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Пусть $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathcal{D}$, сходящаяся к $(x, y) \in \mathcal{D}$. для всех $t \in [a, b]$ и $i = 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_{f_i}(x_n, y_n)(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^t p_i(t-s) K_i(t, s, x_n(s), y_n(s)) ds + f_i(t) = \\ &= \int_a^t \lim_{n \rightarrow +\infty} p_i(t-s) K_i(t, s, x_n(s), y_n(s)) ds + f_i(t) = \\ &= \int_a^t p_i(t-s) K_i \left(t, s, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(s), \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(s) \right) ds + f_i(t) = \\ &= \int_a^t p_i(t-s) K_i(t, s, x(s), y(s)) ds + f_i(t) = \Phi_{f_i}(x, y)(t), \end{aligned}$$

откуда следует, что функционал Φ непрерывен на $\mathcal{D}$. С другой стороны, для $t \in [a, b]$ и $(x, y) \in \mathcal{D}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \Phi_{f_i}(x, y)(t+h) - \Phi_{f_i}(x, y)(t) \right| &\leq \\ &\leq \int_a^t \left| p_i(t+h-s) K_i(t+h, s, x(s), y(s)) - p_i(t-s) K_i(t, s, x(s), y(s)) \right| ds + \\ &\quad + \int_t^{t+h} \left| p_i(t+h-s) K_i(t+h, s, x(s), y(s)) \right| ds + |f_i(t+h) - f_i(t)|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_a^t \left| p_i(t+h-s) K_i(t+h, s, x(s), y(s)) - p_i(t-s) K_i(t, s, x(s), y(s)) \right| ds &\leq \\ &\leq \int_a^t |p_i(t-s)| \left| K_i(t+h, s, x(s), y(s)) - K_i(t, s, x(s), y(s)) \right| ds + \\ &\quad + \int_a^t \left| p_i(t+h-s) - p_i(t-s) \right| \cdot \left| K_i(t+h, s, x(s), y(s)) \right| ds. \end{aligned}$$

Используя условие (H1), можем найти такую точку $(\tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{y}) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2$, что

$$\left| K_i(t+h, s, x(s), y(s)) - K_i(t, s, x(s), y(s)) \right| \leq \left| K_i(t+h, \tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{y}) - K_i(t, \tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{y}) \right|$$

для всех $t \in [a, b]$. Если ввести обозначение $\tilde{K}_i(t) = K_i(t, \tilde{s}, \tilde{x}, \tilde{y})$ для $t \in [a, b]$, то

$$\left| K_i(t+h, s, x(s), y(s)) - K_i(t, s, x(s), y(s)) \right| \leq \omega_0(\tilde{K}_i, h). \quad (12)$$

Кроме того, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \int_a^t \left| p_i(t+h-s) - p_i(t-s) \right| \cdot \left| K_i(t+h, s, x(s), y(s)) \right| ds &\leq M_i \int_a^t \left| p_i(t+h-s) - p_i(t-s) \right| ds \leq \\ &\leq M_i \int_0^{t-a} \left| p_i(\sigma+h) - p_i(\sigma) \right| d\sigma \leq M_i \int_{a-b}^{b-a} \left| p_i(\sigma+h) - p_i(\sigma) \right| d\sigma \leq M_i \omega_1(p_i, h). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12) и (13) заключаем

$$\begin{aligned} \int_a^t \left| p_i(t+h-s) K_i(t+h, s, x(s), y(s)) - p_i(t-s) K_i(t, s, x(s), y(s)) \right| ds &\leq \\ &\leq \omega_0(\tilde{K}_i, h) \|p_i\|_1 + M_i \omega_1(p_i, h). \end{aligned}$$

Итак,

$$\left| \Phi_{f_i}(x, y)(t+h) - \Phi_{f_i}(x, y)(t) \right| \leq \omega_0(\tilde{K}_i, h) \|p_i\|_1 + M_i \omega_1(p_i, h) + M_i \tau(p_i, h) + \omega_0(f_i, h).$$

Согласно леммам 1 и 2, принимая во внимание последнее равенство, заключаем, что функционал $\Phi(x, y)(\cdot)$ равномерно непрерывен на $\mathcal{D}$. Окончательно, используя теорему Шаудера, получаем, что Φ_f имеет неподвижную точку в $\mathcal{D}$, а Это и означает, что система (P1) имеет решение в $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$. $\square$

Отметим, что в [4] было наложено больше условий и использовалась теорема Банаха о неподвижной точке. Таким образом, теорема 1 с условием (H1) является более общей.

Для доказательства единственности наложим следующие условия:

$$\begin{aligned} \exists L_i, \tilde{L}_i \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R} : \\ \left| K_i(t, s, x, y) - K_i(t, s, \tilde{x}, \tilde{y}) \right| \leq L_i |x - \tilde{x}| + \tilde{L}_i |y - \tilde{y}|, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (H3)$$

Пусть $\{T_j\}_{0 \leq j \leq k}$ — такое разбиение

$$a = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_k = b \quad (14)$$

интервала $[a, b]$, что существует $\rho > 0$ для которого при всех $t, s \in [T_j, T_{j+1}]$ имеем

$$\max(L_i, \tilde{L}_i) \int_{T_j}^{\min(t, T_{j+1})} |p_i(t-s)| ds \leq \rho < \frac{1}{2}. \quad (H2')$$

Отметим, что условие (H2') сожно вывести из условия (H2). Сначала докажем единственность решения системы (P1) на интервале $[T_0, T_1]$, затем продолжим это решение на $[T_1, T_2]$ и т. д.

Теорема 2. При выполнении условий (H3) решение системы (P1) единственно на $\mathcal{C}([T_0, T_1]) \times \mathcal{C}([T_0, T_1])$.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения (x, y) и $(\tilde{x}, \tilde{y})$ системы (P1). Тогда для $t \in [T_0, T_1]$ имеем

$$\begin{aligned} |x(t) - \tilde{x}(t)| &\leq \int_a^t |p_1(t-s)| \left| K_1(t, s, x(s), y(s)) - K_1(t, s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) \right| ds \leq \\ &\leq \int_a^t |p_1(t-s)| \left[L_1 |x(s) - \tilde{x}(s)| + \tilde{L}_1 |y(s) - \tilde{y}(s)| \right] ds \leq \\ &\leq \left[\max_{T_0 \leq t \leq T_1} |x_1(t) - x_2(t)| + \max_{T_0 \leq t \leq T_1} |y_1(t) - y_2(t)| \right] \max(L_1, \tilde{L}_1) \int_a^t |p_1(t-s)| ds \leq \\ &\leq \rho \left[\max_{T_0 \leq t \leq T_1} |x(t) - \tilde{x}(t)| + \max_{T_0 \leq t \leq T_1} |y(t) - \tilde{y}(t)| \right]. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} |y(t) - \tilde{y}(t)| &\leq \int_a^t |p_2(t-s)| \left| K_2(t, s, x(s), y(s)) - K_2(t, s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) \right| ds \leq \\ &\leq \rho \left[\max_{T_0 \leq t \leq T_1} |x(t) - \tilde{x}(t)| + \max_{T_0 \leq t \leq T_1} |y(t) - \tilde{y}(t)| \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\max_{T_0 \leq t \leq T_1} |x(t) - \tilde{x}(t)| + \max_{T_0 \leq t \leq T_1} |y(t) - \tilde{y}(t)| \leq 2\rho \left[\max_{T_0 \leq t \leq T_1} |x(t) - \tilde{x}(t)| + \max_{T_0 \leq t \leq T_1} |y(t) - \tilde{y}(t)| \right].$$

Поскольку $\rho < 1/2$, заключаем, что $(1 - 2\rho) > 0$; следовательно, $x(t) = \tilde{x}(t)$ и $y(t) = \tilde{y}(t)$ при $t \in [T_0, T_1]$. $\square$

Продолжим найденное решение на весь интервал $[a, b]$.

Теорема 3. Система (P1) имеет единственное решение $(x, y) \in \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$.

Доказательство. Обозначим через (x_0, y_0) решение системы (P1) на $[T_0, T_1]$, а через (x_1, y_1) — решение системы (P1) на $t \in [T_1, T_2]$:

$$\begin{cases} x_1(t) = f_1(t) + \int_{T_0}^{T_1} p_1(t-s) K_1(t, s, x_0(s), y_0(s)) ds + \int_{T_1}^t p_1(t-s) K_1(t, s, x_1(s), y_1(s)) ds, \\ y_1(t) = f_2(t) + \int_{T_0}^{T_1} p_2(t-s) K_2(t, s, x_0(s), y_0(s)) ds + \int_{T_1}^t p_2(t-s) K_2(t, s, x_1(s), y_1(s)) ds. \end{cases} \quad (15)$$

Доказательство существования и единственности решения (x_1, y_1) на $[T_1, T_2]$ проводится так же, как и выше. Определим теперь решение системы (P1) на $[T_0, T_2]$ следующим образом:

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [T_0, T_1], \\ x_1(t), & t \in [T_1, T_2], \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} y_0(t), & t \in [T_0, T_1], \\ y_1(t), & t \in [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Ясно, что $(x, y) \in \mathcal{C}([T_0, T_2]) \times \mathcal{C}([T_0, T_2])$, откуда следует, что система (P1) имеет единственное решение на $[T_0, T_2]$. Продолжая аналогичным образом, можно построить решение на $[a, b]$. $\square$

3. Численный эксперимент. Система (P1) содержит ядра, состоящие из двух слагаемых: регулярных K_i и слабо сингулярных p_i , $i = 1, 2$. Для устранения сингулярностей применим метод интегрирования произведения. Построим приближения регулярных частей K_1 , K_2 .

Пусть $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$ — разбиение интервала, где $t_j = a + jh$ и $h = (b - a)/n$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_{n,1}[K_1](t, s, x(s), y(s)) &= \frac{s - t_j}{h} K_1(t, t_{j+1}, x(t_{j+1}), y(t_{j+1})) + \frac{t_{j+1} - s}{h} K_1(t, t_j, x(t_j), y(t_j)), \\ P_{n,1}[K_2](t, s, x(s), y(s)) &= \frac{s - t_j}{h} K_2(t, t_{j+1}, x(t_{j+1}), y(t_{j+1})) + \frac{t_{j+1} - s}{h} K_2(t, t_j, x(t_j), y(t_j)), \end{aligned}$$

где $t_j \leq s \leq t_{j+1}$; получим приближение следующих интегралов:

$$\begin{aligned} \int_a^{t_i} p_1(t_i - s) K_1(t_i, s, x(s), y(s)) ds &\simeq \gamma_{i,1} K_1(t_i, t_0, x(t_0), y(t_0)) + \lambda_{i,i} K_1(t_i, t_i, x(t_i), y(t_i)) + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} (\gamma_{i,j+1} + \lambda_{i,j}) K_1(t_i, t_j, x(t_j), y(t_j)), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \int_a^{t_i} p_2(t_i - s) K_2(t_i, s, x(s), y(s)) ds &\simeq \tilde{\gamma}_{i,1} K_2(t_i, t_0, x(t_0), y(t_0)) + \tilde{\lambda}_{i,i} K_2(t_i, t_i, x(t_i), y(t_i)) + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} (\tilde{\gamma}_{i,j+1} + \tilde{\lambda}_{i,j}) K_2(t_i, t_j, x(t_j), y(t_j)), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{cases} \gamma_{i,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p_1(t_i - s)(t_{j+1} - s) ds, & \lambda_{i,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p_1(t_i - s)(s - t_j) ds, \\ \tilde{\gamma}_{i,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p_2(t_i - s)(t_{j+1} - s) ds, & \tilde{\lambda}_{i,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p_2(t_i - s)(s - t_j) ds \end{cases}$$

для всех $0 \leq j \leq i - 1$.

Приближенная система для (P1) получается следующим образом:

$$\begin{cases} X_i = f_1(t_i) + \gamma_{i,1} K_1(t_i, t_0, X_0, Y_0) + \sum_{j=1}^{i-1} (\gamma_{i,j+1} + \lambda_{i,j}) K_1(t_i, t_j, X_j, Y_j) + \lambda_{i,i} K_1(t_i, t_i, X_i, Y_i), \\ Y_i = f_2(t_i) + \tilde{\gamma}_{i,1} K_2(t_i, t_0, X_0, Y_0) + \sum_{j=1}^{i-1} (\tilde{\gamma}_{i,j+1} + \tilde{\lambda}_{i,j}) K_2(t_i, t_j, X_j, Y_j) + \tilde{\lambda}_{i,i} K_2(t_i, t_i, X_i, Y_i), \\ X_0 = f_1(a), \quad Y_0 = f_2(a), \end{cases} \quad (\Gamma)$$

для всех $0 \leq j \leq i - 1$, где X_i , Y_i — приближения для $x(t_i)$ и $y(t_i)$.

Теорема 4. При достаточно малых h система (Γ) имеет единственное решение.

Доказательство. Введем обозначение

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\| = |X| + |Y|.$$

Для всех $1 \leq i \leq n$ положим

$$\Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S_1 + \lambda_{i,i} K_1(t_i, t_i, X, Y) \\ S_2 + \tilde{\lambda}_{i,i} K_2(t_i, t_i, X, Y) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= f_1(t_i) + \gamma_{i,1}K_1(t_i, t_0, X_0, Y_0) + \sum_{j=1}^{i-1} (\gamma_{i,j+1} + \lambda_{i,j})K_1(t_i, t_j, X_j, Y_j), \\ S_2 &= f_2(t_i) + \tilde{\gamma}_{i,1}K_2(t_i, t_0, X_0, Y_0) + \sum_{j=1}^{i-1} (\tilde{\gamma}_{i,j+1} + \tilde{\lambda}_{i,j})K_2(t_i, t_j, X_j, Y_j). \end{aligned}$$

Предположив, что $X_0, X_1, \dots, X_{i-1}$ и $Y_0, Y_1, \dots, Y_{i-1}$ известны, получим систему неявных уравнений

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \Psi_i \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Докажем, что Ψ_i имеет единственную неподвижную точку,

$$\left\| \Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_i \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \right\|,$$

$$\eta_1 = \lambda_{i,i}(K_1(t_i, t_i, X, Y) - K_1(t_i, t_i, X', Y')), \quad \eta_2 = \tilde{\lambda}_{i,i}(K_2(t_i, t_i, X, Y) - K_2(t_i, t_i, X', Y')).$$

При достаточно малом h имеем

$$\begin{aligned} |\eta_1| &\leq \lambda_{i,i}(L_1|X - X'| + \tilde{L}_1|Y - Y'|) \leq \max(L_1, \tilde{L}_1)\lambda_{i,i}(|X - X'| + |Y - Y'|), \\ |\eta_2| &\leq \tilde{\lambda}_{i,i}(L_2|X - X'| + \tilde{L}_2|Y - Y'|) \leq \max(L_2, \tilde{L}_2)\tilde{\lambda}_{i,i}(|X - X'| + |Y - Y'|). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left\| \Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_i \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\| \leq \max(L_1, \tilde{L}_1, L_2, \tilde{L}_2) \max(\lambda_{i,i}, \tilde{\lambda}_{i,i}) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|.$$

Следовательно, $\lim_{h \rightarrow 0} \max(\lambda_{i,i}, \tilde{\lambda}_{i,i}) = 0$. Согласно теореме Банаха о неподвижной точке Ψ_i является сжимающим отображением при достаточно малом h . Таким образом, система (Г) имеет единственное решение $\{(X_i, Y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$. $\square$

Докажем сходимость этого метода. Сначала установим согласованность. Ошибка согласованности — это величина

$$\Delta(h, t_i) = \begin{pmatrix} \delta(h, t_i) \\ \hat{\delta}(h, t_i) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \delta(h, t_i) &= \int_a^{t_i} p_1(t_i - s)K_1(t_i, s, x(s), y(s))ds - \sum_{j=0}^i \mu_{ij}K_1(t_i, t_j, x(t_j), y(t_j)), \\ \hat{\delta}(h, t_i) &= \int_{t_0}^{t_i} p_2(t_i - s)K_2(t_i, s, x(s), y(s))ds - \sum_{j=0}^i \hat{\mu}_{ij}K_2(t_i, t_j, x(t_j), y(t_j)), \end{aligned}$$

причем

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \gamma_{i,1} & \text{при } j = 0, \\ \gamma_{i,j+1} + \lambda_{i,j} & \text{при } 1 \leq j \leq i-1, \\ \lambda_{i,i} & \text{при } j = i; \end{cases} \quad \hat{\mu}_{ij} = \begin{cases} \tilde{\gamma}_{i,1} & \text{при } j = 0, \\ \tilde{\gamma}_{i,j+1} + \tilde{\lambda}_{i,j} & \text{при } 1 \leq j \leq i-1, \\ \tilde{\lambda}_{i,i} & \text{при } j = i. \end{cases}$$

Предложение 1. Если $\Delta(h, t_i)$ — непрерывная функция, то для всех $t \in [a, b]$ и $i = 1, 2, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta(h, t_i)| &\leq \max_{\substack{a \leq t \leq b; \\ x, y \in \mathbb{R}}} \omega_0(h, K_1(t, \cdot, x, y)) \|p_1\|_1 + \max_{\substack{a \leq t \leq b; \\ x, y \in \mathbb{R}}} \omega_0(h, K_2(t, \cdot, x, y)) \|p_2\|_1 + \\ &\quad + 2\rho(\omega_0(h, f_1) + \omega_0(h, f_2) + \omega(h, H_1) + \omega(h, H_2)), \end{aligned}$$

где

$$H_1(t) = \int_a^t p_1(t-s)K_1(t, s, x(s), y(s))ds, \quad H_2(t) = \int_a^t p_2(t-s)K_2(t, s, x(s), y(s))ds.$$

Доказательство. Известно, что

$$\begin{aligned} |\delta(h, t_i)| &\leq \max_{|\tau-\theta|<h} \left| K_1(t_i, \tau, x(\tau), y(\tau)) - K_1(t_i, \tau, x(\theta), y(\theta)) \right| + \\ &\quad + \left| K_1(t_i, \tau, x(\theta), y(\theta)) - K_1(t_i, \theta, x(\theta), y(\theta)) \right| \int_a^{t_n} |p_1(t_i-s)| ds \leq \\ &\leq \max_{\substack{a \leq t \leq b; \\ x, y \in \mathbb{R}}} \left| K_1(t, \tau, x, y) - K_1(t, \theta, x, y) \right| \int_a^{t_i} |p_1(t_i-s)| ds + \rho(\omega_0(h, x) + \omega_0(h, y)), \end{aligned}$$

но

$$x(\theta) - x(\tau) = f_1(\theta) - f_1(\tau) + \int_a^\theta p_1(\theta-s)K_1(\theta, s, x(s), y(s))ds - \int_a^\tau p_1(\tau-s)K_1(\tau, s, x(s), y(s))ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \max_{|\tau-\theta|<h} |x(\theta) - x(\tau)| &\leq \max_{|\tau-\theta|<h} |f_1(\theta) - f_1(\tau)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |H_1(\theta) - H_1(\tau)|, \\ \omega_0(h, x) &\leq \omega_0(h, f_1) + \omega_0(h, H_1); \end{aligned}$$

получаем

$$\omega_0(h, y) \leq \omega_0(h, f_2) + \omega_0(h, H_2).$$

Таким образом,

$$|\delta(h, t_i)| \leq \rho(\omega_0(h, f_1) + \omega_0(h, f_2) + \omega_0(h, H_1) + \omega_0(h, H_2)) + \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} \omega_0(h, K_1(t, \cdot, x, y)) \|p_1\|_1.$$

Повторяя аналогичные шаги для $\hat{\delta}(h, t_i)$, получим

$$|\hat{\delta}(h, t_i)| \leq \rho(\omega_0(h, f_1) + \omega_0(h, f_2) + \omega_0(h, H_1) + \omega_0(h, H_2)) + \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} \omega_0(h, K_2(t, \cdot, x, y)) \|p_2\|_1,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta(h, t_i)| &\leq \max_{\substack{a \leq t \leq b; \\ x, y \in \mathbb{R}}} \omega_0(h, K_1(t, \cdot, x, y)) \|p_1\|_1 + \max_{\substack{a \leq t \leq b; \\ x, y \in \mathbb{R}}} \omega_0(h, K_2(t, \cdot, x, y)) \|p_2\|_1 + \\ &\quad + 2\rho(\omega_0(h, f_1) + \omega_0(h, f_2) + \omega(h, H_1) + \omega(h, H_2)). \quad \square \end{aligned}$$

Таким образом, метод согласован, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|\Delta(h, t_i)\| \right) = 0.$$

Далее, докажем сходимост; для этого определим ошибку дискретизации следующим образом:

$$\zeta_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \hat{\xi}_i \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \xi_i = X_i - x(t_i), \\ \hat{\xi}_i = Y_i - y(t_i). \end{cases}$$

Метод называется сходящимся, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq n} \|\zeta_i\| \right) = 0.$$

Теорема 5. *Предположим, что выполнены условия (Н1), (Н2) и (Н3), а интервал $[a, b]$ разбит на конечно число подынтервалов $[a = T_0, T_1], [T_1, T_2], \dots, [T_{m-1}, T_m = b]$. причем $j_v \leq T_v/h$ — наибольшее целое число, $\mu_{ij} = \hat{\mu}_{ij} = 0$ при $j > i$, а веса $\mu_{ij}, \hat{\mu}_{ij}$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\sum_{j=j_v}^{j_{v+1}-1} \left| \frac{\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ij} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ij}}{1 - [\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ii} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ii}]} \right| \leq 2\rho < 1, \quad i \geq 1, \quad 0 \leq v \leq m.$$

Если указанное разбиение не зависит от h , то

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|\zeta_i\| \leq \left(\frac{1}{1 - 2\rho} \right)^m \max_{1 \leq i \leq n} \|\Delta(h, t_i)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sum_{j=0}^i \mu_{ij} \left[K_1(t_i, t_j, X_j, Y_j) - K_1(t_i, t_j, x(t_j), y(t_j)) \right] - \delta(h, t_i), \\ \hat{\xi}_i &= \sum_{j=0}^i \hat{\mu}_{ij} \left[K_2(t_i, t_j, X_j, Y_j) - K_2(t_i, t_j, x(t_j), y(t_j)) \right] - \hat{\delta}(h, t_i). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\zeta_i\| \leq \sum_{j=0}^i \left[\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ij} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ij} \right] \|\zeta_j\| + \|\Delta(h, t_i)\|.$$

Для малых h имеем

$$\|\zeta_i\|_1 \leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ij} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ij}}{1 - [\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ii} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ii}]} \|\zeta_j\| + \frac{\|\Delta(h, t_i)\|}{1 - [\max(L_1, \tilde{L}_1)\mu_{ii} + \max(L_2, \tilde{L}_2)\hat{\mu}_{ii}]}.$$

Для завершения доказательства остается применить [6, Theorem 8.1]. $\square$

4. Численные примеры.

Пример 1. Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений Вольтерры со слабо сингулярным ядром:

$$\begin{cases} x(t) = \int_a^t (t-s)^{-1/8} \frac{t^2(2e^{-s}+1)}{e^{-x(s)} + e^{-y(s)} + 1} ds + f_1(t), \\ y(t) = \int_a^t (t-s)^{-2/7} \frac{e^{-t}(t+s)}{\sin(x(s))^2 + \cos(y(s))^2 + 1} ds + f_2(t); \end{cases} \quad (\text{P1})$$

здесь $t \in [0, 1]$, а ядра, имеющие вид

$$\begin{aligned} K_1(t, s, x, y) &= \frac{t^2(2e^{-s}+1)}{x^2 + y^2 + t^2}, & K_2(t, s, x, y) &= \frac{e^{-t}(t+s)}{\sin(x)^2 + \cos(y)^2 + 1}, \\ p_1(t, s) &= (t-s)^{-1/8}, & p_2(t, s) &= (t-s)^{-2/7}. \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям (Н1), (Н2) и (Н3) при $L_1 = \tilde{L}_1 = M_1 = 3$, $L_2 = \tilde{L}_2 = M_2 = 2$. Если положить

$$f_1(t) = t - \frac{8}{7}t^{23/8}, \quad f_2(t) = t - \frac{133}{120}e^{-t}t^{12/7},$$

получим $x(t) = t$, $y(t) = t$.

Величины X_i и Y_i не поддаются точному вычислению, но могут быть найдены приближенно при помощи итерационного метода Банаха при условии остановки $\|X_{\text{new}} - X_{\text{old}}\| \leq 10^{-7}$.

Таблица 1. Численные результаты для примера 1

n	$E(h)$
10	$6,4097 \cdot 10^{-3}$
50	$6,4419 \cdot 10^{-4}$
100	$2,4559 \cdot 10^{-4}$
500	$2,6617 \cdot 10^{-5}$
1000	$1,0250 \cdot 10^{-5}$
1500	$5,8676 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2. Численные результаты для примера 2

n	$E(h)$
10	$2,9003 \cdot 10^{-3}$
50	$2,4063 \cdot 10^{-4}$
100	$8,4262 \cdot 10^{-5}$
500	$7,4798 \cdot 10^{-6}$
1000	$2,6421 \cdot 10^{-6}$
1500	$1,4377 \cdot 10^{-6}$

В таблице 1 приведены оценки ошибки, т.е. разности точного и приближенного решений:

$$E(h) = \max_{0 \leq i \leq n} |X_i - x(t_i)| + \max_{0 \leq i \leq n} |Y_i - y(t_i)|, \quad (19)$$

Отметим, что разность точного и приближенного решением стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$; это показывает сходимость и эффективность нашего метода.

Пример 2. Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений Вольтерры со слабо сингулярными ядрами:

$$\begin{cases} x(t) = \int_a^t (t-s)^{-1/2} \frac{2s \ln(1+t)}{\sqrt{x^2(s) + y^2(s) + 1}} ds + f_1(t), \\ y(t) = \int_a^t (t-s)^{-1/5} (t+s^2) \cos\left(\frac{1}{x^2(s) + y^2(s) + 1}\right) \sin(t) ds + f_2(t); \end{cases} \quad (P1)$$

здесь $t \in [0, 1]$, а ядра, имеющие вид

$$K_1(t, s, x, y) = \frac{2s \ln(1+t)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \quad K_2(t, s, x, y) = (t+s^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2 + 1}\right) \sin(t),$$

$$p_1(t, s) = (t-s)^{-1/2}, \quad p_2(t, s) = (t-s)^{-1/5}$$

удовлетворяют условиям (H1), (H2) и (H3) при $L_1 = \tilde{L}_1 = 2\sqrt{2}$, $M_1 = \ln 2$, $L_2 = \tilde{L}_2 = 4$, $M_2 = 2$. Если положить

$$f_1(t) = \sin(t) - \frac{4\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \ln(1+t), \quad f_2(t) = \cos(t) - \frac{5}{252} \cos\left(\frac{1}{2}\right) \sin(t) (25t^2 + 63)t^{4/5}.$$

получим $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$.

Величины X_i и Y_i не поддаются точному вычислению, но могут быть найдены приближенно при помощи итерационного метода Банаха при условии остановки $\|X_{\text{new}} - X_{\text{old}}\| \leq 10^{-7}$.

В таблице 2 приведены оценки ошибки (19). На рис. 1 показаны графики точного и приближенного решений. Как и в предыдущем примере, разность точного и приближенного решением стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, что подтверждает сходимость и эффективность метода.

5. Заключение. В данной работе проведено обобщение результатов, полученных в [4] для нелинейного слабо сингулярного интегрального уравнения Вольтерра, на систему уравнений. Для доказательства существования и единственности решения использована теорема Шаудера о неподвижной точке. Для численного исследования применен метод интегрирования произведения, позволяющий устранить сингулярность ядер, что дает возможность аппроксимировать решение этой системы.

Рис. 1. Точное и приближенное решения системы (P1) при $n = 10$ и $n = 50$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ahues M., Largillier A., Titaud O. The roles of a weak singularity and the grid uniformity in relative error bounds// Numer. Funct. Anal. Optim. — 2001. — 22, № 7. — P. 789–814.
2. Atkinson K., Han W. Theoretical Numerical Analysis. — New York: Springer-Verlag, 2009.
3. Brunner H., van der Houwen P. J. The numerical solution of Volterra equations// Math. Comput. — 1988. — 51, № 183. — P. 379.
4. Ghiat M., Guebbai H. Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear equation with weakly singular kernel// Comput. Appl. Math. — 2018. — 37, № 4. — P. 4661–4674.
5. Guebbai H., Aissaoui M. Z., Debbar I., Khalla B. Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation// Appl. Math. Comput. — 2014. — 229. — P. 367–373.
6. Linz P. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. — Philadelphia: SIAM, 1985.
7. Maleknejad K., Torabi P., Sauter S. Numerical solution of a nonlinear Volterra integral equation// Vietnam J. Math. — 2015. — 44, № 1. — P. 1–24.
8. Maleknejad K., Torabi P., Mollapourasl R. Fixed point method for solving nonlinear quadratic Volterra integral equations// Comp. Math. Appl. — 2011. — 62, № 6. — P. 2555–2566.
9. Segni S., Ghiat M., Guebbai H. New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation// Asian-Eur. J. Math. — 2019. — 12, № 1. — 1950016.

Ghiat Mourad

Universite 8 Mai 1945, Guelma, Algeria

E-mail: mourad.ghi24@gmail.com; ghiat.mourad@univ-guelma.dz

Kamouche Soumia

Universite 8 Mai 1945 Guelma, Algeria

E-mail: soumia.kamouche@gmail.com

Khellaf Ammar

Universite 8 Mai 1945, Guelma, Algeria

E-mail: amarlasix@gmail.com; khellaf.ammar@univ-guelma.dz

Merchela Wassim

Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина

E-mail: merchela.wassim@gmail.com