Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Голубков, Спектр оператора Штурма—Лиувилля на кривой с параметром в краевых условиях и условиях разрывов решений, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 45–68

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-45-68>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:33:21

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 45–68
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-45-68

УДК 517.927.2

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ НА КРИВОЙ С ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ И УСЛОВИЯХ РАЗРЫВОВ РЕШЕНИЙ

© 2021 г. А. А. ГОЛУБКОВ

Аннотация. При больших значениях модуля спектрального параметра получена и исследована асимптотика решений уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида с кусочно целым потенциалом на лежащей в комплексной плоскости спрямляемой кривой произвольной формы с конечным числом точек, в которых решения и (или) их производные претерпевают разрывы, полиномиально зависящие от спектрального параметра. Для распадающихся краевых условий, также полиномиально зависящих от спектрального параметра, изучен спектр соответствующего оператора Штурма—Лиувилля.

Ключевые слова: уравнение Штурма—Лиувилля на кривой, условия разрыва решений, кусочно целый потенциал, асимптотика решений, асимптотика спектра.

SPECTRUM OF THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR ON A CURVE WITH PARAMETERS IN THE BOUNDARY CONDITIONS AND DISCONTINUITY CONDITIONS FOR SOLUTIONS

© 2021 А. А. GOLUBKOV

ABSTRACT. For large values of the modulus of the spectral parameter, we obtain and analyze the asymptotics of solutions of the standard Sturm–Liouville equation with a piecewise integer potential on a general rectifiable curve lying in the complex plane and having a finite number of points at which the solutions and/or their derivatives have discontinuities polynomially depending on the spectral parameter. For decaying boundary conditions that also depend on the spectral parameter polynomially, we examine the spectrum of the corresponding Sturm–Liouville operator.

Keywords and phrases: Sturm–Liouville equation on a curve, discontinuity condition for solutions, piecewise integral potential, asymptotics of solutions, asymptotics of the spectrum.

AMS Subject Classification: 34B24, 34L20, 34M45

1. Введение. Постановка задачи и основные результаты. Уравнения Штурма—Лиувилля общего вида на отрезке часто встречаются в различных приложениях. Например, распространение света в одномерно неоднородной пластине толщиной d , обладающей магнитными свойствами, может быть описано уравнением вида

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p^2(x)}{\theta(x)} \frac{dv}{dx} \right) + \theta(x) p^2(x) (q(x) - \lambda^2) v(x) = 0 \quad (x \in [0, d]), \quad (1.1)$$

где комплекснозначные функции p , θ и q — кусочно аналитичны на отрезке действительной оси $[0, d]$, причем $p \neq 0$ и $\theta \neq 0$ на этом отрезке.

Спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке активно изучались и изучаются в различных постановках, в том числе в случае краевых условий, полиномиально зависящих от спектрального параметра и при наличии разрывов решений во внутренних точках (см., например, работы [11, 14, 17–19, 24, 25, 27] и библиографию в них). Однако, несмотря на это, отсутствуют результаты, которые можно было бы непосредственно использовать при исследовании краевых задач для уравнения (1.1), не накладывая на его коэффициенты ограничений, дополнительных к перечисленным выше. Во многом это связано с принципиальными трудностями, возникающими в этом случае при попытке применить классические методы (см. [2, 9]) получения асимптотики решений дифференциальных уравнений при больших значениях $|\lambda|$. Результаты настоящей работы показывают, что одним из возможных путей преодоления этих трудностей является использование известной подстановки (см. [11]), которая в наших обозначениях принимает вид

$$u(z) := p(x)v(x), \quad z = V(x) = \int_0^x \theta(\tau) d\tau \quad (x \in [0, d]). \quad (1.2)$$

Замена (1.2) преобразует уравнение (1.1) в уравнение Штурма—Лиувилля стандартного вида

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \quad (1.3)$$

на спрямляемой кривой γ с параметризацией $z = V(x)$ ($x \in [0, d]$). При этом потенциал Q связан с функциями p , θ и q следующим соотношением:

$$Q(z) := q(x) - \frac{1}{p(x)\theta(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\theta(x)} \frac{dp}{dx} \right) \quad (z = V(x), \quad x \in [0, d]).$$

У кривой γ могут быть участки (точки), которые проходятся более одного раза, т. е. соответствуют двум или более интервалам значений (значениям) параметра t . Такие участки (точки) различаются очередностью прохождения, а геометрически совпадающие кривые с различным порядком прохождения участков считаются различными. Если функция θ действительная и знакопостоянная на отрезке $[0, d]$, то γ является отрезком действительной оси.

В (1.3) и далее штрих по умолчанию обозначает производную по z вдоль некоторой спрямляемой кривой. Иными словами, считается, что если эта кривая задана параметрически функцией $z = V(x)$, то

$$f'(z) \equiv f'(V(x)) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(V(x+\delta)) - f(V(x))}{V(x+\delta) - V(x)}.$$

Заметим, что если функция $f(z)$ аналитична в некоторой области комплексной плоскости, то в любой точке этой области она имеет производные вдоль любой проходящей через эту точку спрямляемой кривой, которые совпадают между собой и равны обычной производной $df(z)/dz$ функции $f(z)$ в этой точке.

Производную по действительной переменной x будем обозначать штрихом и нижним индексом x . Пусть нас интересовали непрерывные решения v уравнения (1.1), такие, что функции $p^2 v'_x / \theta$ также непрерывны. Тогда в силу (1.2), если функции p и (или) pp'_x / θ имеют разрывы при некотором значении переменной $x \in [0, d]$, то в соответствующей точке $z = V(x)$ кривой γ решения уравнения (1.3) и (или) их производные вдоль кривой γ также имеют разрывы:

$$\begin{pmatrix} u(V(x+0)) \\ u'(V(x+0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}(V(x)) \begin{pmatrix} u(V(x-0)) \\ u'(V(x-0)) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

При этом матрица перехода $\hat{\eta}$ в этой точке кривой γ определяется формулой

$$\hat{\eta}(V(x)) = \begin{pmatrix} \frac{p(x+0)}{p(x-0)} & 0 \\ \frac{p'_x(x+0)}{p(x-0)\theta(x+0)} - \frac{p'_x(x-0)}{p(x+0)\theta(x-0)} & \frac{p(x-0)}{p(x+0)} \end{pmatrix},$$

не зависит от спектрального параметра и имеет определитель, равный единице. В (1.4) и далее

$$f(V(x \pm 0)) := \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta > 0} f(V(x \pm \delta)).$$

Если уравнение (1.1) дополнить при некоторых значениях переменной x полиномиально зависящими от спектрального параметра $\rho := \lambda^2$ условиями разрыва решений v и функций $p^2 v'_x / \theta$, то в соответствующих точках $z = V(x)$ кривой γ решения уравнения (1.3) и их производные вдоль кривой γ также будут иметь разрывы, которые полиномиально зависят от ρ ; то же самое относится и к граничным условиям.

Исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений на комплексной плоскости посвящено большое число работ (см. книги [2, 9, 16] и библиографию в них). Однако асимптотическое поведение при $|\lambda| \rightarrow \infty$ решений уравнений Штурма—Лиувилля на кривых и спектры краевых задач для таких уравнений изучены только при достаточно жестких ограничениях на форму кривой (см. [5, 7, 8]) и (или) на коэффициенты уравнения (см. [2, 4, 16]). Например, в [7] рассмотрены задачи с простейшими краевыми условиями для уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида (1.3) на выпуклой кривой γ с параметризацией $z(x) = x + is(x)$ ($x \in [0, 1]$, $s(0) = s(1) = 0$, функция $s(x)$ непрерывно дифференцируема, s' не убывает, $s'(0) < 0 < s'(1)$, i — мнимая единица) и исследованы необходимые и достаточные условия (на потенциал $Q \in L^1(\gamma)$) локализации спектра этих задач около одного луча. В [4] получена асимптотика решений уравнения (1.3), непрерывно дифференцируемых на спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$ произвольной формы с заданным на ней потенциалом Q , который является кусочно целым. Последнее означает, что кривую можно разбить N точками на $N + 1$ таких участков, что на каждом из них потенциал совпадает почти всюду с какой-либо целой функцией, причем на соседних участках эти целые функции различны. Краевые задачи на кривых (и даже ломаных) произвольной формы для уравнения (1.3) с граничными условиями и условиями разрыва решений, полиномиально зависящими от параметра, ранее не рассматривались.

В настоящей работе полученная в [4] асимптотика решений уравнения (1.3) с кусочно целым потенциалом обобщена на случай, когда на произвольной спрямляемой кривой γ задано конечное число точек, в которых эти решения и (или) их производные вдоль кривой претерпевают разрывы. Изучена краевая задача для такого уравнения с распадающимися граничными условиями. При этом на элементы матриц перехода и коэффициенты в граничных условиях накладываются следующие ограничения — полиномиальная зависимость от спектрального параметра ρ и независимость от ρ определителей матриц перехода во внутренних точках кривой. Доказано, что в зависимости от формы кривой γ , а также значений элементов матриц перехода и коэффициентов в граничных условиях, спектр краевой задачи может быть только одного из четырех типов: совпадающий со всей комплексной плоскостью, пустой, конечный или счетный, локализованный около конечного числа лучей. Сформулированы необходимые и достаточные условия реализации каждого из случаев и исследованы асимптотические свойства счетного спектра.

Перейдем к формализации исследуемой задачи и изложению основных результатов работы.

В работе будут использованы следующие обозначения: $O(1)$ и $\hat{O}(1)$ — соответственно функции и матрицы функций параметра λ , вид которых для нас не важен, ограниченные при $|\lambda| > \lambda_{cr}$, где λ_{cr} обозначает некоторую конечную величину (разную для разных функций и матриц),

$$\hat{\sigma}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть на непрерывной спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$ с параметризацией $z = V(t)$ ($t \in [t_0, t_f]$) определена кусочно целая функция Q и заданы точки, в которых решения уравнения (1.3) и (или) их производные имеют разрывы, полиномиально зависящие от спектрального параметра. Иными словами, пусть существуют такие целое число $N \geq 0$ и набор чисел $T = \{t_j\}_0^{N+1}$: $t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1} \equiv t_f$, что

$$Q(z) \stackrel{\text{н.б.}}{=} Q_m(z), \text{ если } z = V(t), \ t \in [t_m, t_{m+1}] \quad (m = \overline{0, N}), \quad (1.5)$$

где все Q_m — целые функции. Кроме того, функции $u(z)$ и $u'(z)$ удовлетворяют следующим условиям разрыва в точках $z_j := V(t_j)$ ($j = \overline{0, N+1}$) кривой γ :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u(V(t_0 + 0)) \\ u'(V(t_0 + 0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(0)} \begin{pmatrix} u(V(t_0)) \\ u'(V(t_0)) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u(V(t_n + 0)) \\ u'(V(t_n + 0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(n)} \begin{pmatrix} u(V(t_n - 0)) \\ u'(V(t_n - 0)) \end{pmatrix} \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1), \\ \begin{pmatrix} u(V(t_{N+1})) \\ u'(V(t_{N+1})) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(N+1)} \begin{pmatrix} u(V(t_{N+1} - 0)) \\ u'(V(t_{N+1} - 0)) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Здесь матрицы перехода $\hat{\eta}^{(j)}$ полиномиально зависят от ρ ($\rho = \lambda^2$), и, следовательно, их элементы могут быть записаны в виде

$$\eta_{\alpha\beta}^{(j)}(\rho) = \eta_{\alpha\beta,0}^{(j)} \rho^{N_{\alpha\beta}^{(j)}} \left(1 + \frac{O(1)}{\rho} \right) \quad (\alpha, \beta \in \{1, 2\}, j = \overline{0, N+1}, \eta_{\alpha\beta,0}^{(j)} \in \mathbb{C}), \quad (1.7)$$

где $N_{\alpha\beta}^{(j)}$ — целые неотрицательные числа, а $\eta_{\alpha\beta,0}^{(j)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\eta_{\alpha\beta}^{(j)}(\rho) \equiv 0$. Будем также считать, что выполнены следующие условия:

$$\det \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \equiv B_n \quad (B_n \in \mathbb{C}, n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1), \quad (1.8)$$

$$\hat{\eta}^{(n)}(\rho) \not\equiv \hat{I} \text{ или (и) } Q_n \not\equiv Q_{n-1} \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1). \quad (1.9)$$

Определение 1.1. При выполнении условий (1.5), (1.7)–(1.9) будем называть рассматриваемое на непрерывной спрямляемой кривой γ уравнение (1.3), дополненное условиями разрыва решений (1.6), уравнением класса H на кривой γ , а точки $z_j = V(t_j)$ ($j = \overline{0, N+1}$) — характеристическими точками кривой γ и уравнения (1.3) класса H на γ . При этом упорядоченное множество

$$W := \{N, \{z_j, \hat{\eta}^{(j)}\}_0^{N+1}, \{Q_m\}_0^N\} \quad (1.10)$$

будем называть набором характеристических данных кривой γ и уравнения (1.3) класса H на γ .

Определение 1.2. Будем называть $u(z)$ решением уравнения (1.3) класса H на кривой γ , если функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (1.3) почти всюду на γ , является непрерывно дифференцируемой во всех ее точках, кроме, возможно, характеристических, и удовлетворяет всем условиям разрыва (1.6).

Определение 1.3. Пусть $u_1(z), u_2(z)$ — решения уравнения (1.3) класса H на кривой γ с характеристическими точками z_j ($j = \overline{0, N+1}$) и

$$u_1(z_b) = 1, \quad u_1'(z_b) = 0, \quad u_2(z_b) = 0, \quad u_2'(z_b) = 1 \quad (z_b \in \gamma, z_b \notin \{z_j\}_1^N \text{ при } N \geq 1). \quad (1.11)$$

Назовем передаточной матрицей уравнения (1.3) класса H между точками z_b и z кривой γ матрицу

$$\hat{P}(\gamma, z, z_b) := \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix} \quad (z \in \gamma, z \notin \{z_j\}_1^N \text{ при } N \geq 1).$$

Передаточной матрицей вдоль кривой будем называть передаточную матрицу между начальной и конечной точками кривой.

В настоящей статье кусочная целостность потенциала Q используется для деформации кривой γ в ломаную с вершинами в характеристических точках без изменения передаточной матрицы вдоль нее. Поэтому все полученные результаты справедливы также, если каждая из функций Q_m ($m = \overline{0, N}$) в (1.5) ограничена на участке γ_m кривой γ , соединяющем характеристические точки z_m и z_{m+1} , и является безмонодромным потенциалом (см. [7, 21]) уравнения Штурма—Лиувилля (1.3) в некоторой достаточно большой области G_m , зависящей от формы кривой и набора характеристических данных (1.10). Так, если кривая γ полностью лежит на некоторой прямой, то достаточно, чтобы каждая из функций Q_m была аналитична на отрезке γ_m . В наиболее важном случае простого набора характеристических данных (см. определение 1.4 и теорему 1.1) область G_m должна быть выпуклой и содержать γ_m .

Лемма 1.1. *Элементы передаточной матрицы $\hat{P}$ уравнения (1.3) класса H вдоль кривой γ однозначно определяются заданием набора характеристических данных (1.10) этой кривой и являются целыми функциями спектрального параметра ρ ($\rho = \lambda^2$); определитель*

$$\det \hat{P} = \prod_{j=0}^{N+1} \det \hat{\eta}^{(j)}$$

не зависит от ρ и

$$\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0) = \hat{\eta}^{(N+1)} \hat{P}_0^{(N)} \hat{\eta}^{(N)} \dots \hat{P}_0^{(0)} \hat{\eta}^{(0)}, \quad (1.12)$$

где

$$\hat{P}_0^{(m)} := \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta > 0} \hat{P}(\gamma, V(t_{m+1} - \delta), V(t_m + \delta)) \quad (m \in \{0, \dots, N\})$$

— передаточная матрица уравнения (1.3) между точками z_m и z_{m+1} кривой γ в отсутствии разрывов решений.

Доказательство. Пусть $u_\alpha^{(m)}(z)$ ($\alpha \in \{1, 2\}$, $m \in \{0, \dots, N\}$) — целые решения вспомогательного уравнения Штурма—Лиувилля

$$\frac{d^2 u^{(m)}}{dz^2} + (Q_m - \lambda^2) u^{(m)} = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (1.13)$$

с начальными условиями (1.11) в точке z_m . Определим функции $v_\alpha^{(s)}(z)$ ($s \in \{-1, 0, \dots, N\}$) и $\tilde{v}_\alpha^{(p)}(z)$ ($p \in \{-1, 0, \dots, N-1\}$) следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} v_\alpha^{(-1)}(z) := u_\alpha^{(0)}(z), \\ \left(\frac{\tilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z)}{d\tilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z)} \right) := \hat{\eta}^{(m)} \left(\frac{v_\alpha^{(m-1)}(z)}{dv_\alpha^{(m-1)}(z)} \right) \quad (m \in \{0, \dots, N\}), \\ v_\alpha^{(m)}(z) := \tilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z_m) u_1^{(m)}(z) + \frac{d\tilde{v}_\alpha^{(m-1)}(z)}{dz} \Big|_{z=z_m} u_2^{(m)}(z). \end{cases} \quad (1.14)$$

Тогда, если γ_m ($m \in \{0, \dots, N\}$) — участок кривой γ , соединяющий точки z_m и z_{m+1} , то в силу определений 1.1 и 1.2 функции $u_\alpha(z)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} u_1(z_0) = 1, \quad u_1'(z_0) = 0, \quad u_2(z_0) = 0, \quad u_2'(z_0) = 1, \\ u_\alpha(z) := v_\alpha^{(m)}(z), \quad z \in \gamma_m \setminus \{z_m, z_{m+1}\} \quad (m \in \{0, \dots, N\}), \\ \left(\frac{u_\alpha(z_{N+1})}{u_\alpha'(z_{N+1})} \right) := \hat{\eta}^{(N+1)} \left(\frac{v_\alpha^{(N)}(z_{N+1})}{dv_\alpha^{(N)}(z)} \Big|_{z=z_{N+1}} \right), \end{cases} \quad (1.15)$$

будут решениями уравнения (1.3) класса H на γ , удовлетворяющими условиям (1.11) в точке z_0 . При этом формула (1.12) следует из определения 1.3 передаточной матрицы и соотношений (1.14), (1.15), а остальные утверждения леммы 1.1 следуют из формулы (1.12), определения 1.1 и соответствующих свойств решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами (см. [2, § 2, 24]). $\square$

Определение 1.4. Набор характеристических данных (1.10) уравнения (1.3) класса H будем называть простым, если $N = 0$ или выполнены следующие условия

$$\hat{\eta}^{(n)} \notin \Omega := \{A\hat{I}, A_1\hat{\sigma}_3 \mid A \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, A_1 \in \mathbb{C}\} \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1), \quad (1.16)$$

$$\Delta z_m := z_{m+1} - z_m \neq 0 \quad (m = \overline{0, N}). \quad (1.17)$$

Соотношение (1.16) означает, например, что $\hat{\eta}^{(n)} \neq A_1\hat{\sigma}_3$ ($A_1 \in \mathbb{C}$), но не исключает существования такого $\rho_0 \in \mathbb{C}$, что $\hat{\eta}^{(n)}(\rho_0) = A_1\hat{\sigma}_3$. Подчеркнем также, что в силу условий (1.8) матрицы перехода могут иметь вид $A\hat{I}$ или $A\hat{\sigma}_3$ только если A не зависит от ρ .

Теорема 1.1. Пусть уравнение (1.3) класса H с набором характеристических данных (1.10) имеет вдоль кривой γ передаточную матрицу $\hat{P}$. Тогда на некоторой кривой $\tilde{\gamma}$ существует уравнение (1.3) класса H с таким простым набором характеристических данных $\tilde{W} = \{\tilde{N}, \{\tilde{z}_j, \hat{\eta}^{(j)}\}_0^{\tilde{N}+1}, \{\tilde{Q}_m\}_0^{\tilde{N}}\}$ ($\tilde{N} \leq N$) и передаточной матрицей $\hat{\tilde{P}}$ вдоль кривой $\tilde{\gamma}$, что

$$\hat{\eta}^{(\tilde{N}+1)}(\rho) \dots \hat{\eta}^{(0)}(\rho) = \hat{\eta}^{(N+1)}(\rho) \dots \hat{\eta}^{(0)}(\rho), \quad \hat{\tilde{P}}(\rho) = \hat{P}(\rho) \quad (\rho \in \mathbb{C}). \quad (1.18)$$

Теорема 1.1 позволяет далее рассматривать уравнения (1.3) класса H только с простыми наборами характеристических данных. При ее доказательстве в конце раздела 2 описан алгоритм построения простого набора характеристических данных $\tilde{W}$, удовлетворяющего условиям (1.18), из произвольного набора характеристических данных W за конечное число элементарных действий.

Определение 1.5. Простой набор характеристических данных (1.10) с $N = 0$ и $z_1 = z_0$ будем называть точечным.

Лемма 1.2. Точечный набор характеристических данных (1.10) соответствует уравнению (1.3) класса H на произвольной замкнутой кривой γ с целым потенциалом Q_0 . Передаточная матрица $\hat{P}$ этого уравнения вдоль кривой γ равна $\hat{\eta}^{(1)}\hat{\eta}^{(0)}$, причем кривую γ можно стянуть в точку z_0 без изменения $\hat{P}$.

Доказательство. Лемма следует из определений 1.1, 1.5, формулы (1.12) и того факта, что передаточная матрица уравнения (1.3) с целым потенциалом вдоль произвольной замкнутой кривой без разрывов решений равна $\hat{I}$ (см. [2, 9]). $\square$

Определение 1.6. Будем называть кривую простой, если на ней задано уравнение (1.3) класса H с простым набором характеристических данных (1.10), отличным от точечного.

Свойства передаточной матрицы уравнения (1.3) класса H вдоль кривой с точечным набором характеристических данных описаны в лемме 1.2. Асимптотика элементов передаточной матрицы вдоль простой кривой получена в разделе 3, и с ее помощью в конце этого раздела доказана теорема 1.2.

Теорема 1.2. Элемент $p_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in \{1, 2\}$) передаточной матрицы $\hat{P}$ уравнения (1.3) класса H вдоль простой кривой с набором характеристических данных (1.10) является целой функцией ρ порядка $1/2$ и нормального типа (тождественно равен нулю) тогда и только тогда, когда выполнены оба (не выполнено хотя бы одно) из следующих условий:

$$|\eta_{1\beta}^{(0)}(\rho)| + |\eta_{2\beta}^{(0)}(\rho)| \neq 0, \quad |\eta_{\alpha 1}^{(N+1)}(\rho)| + |\eta_{\alpha 2}^{(N+1)}(\rho)| \neq 0. \quad (1.19)$$

В разделах 4 и 5 статьи исследован спектр краевой задачи с распадающимися граничными условиями

$$\Theta_{21}(\rho)u(z_0) - \Theta_{11}(\rho)u'(z_0) = 0, \quad \mu_{11}(\rho)u(z_{N+1}) + \mu_{12}(\rho)u'(z_{N+1}) = 0 \quad (1.20)$$

для уравнения (1.3) класса H с простым набором характеристических данных (1.10). В (1.20) коэффициенты $\Theta_{\alpha 1}(\rho)$, $\mu_{1\alpha}(\rho)$ ($\alpha \in \{1, 2\}$) полиномиально зависят от спектрального параметра. Основные результаты этого исследования сформулированы ниже в теоремах 1.3–1.5.

Положим

$$\Theta_{12}(\rho) = \Theta_{22}(\rho) = \mu_{21}(\rho) = \mu_{22}(\rho) \equiv 0, \quad (1.21)$$

$$\hat{\mu}(\rho) := \hat{\mu}\hat{\eta}^{(N+1)}, \quad \hat{\Theta}(\rho) := \hat{\eta}^{(0)}\hat{\Theta}, \quad r_0(\rho) := \tilde{\mu}_{11}\tilde{\Theta}_{11} + \tilde{\mu}_{12}\tilde{\Theta}_{21}. \quad (1.22)$$

Очевидно, что элементы матриц $\hat{\mu}$ и $\hat{\Theta}$, а также функция r_0 являются полиномами от ρ .

Теорема 1.3. Спектр краевой задачи с граничными условиями (1.20) для уравнения (1.3) класса H на кривой γ с простым набором характеристических данных:

- (а) пусть тогда и только тогда, когда набор характеристических данных точечный, и определенный в (1.22) полином $r_0(\rho) \equiv R_0 \neq 0$;
- (б) не пуст и конечен тогда и только тогда, когда набор характеристических данных точечный, и полином $r_0(\rho)$ отличен от константы, при этом число собственных значений краевой задачи с учетом их кратности равно степени полинома;
- (с) счетен тогда и только тогда, когда кривая γ простая и выполнены следующие условия:

$$|\tilde{\Theta}_{11}(\rho)| + |\tilde{\Theta}_{21}(\rho)| \neq 0, \quad |\tilde{\mu}_{11}(\rho)| + |\tilde{\mu}_{12}(\rho)| \neq 0. \quad (1.23)$$

В остальных случаях спектр указанной краевой задачи совпадает со всей комплексной плоскостью.

Доказательство теоремы 1.3 приведено в разделе 4 после леммы 4.2.

Теорема 1.4. Пусть выполнены условия (1.23) и $D_0(\rho)$ — характеристическая функция (4.3) краевой задачи с граничными условиями (1.20) для уравнения (1.3) класса H на простой кривой γ . Тогда угловая плотность (4.17) нулей функции $D_0(\rho)$ равна $\chi_j^{(0)}/\pi$ в любом угловом секторе комплексной ρ -плоскости, содержащем внутри себя ровно один луч из семейства лучей, задаваемых параметрически функциями $\rho = -t \exp\{-2i\omega_j\}$ ($t \geq 0$, $j = \overline{1, J}$), где величины J , ω_j определены в соотношении (4.13) и перед ним, а $\chi_j^{(0)}$ — в (4.14).

Теорема 1.4 следует из формул (4.9), (4.18) и предложения 4.1. Заметим, что величины ω_j и $\chi_j^{(0)}$ ($j \in \{1, \dots, J\}$) имеют простой геометрический смысл: в силу (4.8), (4.10), (4.13) и (4.14) величина $\chi_j^{(0)}$ равна сумме длин тех из отрезков, соединяющих последовательные характеристические точки простой кривой γ , которые параллельны прямой с параметризацией $z = t \exp\{i\omega_j\}$ ($t \in \mathbb{R}$, $\omega_j \in [0; \pi)$).

Результаты, аналогичные изложенным в теореме 1.4, были получены в работе [8], где рассматривалась краевая задача с граничными условиями $u(0) = u(1) = 0$ для уравнения (1.3) на выпуклой вниз кривой γ , соединяющей точки 0 и 1, с параметризацией $z(x) = x + is(x)$. При этом действительная функция $s(x)$ предполагалась кусочно непрерывно дифференцируемой с неубывающей производной ($s'(0) < 0 < s'(1)$), а на потенциал накладывались ограничения, позволяющие деформировать кривую в выпуклую ломаную, в вершинах которой потенциал испытывает скачок, а все ее звенья параллельны различным прямым. В этом смысле теорему 1.4 можно рассматривать как обобщение соответствующей части результатов работы [8] на случай уравнений (1.3) вдоль ломаной произвольной формы, в каждой вершине которой имеют место разрывы решений (1.6) или (и) скачки какой-либо конечной производной потенциала, а разные (не обязательно соседние) звенья ломаной могут быть параллельны одной прямой.

Кроме общих асимптотических свойств спектра, похожих на описанные в теореме 1.4, в [8] были найдены и более тонкие детали его асимптотики, учитывающие особенности рассмотренной там задачи. Аналогичные детали спектра краевых задач с граничными условиями (1.20) для уравнения (1.3) класса H на простой кривой при выполнении условий (1.23) могут быть получены с помощью теоремы 1.5.

Теорема 1.5. Пусть выполнены условия (1.23) и $D_0(\rho)$ — характеристическая функция (4.3) краевой задачи с граничными условиями (1.20) для уравнения (1.3) класса H на простой кривой. Тогда в окрестности каждого луча с параметризацией $\rho = -t \exp\{-2i\omega_j\}$ ($t \geq 0$, $j \in \{1, \dots, J\}$; величины J , ω_j определены в соотношении (4.13) и перед ним), нули функции $D_0(\rho)$ при $|\rho| \rightarrow \infty$ асимптотически совпадают с квадратами нулей квазиполинома $r^{(j)}(\lambda)$, задаваемого формулой (5.13).

Доказательство теоремы 1.5 приведено в начале раздела 5 после леммы 5.1. В конце раздела 5 дано краткое описание возможных типов асимптотики спектра краевой задачи с граничными условиями (1.20) для уравнения (1.3) класса H на простой кривой. Отмечено, что дальнейшее изучение связи условий реализации каждого из типов асимптотики спектра с параметрами набора

характеристических данных (1.10) кривой представляет особый интерес с точки зрения исследования обратных спектральных задач для уравнения (1.3) класса H , и, прежде всего, с точки зрения формулировки и доказательства условий существования их решений.

2. Переход к уравнению с простым набором характеристических данных.

Определение 2.1. Петлей кривой γ с узлом в точке $z^{(d)}$ назовем участок кривой γ , начинающийся и кончающийся в точке ее самопересечения $z^{(d)}$.

Определение 2.2. Пусть на кривой γ задано уравнение (1.3) класса H . Тогда петля кривой γ называется «невидимой петлей», если ее узел совпадает с двумя последовательными характеристическими точками кривой γ .

Лемма 2.1. На кривой γ с набором характеристических данных (1.10) «невидимые петли» отсутствуют тогда и только тогда, когда выполнены условия (1.17).

Доказательство. Лемма следует непосредственно из определения 2.2. $\square$

Лемма 2.2. Пусть на кривой γ задан набор характеристических данных (1.10) и узел $z^{(d)}$ «невидимой петли» кривой γ совпадает с ее характеристическими точками z_j и z_{j+1} ($j \in \{0, \dots, N\}$). Тогда удаление из кривой этой «невидимой петли» с заменой двух матриц перехода в точке $z^{(d)}$ ($\hat{\eta}^{(j)}$ и $\hat{\eta}^{(j+1)}$) на одну матрицу перехода $\hat{\eta}^{(j+1)}\hat{\eta}^{(j)}$ не меняет начальную и конечную точки кривой, а также передаточную матрицу уравнения (1.3) класса H вдоль нее и уменьшает число характеристических точек кривой на одну или две.

Доказательство. Лемма следует из определения 1.1, формулы (1.12) и того, что передаточная матрица уравнения (1.3) с целым потенциалом вдоль петли без разрывов решений равна $\hat{I}$ (см. [2, 9]). Число характеристических точек уменьшается на две, если $1 \leq j \leq N-1$, $\hat{\eta}^{(j+1)}\hat{\eta}^{(j)} \equiv \hat{I}$ и $Q^{(j-1)} \equiv Q^{(j+1)}$. $\square$

Заметим, что лемма 2.2 подтверждает обязательность рассмотрения случая, когда матрицы перехода $\hat{\eta}^{(0)}$ и $\hat{\eta}^{(N+1)}$ отличны от тождественно единичных. Ведь даже если на исходной кривой γ выполнено: $\hat{\eta}^{(0)}(\rho) \equiv \hat{\eta}^{(N+1)}(\rho) \equiv \hat{I}$, но при этом γ имеет «невидимую петлю» с узлом в начальной (конечной) точке, $N \geq 1$ и $\hat{\eta}^{(1)}(\rho) \not\equiv \hat{I}$ ($\hat{\eta}^{(N)}(\rho) \not\equiv \hat{I}$), то после удаления из кривой γ этой «невидимой петли» получится кривая с матрицей перехода в начальной (конечной) точке, отличной от $\hat{I}$.

После удаления у исходной кривой γ с заданным на ней уравнением (1.3) класса H всех «невидимых петель» с соответствующей заменой матриц перехода в их узлах (см. лемму 2.2) у новой кривой также могут обнаружиться «невидимые петли». Например, кривая γ с набором характеристических данных

$$\left\{ 2, \left\{ z_0, \hat{\eta}^{(0)}; z_1, \hat{\eta}^{(1)}; z_2 = z_1, \hat{\eta}^{(2)} = (\hat{\eta}^{(1)})^{-1}; z_3 = z_0, \hat{\eta}^{(3)} \right\}, \{ Q_0, Q_1, Q_2 = Q_0 \} \right\}$$

имеет одну «невидимую петлю» с узлом в точке z_1 . Кривая, получающаяся после удаления этой «невидимой петли» и замены матрицы перехода в точке z_1 на матрицу $\hat{\eta}^{(2)}\hat{\eta}^{(1)} \equiv \hat{I}$, будет представлять из себя «невидимую петлю» с узлом в точке z_0 . В силу леммы 1.2 передаточная матрица вдоль этой петли будет равна $\hat{\eta}^{(3)}\hat{\eta}^{(0)}$, и «невидимую петлю» можно стянуть в точку z_0 (удалить) без изменения передаточной матрицы.

Определение 2.3. Поэтапное удаление «невидимых петель» с заменой матриц перехода в их узлах в соответствии с леммой 2.2, производимое до полного устранения «невидимых петель», будем называть последовательным удалением всех «невидимых петель».

В результате последовательного удаления всех «невидимых петель» исходная кривая γ с набором характеристических данных (1.10) либо переходит в кривую без «невидимых петель», либо может быть стянута в точку (см. лемму 1.2). В последнем случае в силу леммы 2.2 передаточная матрица $\hat{P}$ вдоль кривой γ равна $\hat{\eta}^{(N+1)} \dots \hat{\eta}^{(0)}$.

Лемма 2.3. При последовательном удалении всех «невидимых петель» передаточная матрица сохраняется, не меняются также начальная и конечная точки кривой, либо точка, в которую стягивается кривая, совпадает с ними. Если при этом исходный набор характеристических данных (1.10) уравнения (1.3) класса H преобразуется к виду

$$\widetilde{W} = \{\widetilde{N}, \{\widetilde{z}_j, \hat{\eta}^{(j)}\}_0^{\widetilde{N}+1}, \{\widetilde{Q}_m\}_0^{\widetilde{N}}\},$$

то

$$\widetilde{N} \leq N - 1, \quad \hat{\eta}^{(\widetilde{N}+1)} \dots \hat{\eta}^{(0)} = \hat{\eta}^{(N+1)} \dots \hat{\eta}^{(0)},$$

и либо $\widetilde{N} = 0$, $\widetilde{z}_0 = \widetilde{z}_1$, либо для всех $\widetilde{z}_m$ ($m \in \{0, \dots, \widetilde{N}\}$) выполнены соотношения вида (1.17).

Доказательство. Лемма 2.3 следует из лемм 1.2, 2.1, 2.2 и определения 2.3. $\square$

Лемма 2.4. Пусть $\hat{P}$ и $\hat{\tilde{P}}$ — передаточные матрицы уравнений (1.3) класса H вдоль кривых γ и $\tilde{\gamma}$ с наборами характеристических данных

$$W = \{N, \{z_j, \hat{\eta}^{(j)}\}_0^{N+1}, \{Q_m\}_0^N\} \text{ и } \widetilde{W} = \{\widetilde{N}, \{\widetilde{z}_j, \hat{\eta}^{(j)}\}_0^{\widetilde{N}+1}, \{\widetilde{Q}_m\}_0^{\widetilde{N}}\}$$

соответственно. Причем $N \geq 1$ и существует такое число $p \in \{0, \dots, N\}$, что

$$\widetilde{z}_m = z_m, \quad \widetilde{Q}_m = Q_m, \quad \hat{\eta}^{(m)} = \hat{\eta}^{(m)} \quad (m = \overline{0, p-1} \text{ при } p \geq 1),$$

$$\widetilde{z}_p = z_p, \quad \widetilde{Q}_p(z) = Q_p(2z_p - z), \quad \hat{\eta}^{(p)} = A\hat{\sigma}_3\hat{\eta}^{(p)},$$

$$\widetilde{z}_n = 2z_p - z_n, \quad \widetilde{Q}_n(z) = Q_n(2z_p - z), \quad \hat{\eta}^{(n)} = \hat{\sigma}_3\hat{\eta}^{(n)}\hat{\sigma}_3 \quad (n = \overline{p+1, N}, \quad p < N),$$

$$\widetilde{z}_{N+1} = 2z_p - z_{N+1}, \quad \hat{\eta}^{(N+1)} = \hat{\eta}^{(N+1)}\hat{\sigma}_3/A,$$

где $A = 1$, если $\hat{\eta}^{(p)} \neq \hat{\sigma}_3$ и $A = 2$, если $\hat{\eta}^{(p)} \equiv \hat{\sigma}_3$. Тогда

$$\hat{\tilde{P}} = \hat{P}, \quad \hat{\eta}^{(N+1)} \dots \hat{\eta}^{(0)} = \hat{\eta}^{(N+1)} \dots \hat{\eta}^{(0)}.$$

Доказательство. Заметим, что формулировка корректна: если точка z_j ($j \in \{0, \dots, N+1\}$) — характеристическая точкой кривой γ , то определенная в лемме точка $\widetilde{z}_j$ обязательно является характеристической точкой кривой $\tilde{\gamma}$. Для $j = \overline{0, p}$ это так, поскольку по условию леммы наборы характеристических данных участков кривых γ и $\tilde{\gamma}$, соединяющих точки z_0 и z_p , совпадают кроме матриц перехода в точке z_p , но $\hat{\eta}^{(p)} \neq \hat{I}$, и, значит, условия (1.9) для точки $\widetilde{z}_p$ также выполнены. Для $n = \overline{p+1, N}$ (при $p < N$) соотношения $\widetilde{Q}_n \neq \widetilde{Q}_{n-1}$ и $Q_n \neq Q_{n-1}$, а также $\hat{\eta}^{(n)} \neq \hat{I}$ и $\hat{\eta}^{(n)} \neq \hat{I}$ равносильны, а точка $\widetilde{z}_{N+1}$ — конечная точка кривой $\tilde{\gamma}$, и, значит, ее характеристическая точка.

Пусть кривая γ задается параметрически соотношением $z = V(t)$ ($t \in [t_0, t_f]$). Рассмотрим кривую $\gamma^{(1)}$ с параметризацией

$$z := \begin{cases} V(t), & \text{если } t \in [t_0, t_p]; \\ 2z_p - V(t), & \text{если } t \in (t_p, t_f] \end{cases} \quad (2.1)$$

и набором характеристических данных $\widetilde{W}$ (очевидно, что кривая $\gamma^{(1)}$ проходит через все характеристические точки кривой $\tilde{\gamma}$). Тогда подстановка в уравнение (1.3) доказывает, что если $u(z)$ — решение уравнения (1.3) класса H на кривой γ с набором характеристических данных W , то функция $w(z)$, определяемая соотношениями

$$w(z) := \begin{cases} u(z), & \text{если } z = V(t), \quad t \in (t_0, t_p); \\ Au(2z_p - z), & \text{если } z = 2z_p - V(t), \quad t \in (t_p, t_f); \end{cases} \quad (2.2)$$

$$w(z_0) := u(z_0), \quad w'(z_0) := u'(z_0), \quad w(2z_p - z_{N+1}) := u(z_{N+1}), \quad w'(2z_p - z_{N+1}) := u'(z_{N+1}),$$

является решением уравнения (1.3) класса H на кривой $\gamma^{(1)}$ с набором характеристических данных $\widetilde{W}$. При этом в силу (2.2) $\hat{P}^{(1)} = \hat{P}$, где $\hat{P}^{(1)}$ — передаточная матрица вдоль кривой $\gamma^{(1)}$. Но $\hat{P}^{(1)} = \hat{\tilde{P}}$ по лемме 1.1, и значит, $\hat{\tilde{P}} = \hat{P}$.

Равенство $\hat{\tilde{\eta}}^{(N+1)} \dots \hat{\tilde{\eta}}^{(0)} = \hat{\eta}^{(N+1)} \dots \hat{\eta}^{(0)}$ проверяется подстановкой приведенных в условии леммы формул, связывающих матрицы перехода $\hat{\tilde{\eta}}^{(j)}$ и $\hat{\eta}^{(j)}$ ($j \in \{0, \dots, N+1\}$). $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 1.1, сформулированной в разделе 1.

Доказательство. Опишем алгоритм, позволяющий за конечное число шагов из данного набора характеристических данных W построить простой набор $\widetilde{W}$, удовлетворяющий условиям теоремы 1.1. Рассмотрим шаги трех типов.

Шаг типа 1. Пусть существует такое число $p \in \{1, \dots, N\}$, что матрицы перехода из набора характеристических данных $W_p^{(s)}$ вида (1.10) на кривой $\gamma_p^{(s)}$ удовлетворяют условиям

$$\hat{\eta}^{(n)} \notin \Omega_\sigma := \{A_1 \hat{\sigma}_3, A_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} \quad (n = \overline{1, p-1}, p \geq 2), \quad \hat{\eta}^{(p)} \equiv A_p \hat{\sigma}_3 \quad (A_p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Тогда в качестве набора характеристических данных $W_{p+1}^{(s)}$ возьмем указанный в лемме 2.4 набор $\widetilde{W}$ на кривой $\gamma_{p+1}^{(s)}$, получающейся из кривой $\gamma_p^{(s)}$ с помощью соотношений (2.1). Нетрудно убедиться, что $\hat{\tilde{\eta}}^{(p)} \equiv A_p \hat{I}$, если $A_p \neq 1$, и $\hat{\tilde{\eta}}^{(p)} \equiv 2\hat{I}$, если $A_p = 1$, и, значит, $\hat{\tilde{\eta}}^{(n)} \notin \Omega_\sigma$ ($n = \overline{1, p}$). Повторяя это действие не более N раз, построим кривую $\gamma_{N+1}^{(s)}$ с набором характеристических данных $W_{N+1}^{(s)}$ таким, что $\hat{\tilde{\eta}}^{(n)} \notin \Omega_\sigma$ ($n = \overline{1, N}$). В силу леммы 2.4 при каждом переходе от $W_p^{(s)}$ к $W_{p+1}^{(s)}$ передаточная матрица, число характеристических точек и упорядоченное произведение вида (1.18) всех матриц перехода сохраняются, и, значит, они сохраняются на всем шаге типа 1.

Шаг типа 2. Пусть существует такое число $p \in \{1, \dots, N\}$, что матрицы перехода из набора характеристических данных $W_p^{(s)}$ вида (1.10) на кривой $\gamma^{(s)}$ удовлетворяют условиям

$$\hat{\eta}^{(n)} \notin \Omega_I := \{A\hat{I}, A \in \mathbb{C} \setminus \{1\}\} \quad (n = \overline{1, p-1}, p \geq 2), \quad \hat{\eta}^{(p)} \equiv A_p \hat{I} \quad (A_p \in \mathbb{C} \setminus \{1\}).$$

На шаге этого типа кривая не меняется, а при изменении набора характеристических данных возможны два случая:

- (i) $Q_{p-1} \neq Q_p$. В качестве набора характеристических данных $W_{p+1}^{(s)}$ возьмем набор $\widetilde{W}$, отличающийся от $W_p^{(s)}$ только двумя матрицами перехода, а именно, $\hat{\tilde{\eta}}^{(p)} \equiv \hat{I}$, $\hat{\tilde{\eta}}^{(N+1)} = A_p \hat{\eta}^{(N+1)}$. Количество характеристических точек при этом не меняется (т. к. $Q_{p-1} \neq Q_p$);
- (ii) $Q_{p-1} \equiv Q_p$. Умножим матрицу перехода в конечной точке кривой на число A_p и заменим матрицу перехода в точке z_p с $A_p \hat{I}$ на $\hat{I}$. Такая замена превратит точку z_p из характеристической в обычную, что приведет к уменьшению номеров всех последующих характеристических точек на единицу.

В обоих случаях передаточная матрица не изменится в силу формулы (1.12) (кривая $\gamma^{(s)}$ не меняется, потенциал на ней сохраняется), а упорядоченное произведение вида (1.18) всех матриц перехода не изменится по построению.

Повторяя такое изменение набора характеристических данных не более N раз, получим набор, в котором все матрицы перехода (кроме, возможно, матриц в начальной и конечной точках кривой) не будут принадлежать множеству Ω_I . Поскольку при каждом описанном выше переходе от $W_p^{(s)}$ к $W_{p+1}^{(s)}$ число матриц перехода из множества Ω_σ , передаточная матрица и упорядоченное произведение вида (1.18) всех матриц перехода сохраняются, то они сохраняются и на всем шаге типа 2. Число характеристических точек при этом не возрастает.

Шаг типа 3. Пусть набор характеристических данных $W^{(s)}$ вида (1.10) на кривой $\gamma^{(s)}$ не удовлетворяет условиям (1.17), т. е. в силу леммы 2.1 кривая $\gamma^{(s)}$ содержит «невидимые петли». Последовательно удалим все «невидимые петли» кривой $\gamma^{(s)}$. В результате согласно лемме 2.3

получим новую кривую с набором характеристических данных либо удовлетворяющим всем условиям (1.17), либо в котором $N = 0$, $z_0 = z_1$. При этом сохраняются передаточная матрица и упорядоченное произведение вида (1.18) всех матриц перехода, а число характеристических точек уменьшится минимум на одну.

Опишем теперь весь алгоритм построения простого набора характеристических данных $\widetilde{W}$, удовлетворяющего условиям теоремы 1.1. Для краткости матрицы перехода во внутренних характеристических точках кривой будем называть внутренними.

Пусть в исходном наборе характеристических данных W вида (1.10) есть внутренние матрицы перехода из множества Ω_σ . С помощью шага типа 1 получим набор характеристических данных W_1 , имеющий такое же число N характеристических точек, но не имеющий внутренних матриц перехода из множества Ω_σ .

Если в наборе данных W_1 есть внутренние матрицы перехода из множества Ω_I , то с помощью шага типа 2 получим набор характеристических данных W_2 , не имеющий внутренних матриц перехода из множеств Ω_σ и Ω_I , количество характеристических точек N_2 в котором не более их числа в наборе W_1 .

Если $N_2 = 0$ или набор W_2 удовлетворяет всем условиям вида (1.17), то процедура построения простого набора характеристических данных $\widetilde{W}$ завершена.

Если $N_2 \geq 1$ и набор характеристических данных W_2 не удовлетворяет хотя бы одному условию вида (1.17), то с помощью шага типа 3 получим набор W_3 , либо удовлетворяющий всем условиям вида (1.17) и имеющий меньшее число N_3 характеристических точек, чем набор W_2 , и, значит, W , либо набор, в котором $N_3 = 0$. Если $N_3 = 0$, то процедура построения простого набора данных $\widetilde{W}$ завершена.

Если $N_3 \neq 0$ и в наборе данных W_3 есть внутренние матрицы перехода из множества $\Omega = \Omega_\sigma \cup \Omega_I$, то сделаем еще раз цикл из шагов типа 1–3. Поскольку каждый раз после выполнения шага типа 3 число характеристических точек в наборе обязательно уменьшается хотя бы на единицу, то простой набор данных $\widetilde{W}$ будет построен не более чем через N таких циклов.

Шаги всех трех типов, как отмечалось при их описании, сохраняют передаточную матрицу и упорядоченное произведение вида (1.18) всех матриц перехода. Поэтому найденный описанным способом простой набор характеристических данных $\widetilde{W}$ будет удовлетворять всем условиям (1.18). Теорема 1.1 доказана. $\square$

3. Асимптотика передаточной матрицы вдоль простой кривой.

Лемма 3.1. Для любых $m \in \{0, \dots, N\}$ и $K \in \mathbb{N}$ существуют положительные числа $\lambda_{m,K}$, $C_{m,K}^{(0)}$ и два непрерывно дифференцируемых решения $F_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda)$ соответствующего уравнения (1.13), которые при всех $\lambda \neq 0$ и $z \in \mathbb{C}$ могут быть представлены в следующем виде:

$$F_{\pm K}^{(m)} = C_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda) \exp\{\pm \lambda(z - z_m)\}, \quad \frac{dF_{\pm K}^{(m)}}{dz} = \pm \lambda E_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda) \exp\{\pm \lambda(z - z_m)\}, \quad (3.1)$$

$$C_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda) := 1 + \sum_{k=1}^K \left(\pm \frac{1}{\lambda}\right)^k C_{m,k}(z) + \frac{B_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda)}{\lambda^{K+1}}, \quad (3.2)$$

$$E_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda) := 1 + \sum_{k=1}^K \left(\pm \frac{1}{\lambda}\right)^k \left(C_{m,k}(z) + \frac{dC_{m,k-1}(z)}{dz}\right) + \frac{H_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda)}{\lambda^{K+1}}, \quad (3.3)$$

где $B_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda)$, $H_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda)$ и все $C_{m,k}(z)$ — целые функции z , $C_{m,0}(z) := 1$,

$$C_{m,k}(z_m) := 0, \quad \frac{dC_{m,k}}{dz} := -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 C_{m,k-1}}{dz^2} + Q_m(z) C_{m,k-1}(z) \right) \quad (k = \overline{1, K}). \quad (3.4)$$

Если при этом $|\lambda| \geq \lambda_{m,K}$, то $F_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda)$ являются линейно независимыми решениями (1.13) в $\mathbb{C}$ и для всех $z \in L_m$ (L_m — отрезок, соединяющий точки z_m и z_{m+1}) справедливы неравенства

$$|B_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda)| \leq C_{m,K}^{(0)}, \quad |H_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda)| \leq C_{m,K}^{(0)}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Формулы (3.1)–(3.4) проверяются подстановкой в (1.13), а оценки (3.5) на отрезке L_m следуют из известных результатов по асимптотическому разложению решений уравнений (1.13) на отрезке действительной оси при больших значениях модуля параметра λ (см. [9]). $\square$

Лемма 3.2. *Существует такое целое число $K_0 \geq 2$, что для любого целого $K \geq K_0$ существует такое конечное $\lambda_K > 0$, что при $|\lambda| \geq \lambda_K$ передаточную матрицу $\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0)$ уравнения (1.3) класса H с набором характеристических данных (1.10) можно записать в следующем виде:*

$$\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0) = \hat{\eta}^{(N+1)} \hat{C}^{(f)} \hat{T}^{(N)} \hat{T}^{(N-1)} \dots \hat{T}^{(2)} \hat{T}^{(1)} \hat{T}^{(0)} \hat{A}^{(0)} \hat{\eta}^{(0)}, \quad (3.6)$$

где $\hat{T}^{(0)} := \hat{I}$,

$$\hat{A}^{(0)} := -\frac{1}{D_K^{(0)}} \begin{pmatrix} \lambda E_{-K}^{(0)}(z_0, \lambda) & C_{-K}^{(0)}(z_0, \lambda) \\ \lambda E_{+K}^{(0)}(z_0, \lambda) & -C_{+K}^{(0)}(z_0, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\hat{C}^{(f)} := \begin{pmatrix} C_{+K}^{(N)}(z_{N+1}, \lambda) \exp(\lambda \Delta z_N) & C_{-K}^{(N)}(z_{N+1}, \lambda) \exp(-\lambda \Delta z_N) \\ \lambda E_{+K}^{(N)}(z_{N+1}, \lambda) \exp(\lambda \Delta z_N) & -\lambda E_{-K}^{(N)}(z_{N+1}, \lambda) \exp(-\lambda \Delta z_N) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\hat{T}^{(n)} := \begin{pmatrix} t_{1+}^{(n)} \exp(\lambda \Delta z_{n-1}) & t_{-}^{(n)} \exp(-\lambda \Delta z_{n-1}) \\ t_{+}^{(n)} \exp(\lambda \Delta z_{n-1}) & t_{1-}^{(n)} \exp(-\lambda \Delta z_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (n = \overline{1, N}, N \geq 1), \quad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} t_{1+}^{(n)} & t_{-}^{(n)} \\ t_{+}^{(n)} & t_{1-}^{(n)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{D_K^{(n)}} \begin{pmatrix} C_{+K}^{(n-1)}(z_n, \lambda) \tau_{1+}^{(n)} & C_{-K}^{(n-1)}(z_n, \lambda) \tau_{-}^{(n)} \\ C_{+K}^{(n-1)}(z_n, \lambda) \tau_{+}^{(n)} & C_{-K}^{(n-1)}(z_n, \lambda) \tau_{1-}^{(n)} \end{pmatrix} + \frac{\hat{O}(1)}{\lambda^K}. \quad (3.10)$$

Здесь Δz_m ($m = \overline{0, N}$) определены в (1.17),

$$\begin{aligned} D_K^{(m)} &:= -\lambda(C_{+K}^{(m)}(z_m, \lambda)E_{-K}^{(m)}(z_m, \lambda) + C_{-K}^{(m)}(z_m, \lambda)E_{+K}^{(m)}(z_m, \lambda)) = \\ &= -2\lambda \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \quad (m = \overline{0, N}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\tau_{1\pm}^{(n)} := \left(\pm \lambda^2 \eta_{12}^{(n)} \varphi_{\pm K}^{(n-1)}(z_n) \varphi_{\mp K}^{(n)}(z_n) + \lambda \eta_{11}^{(n)} \varphi_{\mp K}^{(n)}(z_n) + \lambda \eta_{22}^{(n)} \varphi_{\pm K}^{(n-1)}(z_n) \pm \eta_{21}^{(n)} \right), \quad (3.12)$$

$$\tau_{\pm}^{(n)} := \left(\pm \lambda^2 \eta_{12}^{(n)} \varphi_{\pm K}^{(n-1)}(z_n) \varphi_{\pm K}^{(n)}(z_n) + \lambda \eta_{11}^{(n)} \varphi_{\pm K}^{(n)}(z_n) - \lambda \eta_{22}^{(n)} \varphi_{\pm K}^{(n-1)}(z_n) \mp \eta_{21}^{(n)} \right), \quad (3.13)$$

$$\varphi_{\pm K}^{(n)}(z, \lambda) := \frac{E_{\pm K}^{(n)}(z, \lambda)}{C_{\pm K}^{(n)}(z, \lambda)} \quad (n = \overline{1, N}, N \geq 1). \quad (3.14)$$

Доказательство. В силу леммы 3.1 для любого $K \in \mathbb{N}$ и всех $m \in \{0, \dots, N\}$ существуют такие числа $\lambda_{m,K} > 0$, что при $|\lambda| \geq \lambda_{m,K}$ решения $u_1^{(m)}(z)$, $u_2^{(m)}(z)$ соответствующего уравнения (1.13) можно представить как линейную комбинацию решений $F_{\pm K}^{(m)}(z, \lambda)$. Подставляя эти комбинации в формулу (1.12), получим, что при $|\lambda| \geq \lambda_K := \max\{\lambda_{m,K}, m = \overline{0, N}\}$ ее можно записать в виде (3.6), где матрицы $\hat{A}^{(0)}$, $\hat{C}^{(f)}$ и $\hat{T}^{(n)}$ ($n = \overline{1, N}, N \geq 1$) удовлетворяют формулам (3.7)–(3.10). При этом оценка в (3.11) следует из соотношений (3.2), (3.3) и (3.5). $\square$

Лемма 3.3. *Пусть $N \geq 1$, и матрица перехода $\hat{\eta}^{(n)}(\rho)$ ($n \in \{1, \dots, N\}$) удовлетворяет условиям (1.8), (1.16). Тогда в условиях леммы 3.2 существует такое целое число $K_1 \geq K_0$, что*

для любого целого $K \geq K_1$ и при $|\lambda| \geq \lambda_K$ для $t_{1\pm}^{(n)}, t_{\pm}^{(n)}$ справедливы следующие соотношения:

$$t_{1\pm}^{(n)} = \begin{cases} \lambda^{N_{1\pm}^{(n)}} \delta_{1\pm}^{(n)} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right), & \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \not\equiv \hat{I}; \\ 1 + \left(\mp \frac{1}{2\lambda}\right)^{m_n+2} \delta_n \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right), & \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \equiv \hat{I}, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$t_{\pm}^{(n)} = \begin{cases} \lambda^{N_{\pm}^{(n)}} \delta_{\pm}^{(n)} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right), & \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \not\equiv \hat{I}; \\ -\left(\mp \frac{1}{2\lambda}\right)^{m_n+2} \delta_n \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right), & \hat{\eta}^{(n)}(\rho) \equiv \hat{I}, \end{cases} \quad (3.16)$$

где целые числа $N_{1\pm}^{(n)}, m_n, N_{\pm}^{(n)}$ и отличные от нуля комплексные числа $\delta_{1\pm}^{(n)}, \delta_n, \delta_{\pm}^{(n)}$ не зависят от λ .

Доказательство. Если $\hat{\eta}^{(n)} \equiv \hat{I}$, то по определению 1.1 (в силу (1.9)) $Q_n \not\equiv Q_{n-1}$, и соотношения (3.15), (3.16) следуют из сравнения формул (7), (12), (14) работы [4] с формулой (3.9) настоящей работы.

Пусть $\hat{\eta}^{(n)} \not\equiv \hat{I}$. В силу (3.2), (3.3) и (3.5) определенные в (3.14) функции $\varphi_{\pm K}^{(n)}(z, \lambda)$ можно записать в виде

$$\varphi_{\pm K}^{(n)}(z, \lambda) = \sigma^{(n)}(z, \lambda) \pm \frac{\Upsilon^{(n)}(z, \lambda)}{\lambda^3}, \quad (3.17)$$

где $\sigma^{(n)}(z, \lambda)$ и $\Upsilon^{(n)}(z, \lambda)$ при $|\lambda| \geq \lambda_K$ представимы в виде

$$\sigma^{(n)} = 1 + \frac{\sigma_1^{(n)}}{\lambda^2} + \frac{\sigma_3^{(n)}}{\lambda^4} + \dots + \frac{O(1)}{\lambda^{K+1}}, \quad \Upsilon^{(n)} = \sigma_2^{(n)} + \frac{\sigma_4^{(n)}}{\lambda^2} + \frac{\sigma_6^{(n)}}{\lambda^4} + \dots + \frac{O(1)}{\lambda^{K-2}}. \quad (3.18)$$

Подставляя соотношения (3.17) в формулы (3.12) и (3.13), получим:

$$\tau_{1\pm}^{(n)} = \pm \tau_0^{(n)} + \lambda \tau_1^{(n)}, \quad \tau_{\pm}^{(n)} = \pm \tau_2^{(n)} + \lambda \tau_3^{(n)}, \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_0^{(n)} &:= \eta_{12}^{(n)} \lambda^2 \left\{ \sigma_f^{(n-1)} \sigma_0^{(n)} - \frac{\Upsilon_f^{(n-1)} \Upsilon_0^{(n)}}{\lambda^6} \right\} + \eta_{21}^{(n)} - \eta_{11}^{(n)} \frac{\Upsilon_0^{(n)}}{\lambda^2} + \eta_{22}^{(n)} \frac{\Upsilon_f^{(n-1)}}{\lambda^2}, \\ \tau_1^{(n)} &:= \frac{\eta_{12}^{(n)}}{\lambda^2} \left\{ \Upsilon_f^{(n-1)} \sigma_0^{(n)} - \Upsilon_0^{(n)} \sigma_f^{(n-1)} \right\} + \eta_{11}^{(n)} \sigma_0^{(n)} + \eta_{22}^{(n)} \sigma_f^{(n-1)}, \\ \tau_2^{(n)} &:= \eta_{12}^{(n)} \lambda^2 \left\{ \sigma_f^{(n-1)} \sigma_0^{(n)} + \frac{\Upsilon_f^{(n-1)} \Upsilon_0^{(n)}}{\lambda^6} \right\} - \eta_{21}^{(n)} + \eta_{11}^{(n)} \frac{\Upsilon_0^{(n)}}{\lambda^2} - \eta_{22}^{(n)} \frac{\Upsilon_f^{(n-1)}}{\lambda^2}, \\ \tau_3^{(n)} &:= \frac{\eta_{12}^{(n)}}{\lambda^2} \left\{ \Upsilon_f^{(n-1)} \sigma_0^{(n)} + \Upsilon_0^{(n)} \sigma_f^{(n-1)} \right\} + \eta_{11}^{(n)} \sigma_0^{(n)} - \eta_{22}^{(n)} \sigma_f^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(n)}(\lambda) &:= \sigma^{(n)}(z_n, \lambda), \quad \sigma_f^{(n-1)}(\lambda) := \sigma^{(n-1)}(z_n, \lambda), \\ \Upsilon_0^{(n)}(\lambda) &:= \Upsilon^{(n)}(z_n, \lambda), \quad \Upsilon_f^{(n-1)}(\lambda) := \Upsilon^{(n-1)}(z_n, \lambda). \end{aligned}$$

Подставляя в формулы (3.20) выражения для элементов матрицы перехода $\hat{\eta}^{(n)}$ и соотношения (3.18), после приведения подобных членов получим, что для величин $\tau_l^{(n)}$ ($l = \overline{0, 3}$) справедливы следующие асимптотические выражения:

$$\tau_l^{(n)} = \tau_{l,0}^{(n)} \lambda^{2N_l^{(n)}} + \tau_{l,1}^{(n)} \lambda^{2N_l^{(n)}-2} + \dots + \lambda^{J_l^{(n)}} O(1) \quad (l = \overline{0, 3}). \quad (3.21)$$

Здесь

$$J_0^{(n)} = J_1^{(n)} + 1 = J_2^{(n)} = J_3^{(n)} + 1 := \max\{2N_{12}^{(n)} + 1, 2N_{11}^{(n)}, 2N_{22}^{(n)}\} - K,$$

$$N_0^{(n)} = N_2^{(n)} := \max\{N_{12}^{(n)} + 1, N_{21}^{(n)}, N_{11}^{(n)} - 1, N_{22}^{(n)} - 1\},$$

$$N_1^{(n)} = N_3^{(n)} := \max\{N_{12}^{(n)} - 1, N_{11}^{(n)}, N_{22}^{(n)}\},$$

$N_{\alpha\beta}^{(n)}$ ($\alpha, \beta \in \{1, 2\}$) — степени полиномиальных выражений для $\eta_{\alpha\beta}^{(n)}(\rho)$ (см. (1.7)).

В (3.21) коэффициенты $\tau_{l,p}^{(n)}$ ($l = \overline{0,3}$, $p \in \{0, 1, \dots, p_{l,K}^{(n)}\}$, где $p_{l,K}^{(n)}$ определяются условиями $J_l^{(n)} < 2(N_l^{(n)} - p_{l,K}^{(n)}) \leq J_l^{(n)} + 2$), выражаются явным образом через коэффициенты в полиномиальных выражениях для элементов матрицы перехода $\hat{\eta}^{(n)}$ и в асимптотических выражениях вида (3.18) для $\sigma_f^{(n-1)}$, $\sigma_0^{(n)}$, $\Upsilon_f^{(n-1)}$ и $\Upsilon_0^{(n)}$. Существенно, что в формуле (3.21) с увеличением K к старым слагаемым, которые не меняются, добавляются новые слагаемые с меньшей степенью λ . При этом некоторые или даже все коэффициенты $\tau_{l,p}^{(n)}$ могут равняться нулю. Из формул (3.19) и (3.21) с учетом соотношений (3.2), (3.5), (3.10) и (3.11) следует, что если при каком-то минимальном значении $K \geq K_0$, которое мы обозначим K_1 , хотя бы один из коэффициентов $\tau_{0,p}^{(n)}$, $\tau_{1,p}^{(n)}$ ($\tau_{2,p}^{(n)}$, $\tau_{3,p}^{(n)}$) при $p \in \{0, 1, \dots, p_{l,K}^{(n)}\}$ не равен нулю, то справедливо соотношение (3.15) ((3.16)) и оно сохраняется при любых $K \geq K_1$. Остается доказать, что такое число K_1 всегда существует. Для этого воспользуемся методом доказательства от противного.

Предположим, что при любых значениях $K \geq K_0$ все коэффициенты $\tau_{0,p}^{(n)}$, $\tau_{1,p}^{(n)}$ или $\tau_{2,p}^{(n)}$, $\tau_{3,p}^{(n)}$ равны нулю, т. е.

$$\tau_0^{(n)} = \frac{O(1)}{\lambda^L}, \quad \tau_1^{(n)} = \frac{O(1)}{\lambda^L} \quad (\text{для любых } L \in \mathbb{N}) \quad (3.22)$$

или

$$\tau_2^{(n)} = \frac{O(1)}{\lambda^L}, \quad \tau_3^{(n)} = \frac{O(1)}{\lambda^L} \quad (\text{для любых } L \in \mathbb{N}). \quad (3.23)$$

Здесь и далее L — целое число, которое может принимать сколь угодно большие положительные значения, в том числе различные в различных формулах.

Подставляя соотношения (3.22) или (3.23) в соответствующие формулы в (3.20), получим систему двух уравнений относительно компонент матрицы перехода $\hat{\eta}^{(n)}$. Выражая из нее элементы $\eta_{11}^{(n)}$ и $\eta_{21}^{(n)}$, получим:

$$\sigma_0^{(n)} \eta_{11}^{(n)} = \frac{\eta_{12}^{(n)}}{\lambda^2} \left\{ \pm \Upsilon_0^{(n)} \sigma_f^{(n-1)} - \Upsilon_f^{(n-1)} \sigma_0^{(n)} \right\} \mp \sigma_f^{(n-1)} \eta_{22}^{(n)} + \frac{O(1)}{\lambda^L}, \quad (3.24)$$

$$\sigma_0^{(n)} \eta_{21}^{(n)} = \mp \eta_{12}^{(n)} \lambda^2 \sigma_f^{(n-1)} \left\{ (\sigma_0^{(n)})^2 - \frac{(\Upsilon_0^{(n)})^2}{\lambda^6} \right\} \mp \frac{\eta_{22}^{(n)}}{\lambda^2} \left\{ \Upsilon_0^{(n)} \sigma_f^{(n-1)} \pm \Upsilon_f^{(n-1)} \sigma_0^{(n)} \right\} + \frac{O(1)}{\lambda^L}, \quad (3.25)$$

$$\pm \frac{\sigma_0^{(n)}}{\sigma_f^{(n-1)}} \det \hat{\eta}^{(n)} = (\eta_{12}^{(n)})^2 \lambda^2 \left\{ (\sigma_0^{(n)})^2 - \frac{(\Upsilon_0^{(n)})^2}{\lambda^6} \right\} + 2\eta_{12}^{(n)} \eta_{22}^{(n)} \frac{\Upsilon_0^{(n)}}{\lambda^2} - (\eta_{22}^{(n)})^2 + \frac{O(1)}{\lambda^L}, \quad (3.26)$$

где верхний знак (плюс или минус) относится к случаю, когда выполнены соотношения (3.22), а нижний знак — к случаю, когда выполнены соотношения (3.23). Заметим, что в силу (3.18)

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \frac{\sigma_0^{(n)}}{\sigma_f^{(n-1)}} = 1. \quad (3.27)$$

Если $\eta_{12}^{(n)} = \eta_{22}^{(n)} \equiv 0$, то в силу (1.7), (3.18), (3.24) и (3.25) $\hat{\eta}^{(n)} \equiv 0$, что противоречит (1.16).

Допустим, что $\eta_{12}^{(n)} \equiv 0$, $\eta_{22}^{(n)} \neq 0$. Тогда в силу (1.7), (1.8), (3.26) и (3.27) получаем, что $\eta_{22}^{(n)}$ не зависит от ρ , и, значит, $\sigma_0^{(n)} = \sigma_f^{(n-1)}$ (т. к. $\eta_{22}^{(n)} \neq 0$). Поскольку $\eta_{12}^{(n)} \equiv 0$ и $\eta_{22}^{(n)}$ не зависит от ρ , то в силу (3.18), (3.25) имеем: $\eta_{21}^{(n)} \equiv 0$. И наконец, поскольку $\sigma_0^{(n)} = \sigma_f^{(n-1)}$, то из (3.24) получаем, что $\eta_{11}^{(n)} = \mp \eta_{22}^{(n)}$. Таким образом, если $\eta_{12}^{(n)} \equiv 0$, $\eta_{22}^{(n)} \neq 0$, то в силу предположений (3.22) или (3.23) соответственно $\hat{\eta}^{(n)} \equiv A\hat{\sigma}_3$ или $\hat{\eta}^{(n)} \equiv A\hat{I}$, где $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Но оба эти случая противоречат либо условию (1.16), либо предположению $\hat{\eta}^{(n)} \neq \hat{I}$. Еще проще убедиться, что соотношения (3.26), (3.27), и, значит, предположения (3.22) или (3.23) противоречат условию (1.8)

при $\eta_{12}^{(n)} \neq 0$, $\eta_{22}^{(n)} \equiv 0$. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда оба этих элемента отличны от тождественного нуля. В силу соотношений (1.8) и (3.27) асимптотическое разложение левой части равенства (3.26) может иметь только члены нулевой и отрицательной степеней ρ . Допустим, что $N_{12}^{(n)} \geq N_{22}^{(n)}$ (см. (1.7)). Тогда в первом слагаемом в правой части (3.26) старший по ρ член будет иметь степень $2N_{12}^{(n)} + 1$, во втором слагаемом — не выше $N_{12}^{(n)} + N_{22}^{(n)} - 1 \leq 2N_{12}^{(n)} - 1$, а в третьем: $2N_{22}^{(n)} \leq 2N_{12}^{(n)}$. Отсюда следует, что в правой части (3.26) обязательно будет присутствовать старший по ρ член, имеющий степень $2N_{12}^{(n)} + 1 > 0$ и, следовательно, равенство (3.26) не может быть выполнено при $|\rho| \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $N_{22}^{(n)} \geq N_{12}^{(n)} + 1 > 0$. Тогда в третьем слагаемом в правой части (3.26) старший по ρ член будет иметь степень $2N_{22}^{(n)} > 0$, во втором слагаемом — не выше $N_{12}^{(n)} + N_{22}^{(n)} - 1 \leq 2N_{22}^{(n)} - 2$, а в первом: $2N_{12}^{(n)} + 1 \leq 2N_{22}^{(n)} - 1$. Отсюда следует, что в правой части (3.26) обязательно будет присутствовать старший по ρ член, имеющий степень $2N_{22}^{(n)} > 0$, и, следовательно, равенство (3.26) опять не может быть выполнено при $|\rho| \rightarrow \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Заметим, что входящие в формулы (3.15) и (3.16) для случая $\hat{\eta}^{(n)} \equiv \hat{I}$ ($n \in \{1, \dots, N\}$ при $N \geq 1$) числа m_n и δ_n равны соответственно минимальному порядку производной от потенциала вдоль кривой γ , которая имеет скачок в точке z_n , и величине этого скачка (см. [4, формулы (18), (19)]).

Лемма 3.4. При выполнении (1.19) в условиях леммы 3.2 элементы $c_{\eta, \alpha \nu}^{(f)}$ ($\nu \in \{1, 2\}$) и $a_{\eta, \kappa \beta}^{(0)}$ ($\kappa \in \{1, 2\}$) соответственно матрицы $\hat{C}_{\eta}^{(f)} := \hat{\eta}^{(N+1)} \hat{C}^{(f)}$ и $\hat{A}_{\eta}^{(0)} := \hat{A}^{(0)} \hat{\eta}^{(0)}$ при $|\lambda| \geq \lambda_K$ можно представить в виде

$$c_{\eta, \alpha \nu}^{(f)}(\lambda) = \exp\{(-1)^{\nu} \lambda \Delta z_N\} \left[\eta_{\alpha 1, 0}^{(N+1)} \lambda^{2N_{\alpha 1}^{(N+1)}} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) - \right. \quad (3.28)$$

$$\left. - (-1)^{\nu} \eta_{\alpha 2, 0}^{(N+1)} \lambda^{2N_{\alpha 2}^{(N+1)} + 1} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \right] \neq 0 \quad (\nu \in \{1, 2\}), \quad (3.29)$$

$$a_{\eta, \kappa \beta}^{(0)}(\lambda) = \frac{\eta_{1\beta, 0}^{(0)}}{2} \lambda^{2N_{1\beta}^{(0)}} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) - \frac{(-1)^{\kappa}}{2} \eta_{2\beta, 0}^{(0)} \lambda^{2N_{2\beta}^{(0)} - 1} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \quad (\kappa \in \{1, 2\}). \quad (3.30)$$

Доказательство. С учетом соотношений (1.7), (1.19), (3.2), (3.3), (3.5) формулы (3.28) и (3.30) следуют из формул (3.8) и (3.7), (3.11) соответственно. $\square$

Будем обозначать $(N+1)$ -мерные векторы буквой со стрелкой сверху, а их скалярное произведение — круглыми скобками. Например,

$$\overrightarrow{\Delta z} := (\Delta z_0, \Delta z_1, \dots, \Delta z_N), \quad (\overrightarrow{\alpha^{(s)}}, \overrightarrow{\Delta z}) := \sum_{m=0}^N \alpha_m^{(s)} \Delta z_m, \quad \overrightarrow{\alpha^{(s)}} := (\alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_N^{(s)}).$$

Здесь

$$s = 1 + \sum_{m=0}^N (1 + \alpha_m^{(s)}) 2^{m-1}, \quad \alpha_m^{(s)} \in \{\pm 1\} \quad (m = \overline{0, N}), \quad (3.31)$$

т. е. $s \in \{1, \dots, 2^{N+1}\}$, и существует взаимно однозначное соответствие значения индекса s и значений всех компонент вектора $\overrightarrow{\alpha^{(s)}}$ (как в двоичной системе счисления).

Из лемм 3.2–3.4 имеем следующее следствие.

Следствие 3.1. При выполнении условий (1.8), (1.16) и (1.19) существует такое конечное $\lambda_0 > 0$, что при $|\lambda| \geq \lambda_0$ элемент $r_{\alpha \beta}$ передаточной матрицы $\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0)$ уравнения (1.3)

класса H с набором характеристических данных (1.10) можно записать в виде:

$$p_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{2^{N+1}} d_{\alpha\beta}^{(s)}(\lambda) \exp\{\lambda h_s\}. \quad (3.32)$$

Здесь коэффициенты $h_s := (\overrightarrow{\alpha^{(s)}}, \overrightarrow{\Delta z})$ не зависят от λ и все функции $d_{\alpha\beta}^{(s)}(\lambda)$ можно представить в виде:

$$d_{\alpha\beta}^{(s)}(\lambda) = \lambda^{m_{\alpha\beta}^{(s)}} \delta_{\alpha\beta}^{(s)} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \quad (s = \overline{1, 2^{N+1}}),$$

где целые числа $m_{\alpha\beta}^{(s)}$ и комплексные числа $\delta_{\alpha\beta}^{(s)} \neq 0$ не зависят от λ .

Часть показателей экспонент в правых частях равенств (3.32) может совпадать, и возникает вопрос: не сокращаются ли в (3.32) коэффициенты при экспонентах, наиболее быстро растущих с ростом $|\lambda|$? Отрицательный ответ на этот вопрос для элементов передаточной матрицы уравнения (1.3) класса H вдоль простой кривой дает лемма 3.5, аналогичная лемме 4 работы [4].

Лемма 3.5. Пусть $h_{\max} := \max\{|h_s|, s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$, где $h_s = (\overrightarrow{\alpha^{(s)}}, \overrightarrow{\Delta z})$. Тогда существуют хотя бы два различных числа $l_0 \in \{1, \dots, 2^{N+1}\}$ такие, что $|h_{l_0}| = h_{\max}$, причем если $\overrightarrow{\Delta z} \neq \vec{0}$, то $h_{\max} > 0$. Кроме того, при выполнении условий (1.17) для любого коэффициента h_{l_0} такого, что $|h_{l_0}| = h_{\max}$, и для любого числа $s \in \{1, \dots, 2^{N+1}\} \setminus \{l_0\}$ справедливо неравенство $h_{l_0} \neq h_s$.

Перейдем к доказательству теоремы 1.2, сформулированной в конце раздела 1.

Доказательство теоремы 1.2. По условию теоремы кривая γ является простой. Поэтому из следствия 3.1 и леммы 3.5 получаем, что при выполнении обоих условий (1.19) существует минимум два противоположно направленных луча, исходящих из нуля комплексной плоскости параметра λ (и, значит, минимум один луч, исходящий из нуля комплексной плоскости спектрального параметра ρ), такие, что среди 2^{N+1} слагаемых в (3.32) для элемента $p_{\alpha\beta}$ матрицы $\hat{P}$ существует ровно одно слагаемое, имеющее наибольший экспоненциальный рост с показателем $h_{\max} > 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow \infty$) вдоль каждого из этих лучей. С учетом леммы 1.1 получаем, что в этом случае элемент $p_{\alpha\beta}$ передаточной матрицы $\hat{P}$ является целой функцией ρ порядка $1/2$ и нормального типа (см. [10, гл. I, § 1]). Если нарушено первое или второе из условий (1.19), то $p_{\alpha\beta}(\lambda) \equiv 0$ в силу (1.12). С учетом вышеизложенного в обратную сторону теорема 1.2 легко доказывается методом от противного. $\square$

4. Виды спектров краевых задач с распадающимися граничными условиями. Угловая плотность счетного спектра. Рассмотрим краевую задачу с распадающимися граничными условиями (1.20) для уравнения (1.3) класса H на кривой γ . Будем называть ее краевой задачей H и искать ее нетривиальное решение в виде

$$u(z) = v_1 u_1(z) + v_2 u_2(z), \quad |v_1| + |v_2| \neq 0, \quad (4.1)$$

где $u_1(z)$, $u_2(z)$ — решения уравнения (1.3) класса H на кривой γ , удовлетворяющие условиям (1.11) в ее начальной точке z_0 . Подставляя (4.1) в граничные условия (1.20), получим следующую систему уравнений для коэффициентов v_1 , v_2 :

$$\Theta_{21}v_1 - \Theta_{11}v_2 = 0, \quad (\mu_{11}p_{11} + \mu_{12}p_{21})v_1 + (\mu_{11}p_{12} + \mu_{12}p_{22})v_2 = 0. \quad (4.2)$$

Здесь $p_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in \{1, 2\}$) — элементы передаточной матрицы $\hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0)$ уравнения (1.3) класса H вдоль кривой γ . Система уравнений (4.2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее дискриминант D_0 равен нулю:

$$D_0(\rho) := \Theta_{21}\mu_{11}p_{12} + \Theta_{21}\mu_{12}p_{22} + \Theta_{11}\mu_{11}p_{11} + \Theta_{11}\mu_{12}p_{21} = 0. \quad (4.3)$$

Функцию D_0 назовем характеристической функцией краевой задачи H .

Очевидно, что если $\Theta_{21}(\rho) = \Theta_{11}(\rho) \equiv 0$ или $\mu_{11}(\rho) = \mu_{12}(\rho) \equiv 0$, то краевая задача вырождается в неполную начальную. Условие (4.3) при этом выполнено тождественно.

Пусть справедливы соотношения (1.21). Рассмотрим матрицу

$$\hat{R}(\gamma, z_{N+1}, z_0) := \hat{\mu} \hat{P}(\gamma, z_{N+1}, z_0) \hat{\Theta}, \quad (4.4)$$

которую будем называть характеристической матрицей краевой задачи H , т. к. ее элемент r_{11} совпадает с характеристической функцией D_0 .

В силу (3.6) и (4.4) в условиях леммы 3.2 матрицу $\hat{R}$ можно представить в виде

$$\hat{R}(\gamma, z_{N+1}, z_0) = \hat{\mu} \hat{C}^{(f)} \hat{T}^{(N)} \hat{T}^{(N-1)} \dots \hat{T}^{(2)} \hat{T}^{(1)} \hat{T}^{(0)} \hat{A}^{(0)} \hat{\Theta}, \quad (4.5)$$

где $\hat{\mu}$, $\hat{\Theta}$ определены в (1.22), а все остальные величины описаны в лемме 3.2.

Формула (4.5) получается из формулы (3.6) заменой матриц $\hat{\eta}^{(0)}$ и $\hat{\eta}^{(N+1)}$ на матрицы $\hat{\Theta}$ и $\hat{\mu}$ соответственно. Поэтому для элемента r_{11} матрицы $\hat{R}$ справедливы леммы 4.1 и 4.2, аналогичные следствию 3.1 и теореме 1.2 соответственно.

Лемма 4.1. *При выполнении условий (1.8), (1.16) и (1.23) существует такое конечное $\lambda_0 > 0$, что при $|\lambda| \geq \lambda_0$ элемент r_{11} характеристической матрицы (4.4) краевой задачи H может быть записан в виде:*

$$r_{11} = \sum_{s=1}^{2^{N+1}} d_r^{(s)}(\lambda) \exp\{\lambda h_s\}. \quad (4.6)$$

Здесь коэффициенты $h_s = (\overrightarrow{\alpha^{(s)}}, \overrightarrow{\Delta z})$ не зависят от λ , и все функции $d_r^{(s)}(\lambda)$ можно представить в виде:

$$d_r^{(s)}(\lambda) = \lambda^{m_r^{(s)}} \delta_r^{(s)} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \quad (s = \overline{1, 2^{N+1}}), \quad (4.7)$$

где целые числа $m_r^{(s)}$ и комплексные числа $\delta_r^{(s)} \neq 0$ не зависят от λ .

Лемма 4.2. *Элемент r_{11} характеристической матрицы (4.4) краевой задачи с граничными условиями (1.20) для уравнения (1.3) класса H на простой кривой γ с набором характеристических данных (1.10) является целой функцией ρ порядка $1/2$ и нормального типа (тождественно равен нулю) тогда и только тогда, когда выполнены оба (не выполнено хотя бы одно) из условий (1.23).*

Докажем теперь теорему 1.3, сформулированную в разделе 1.

Доказательство теоремы 1.3. Как уже указывалось, $D_0 = r_{11}$. Рассмотрим оба возможных типа простого набора характеристических данных (1.10) кривой γ .

Пусть набор W — точечный. Тогда в силу леммы 1.2 и формул (1.22), (4.4) $r_{11} = r_0(\rho)$, причем $r_0(\rho)$ — полином ρ . Если степень этого полинома N_r больше нуля, то число нулей D_0 с учетом их кратности, очевидно, равно N_r . Если $N_r = 0$, т. е. $r_0(\rho) \equiv R_0$, где R_0 — комплексное число, то возможны два случая. При $R_0 \neq 0$ спектр краевой задачи пуст, а при $R_0 = 0$ он совпадает со всей комплексной плоскостью.

Если набор W отличен от точечного, т. е. кривая γ — простая, то в силу леммы 4.2 и свойств целых функций порядка $1/2$ и нормального типа (см. [10]) спектр рассматриваемой краевой задачи совпадает со всей комплексной плоскостью (счетный) тогда и только тогда, когда не выполнено хотя бы одно (выполнены оба) из условий (1.23).

Комбинируя перечисленные случаи, получаем теорему 1.3. $\square$

Выражения вида (4.6) часто возникают в различных ситуациях, и поэтому методы их исследования хорошо разработаны, причем с разными целями и с разных точек зрения (см. [1, 10, 12, 24]). Обычно эти методы начинаются с построения на комплексной плоскости λ выпуклого многоугольника, содержащего все точки, соответствующие коэффициентам h_s ($s = \overline{1, 2^{N+1}}$) в показателях экспонент (точнее, их комплексно сопряженным величинам). Однако в нашем случае, учитывая большое число этих коэффициентов и их особую структуру, на начальном этапе удобнее не пользоваться геометрической интерпретацией, а из формул (4.6) и (4.7) сразу найти индикатор целой функции $D_0(\lambda)$ (см. [10]).

Для простой кривой определенные в (1.17) числа $\Delta z_m \neq 0$, и их можно представить в виде

$$\Delta z_m = \chi_m \exp\{i\psi_m\}, \quad \psi_m \in [-\pi; \pi), \quad \chi_m > 0 \quad (m \in \{0, \dots, N\}), \quad (4.8)$$

где i — мнимая единица. Положим также

$$\lambda = |\lambda| \exp\{i\psi\}, \quad \psi \in (-\pi/2; 3\pi/2] \quad (\text{при } \lambda \neq 0); \quad (4.9)$$

$$(\tilde{\psi}_m, \tilde{\alpha}_m^{(s)}) := \begin{cases} (\psi_m, \alpha_m^{(s)}), & \text{если } \psi_m \in [0; \pi); \\ (\pi + \psi_m, -\alpha_m^{(s)}), & \text{если } \psi_m \in [-\pi; 0) \end{cases} \quad (m \in \{0, \dots, N\}), \quad (4.10)$$

где $\alpha_m^{(s)} \in \{\pm 1\}$. Очевидно, что $\tilde{\psi}_m \in [0; \pi)$, $\tilde{\alpha}_m^{(s)} \in \{\pm 1\}$.

В силу (4.8)–(4.10) при $\lambda \neq 0$ имеем:

$$\tilde{h}_s(\psi) := \frac{\operatorname{Re}\{\lambda h_s\}}{|\lambda|} = \sum_{m=0}^N \alpha_m^{(s)} \chi_m \cos(\psi + \psi_m) = \sum_{m=0}^N \tilde{\alpha}_m^{(s)} \chi_m \cos(\psi + \tilde{\psi}_m) \quad (s = \overline{1, 2^{N+1}}), \quad (4.11)$$

где коэффициенты h_s были определены в следствии 3.1.

Лемма 4.3. Пусть $\lambda \neq 0$, $\tilde{h}_{\max}(\psi) := \max\{\tilde{h}_s(\psi), s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$, где величины ψ и $\tilde{h}_s(\psi)$ определены в (4.9) и (4.11) соответственно, и

$$H(\psi) := \sum_{m=0}^N \chi_m |\cos(\psi + \tilde{\psi}_m)| \geq 0. \quad (4.12)$$

Тогда для любого $\psi \in (-\pi/2; 3\pi/2] \setminus \{\pi/2 - \tilde{\psi}_m, 3\pi/2 - \tilde{\psi}_m\}_0^N$ выполнено $\tilde{h}_{\max}(\psi) = H(\psi)$, и существует ровно одно зависящее от ψ число $s_0 \in \{1, \dots, 2^{N+1}\}$, такое, что $\tilde{h}_{s_0}(\psi) = H(\psi) > 0$.

Доказательство. Для всех $m \in \{0, \dots, N\}$ по условию леммы $\cos(\psi + \tilde{\psi}_m) \neq 0$, и, значит, в силу соотношений (4.10) $\cos(\psi + \psi_m) \neq 0$. Положим $\alpha_m^{(s_0)}(\psi) = \operatorname{sign}\{\cos(\psi + \psi_m)\}$. Тогда из (3.31), (4.10)–(4.12) имеем $\tilde{h}_{s_0}(\psi) = H(\psi)$, где

$$s_0(\psi) := 1 + \sum_{m=0}^N (1 + \alpha_m^{(s_0)}(\psi)) 2^{m-1}.$$

В выражении (4.12) для $H(\psi)$ все слагаемые положительны. Если же индекс $s \in \{1, \dots, 2^{N+1}\} \setminus \{s_0(\psi)\}$, то в силу (3.31) в сумме (4.11), слагаемые в которой равны по модулю соответствующим слагаемым в выражении (4.12), будет как минимум одно отрицательное слагаемое, и, значит, $\tilde{h}_s(\psi) < H(\psi)$. $\square$

Лемма 4.4. Пусть на простой кривой γ задано уравнение (1.3) класса H . Тогда при выполнении условий (1.19) или (1.23) соответственно элемент $p_{\alpha\beta}$ передаточной матрицы $\hat{P}$ вдоль кривой γ или элемент r_{11} характеристической матрицы (4.4) краевой задачи H является целой функцией параметра $\lambda = |\lambda| \exp\{i\psi\}$ первого порядка и вполне регулярного роста с индикатором $H(\psi)$, задаваемым формулой (4.12).

Доказательство. В силу следствия 3.1 и лемм 4.1, 4.3 для любого числа $\psi \in (-\pi/2; 3\pi/2] \setminus \{\pi/2 - \tilde{\psi}_m, 3\pi/2 - \tilde{\psi}_m\}_0^N$ при выполнении условий (1.19) среди 2^{N+1} слагаемых в формуле (3.32) для элемента $p_{\alpha\beta}$ матрицы $\hat{P}$, а при выполнении условий (1.23) в формуле (4.6) для элемента r_{11} матрицы $\hat{R}$, существует ровно одно слагаемое, имеющее наибольший экспоненциальный рост с показателем $H(\psi) > 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ вдоль луча $|\lambda| \exp\{i\psi\}$, и, значит, каждый из указанных элементов при выполнении сформулированных условий является функцией вполне регулярного роста (см. [10, гл. III]) на всех этих лучах с индикатором $H(\psi)$. Утверждение леммы следует из непрерывности функции $H(\psi)$ и индикатора целой функции (см. [10, гл. I, § 16]), а также того, что целая функция вполне регулярного роста на лучах, образующих всюду плотное множество, есть функция вполне регулярного роста на всей плоскости (см. [10, гл. III, § 1]). $\square$

Пусть множество определенных в (4.10) чисел $\{\tilde{\psi}_m\}_0^N$ содержит J различных значений ω_j ($j = \overline{1, J}$, $1 \leq J \leq N + 1$), которые пронумерованы так, что

$$0 \leq \omega_1 < \dots < \omega_J < \pi. \quad (4.13)$$

Тогда множество чисел $\{0, \dots, N\}$ можно разбить на J непересекающихся непустых подмножеств N_j таким образом, что $\tilde{\psi}_n = \omega_j$ тогда и только тогда, когда $n \in N_j$. В этих обозначениях выражение (4.12) для индикатора $H(\psi)$ примет вид:

$$H(\psi) = \sum_{j=1}^J \chi_j^{(0)} |\cos(\psi + \omega_j)|, \quad \chi_j^{(0)} = \sum_{n \in N_j} \chi_n. \quad (4.14)$$

Из (4.14) очевидно, что $H(\psi + \pi) = H(\psi)$. Поэтому в дальнейшем можно рассмотреть любой интервал значений ψ , превышающий π , например, интервал $(-\pi/2 - \omega_1; 3\pi/2 - \omega_J)$. Заметим, что ни один из косинусов в формуле (4.14) не обращается в ноль при $\psi \in \Gamma_j := (\pi/2 - \omega_j; \pi/2 - \omega_{j-1})$ ($j \in \{1, \dots, J + 1\}$), где

$$\omega_0 := \omega_J - \pi, \quad \omega_{J+1} := \pi + \omega_1. \quad (4.15)$$

Поэтому, раскрывая в формуле (4.14) модули, используя формулу косинуса суммы и приводя подобные члены, получим, что

$$H(\psi) = a_j \cos \psi + b_j \sin \psi, \quad \psi \in [\pi/2 - \omega_j; \pi/2 - \omega_{j-1}] \quad (j \in \{1, \dots, J + 1\}), \quad (4.16)$$

где a_j, b_j — некоторые действительные числа.

В силу леммы 4.4 в случае простой кривой и выполнения условий (1.23) характеристическая функция D_0 — целая функция λ первого порядка и вполне регулярного роста с индикатором, задаваемым равносильными формулами (4.12), (4.14) и (4.16). Пусть $n(r, \theta_1, \theta_2)$ — число нулей функции $D_0(\lambda)$ в секторе $\theta_1 \leq \arg \lambda \leq \theta_2$, $|\lambda| \leq r$, где $\theta_1 \in \Gamma_{j+1}$, $\theta_2 \in \Gamma_j$. Тогда, пользуясь теоремой 3 главы III работы [10] и формулами (4.14), (4.16) получим, что для угловой плотности

$$\Delta(\theta_1, \theta_2) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \theta_1, \theta_2)}{r} \quad (4.17)$$

нулей функции $D_0(\lambda)$ внутри угла $\theta_1 \leq \arg \lambda \leq \theta_2$ комплексной плоскости λ справедливы следующие формулы

$$\Delta(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{dH}{d\psi} \Big|_{\psi=\pi/2-\omega_j+0} - \frac{dH}{d\psi} \Big|_{\psi=\pi/2-\omega_j-0} \right) = \frac{\chi_j^{(0)}}{\pi}. \quad (4.18)$$

Здесь первое равенство получается после подстановки (4.16) в формулы (3.25), (3.26) работы [10], а второе равенство следует из того, что в силу (4.14) для любого $j \in \{1, \dots, J\}$

$$H(\psi) = h^{(j)}(\psi) + \begin{cases} \chi_j^{(0)} \cos(\psi + \omega_j), & \text{если } \psi \in (\pi/2 - \omega_{j+1}; \pi/2 - \omega_j); \\ -\chi_j^{(0)} \cos(\psi + \omega_j), & \text{если } \psi \in (\pi/2 - \omega_j; \pi/2 - \omega_{j-1}), \end{cases}$$

где функция $h^{(j)}(\psi)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(\pi/2 - \omega_{j+1}; \pi/2 - \omega_{j-1})$.

Предложение 4.1. Пусть $F_0(\rho)$ — целая функция ρ порядка $1/2$. Тогда если $\rho = \lambda^2$, то функция $F_1(\lambda) := F_0(\lambda^2)$ — четная целая функция λ первого порядка. Если при этом в секторе $\theta_1 \leq \arg \lambda \leq \theta_2$ ($0 \leq \theta_2 - \theta_1 < \pi$), $0 < |\lambda| \leq r$ комплексной λ -плоскости функция F_1 имеет некоторое число нулей какой-то кратности, то столько же нулей такой же кратности функция $F_0(\rho)$ имеет в секторе $2\theta_1 \leq \arg \rho \leq 2\theta_2$, $0 < |\rho| \leq r^2$ комплексной ρ -плоскости.

Формула (4.18) с учетом формулы (4.9) и предложения 4.1 доказывает теорему 1.4, сформулированную в конце раздела 1.

5. Типы асимптотики счетного спектра. Из формул (4.9) и (4.18) следует, что при выполнении условий (1.23) нули характеристической функции $D_0(\lambda)$ краевой задачи класса H на простой кривой γ асимптотически (при $|\lambda| \rightarrow \infty$) лежат в окрестностях конечного числа J ($1 \leq J \leq N+1$) прямых, параметрически задаваемых функциями $\lambda = \lambda^{(j)}(t) := t \exp\{i(\pi/2 - \omega_j)\}$ ($t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, J}$), где величины ω_j определены в соотношении (4.13) и перед ним.

Заметим, что в силу формул (4.8) и (4.10), а также по определению величин ω_j множество прямых, заданных параметрически соотношениями $z = t \exp\{i\omega_j\}$ ($t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, J}$) совпадает с множеством всех прямых, проходящих через начало координат комплексной плоскости z , каждая из которых параллельна хотя бы одному из отрезков L_m ($m = \overline{0, N}$), соединяющих последовательные характеристические точки простой кривой.

Для изучения особенностей асимптотики спектра вблизи конкретной прямой $\lambda = \lambda^{(j)}(t)$ ($t \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, J\}$) полезно выделить в формуле (4.6) члены, которые являются главными в некоторой окрестности этой прямой. Поскольку $D_0(\lambda)$ является четной функцией λ , то можно ограничиться рассмотрением окрестности луча $\lambda = t \exp\{i(\pi/2 - \omega_j)\}$, $t > 0$.

Лемма 5.1. Пусть

$$\varepsilon_1^{(j)} := \min\{\omega_j - \omega_{j-1}, \quad \omega_{j+1} - \omega_j\}, \quad \delta \in [-\varepsilon_1^{(j)}/2, \varepsilon_1^{(j)}/2] \quad (j \in \{1, \dots, J\}),$$

где $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{J+1}$ были определены в (4.13), (4.15). Тогда для любого числа $\kappa \in \{1, \dots, J\} \setminus \{j\}$ при $J \geq 2$

$$|\sin(\omega_j - \delta - \omega_\kappa)| \geq \sin(\varepsilon_1^{(j)}/2) > 0. \quad (5.1)$$

Доказательство. Пусть для определенности $j > \kappa$. Тогда, учитывая соотношения (4.13), (4.15), определение величины $\varepsilon_1^{(j)}$ и ограничение на область изменения переменной δ , имеем:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\varepsilon_1^{(j)}}{2} &\leq \frac{\omega_j - \omega_{j-1}}{2} \leq \frac{\omega_j - \omega_{j-1}}{2} + \omega_{j-1} - \omega_\kappa = \omega_j - \frac{\omega_j - \omega_{j-1}}{2} - \omega_\kappa \leq \\ &\leq \omega_j - \frac{\varepsilon_1^{(j)}}{2} - \omega_\kappa \leq \omega_j - \delta - \omega_\kappa \leq \omega_j + \frac{\varepsilon_1^{(j)}}{2} - \omega_\kappa \leq \omega_j + \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{2} - \omega_\kappa = \\ &= \omega_{j+1} - \omega_\kappa - \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{2} \leq \omega_{J+1} - \omega_1 - \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{2} = \pi - \frac{\omega_{j+1} - \omega_j}{2} \leq \pi - \frac{\varepsilon_1^{(j)}}{2} < \pi. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\omega_j - \delta - \omega_\kappa \in [\varepsilon_1^{(j)}/2, \pi - \varepsilon_1^{(j)}/2] \subset (0, \pi),$$

что и доказывает лемму. Аналогично рассматривается случай $j < \kappa$. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 1.5, сформулированной в конце раздела 1.

Доказательство теоремы 1.5. Пусть

$$\begin{aligned} \lambda &= |\lambda| \exp\{i(\pi/2 - \omega_j + \delta)\}, \quad j \in \{1, \dots, J\}, \quad |\lambda| \geq \lambda_0 > 0, \\ \delta &\in [-\varepsilon^{(j)}, \varepsilon^{(j)}], \quad 0 < \varepsilon^{(j)} \leq \varepsilon_1^{(j)}/2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Положим

$$\alpha_{m,j}^{(0)} := \text{sign}\{\sin(\omega_j - \psi_m)\}, \quad S_0^{(j)} := 1 + \sum_{m=0, m \notin N_j}^N (1 + \alpha_{m,j}^{(0)}) 2^{m-1}.$$

Заметим, что $S_0^{(1)} = 1$ при $J = 1$. Если $s \in S_j$, где

$$S_j := \left\{ S_0^{(j)} + \sum_{n \in N_j} (1 + \alpha_n^{(s)}) 2^{n-1}, \alpha_n^{(s)} \in \{-1, 1\} \right\}, \quad (5.3)$$

то, учитывая формулу (3.31), устанавливающую взаимно однозначное соответствие значения индекса s со значениями всех компонент вектора $\vec{\alpha}^{(s)}$, получим, что коэффициент $h_s = (\vec{\alpha}^{(s)}, \vec{\Delta z})$

можно представить в виде

$$h_s = \sum_{m=0, m \notin N_j}^N \alpha_{m,j}^{(0)} \Delta z_m + \sum_{n \in N_j} \alpha_n^{(s)} \Delta z_n = H_0^{(j)} + \Delta h_s^{(j)} \quad (s \in S_j), \quad (5.4)$$

где

$$H_0^{(j)} := \sum_{m=0, m \notin N_j}^N \alpha_{m,j}^{(0)} \Delta z_m - \sum_{n \in N_j} \beta_n \Delta z_n, \quad (5.5)$$

$$\beta_n := \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_n \in [0; \pi); \\ -1, & \text{если } \psi_n \in [-\pi; 0), \end{cases}$$

$$\Delta h_s^{(j)} := \sum_{n \in N_j} (\alpha_n^{(s)} + \beta_n) \Delta z_n = \exp\{i\omega_j\} \Psi_s^{(j)}, \quad \Psi_s^{(j)} := \sum_{n \in N_j} (\tilde{\alpha}_n^{(s)} + 1) \chi_n \quad (s \in S_j). \quad (5.6)$$

При получении последней формулы учтены соотношения (4.8), (4.10) и определение множества чисел N_j , данное после (4.13).

При $J \geq 2$ наложим на $\varepsilon^{(j)}$ дополнительное к (5.2) ограничение:

$$0 < \varepsilon^{(j)} \leq \varepsilon_2^{(j)}. \quad (5.7)$$

Здесь

$$\varepsilon_2^{(j)} := \arcsin \left(\min \left\{ 1, \frac{\chi_j^{(out)}}{2\chi_j^{(0)}} \sin \left(\frac{\varepsilon_1^{(j)}}{2} \right) \right\} \right) > 0, \quad \chi_j^{(out)} := \min \{ \chi_m, m \in \{0, \dots, N\} \setminus N_j \} > 0,$$

где величины $\varepsilon_1^{(j)}$ и $\chi_j^{(0)}$ были определены в лемме 5.1 и формуле (4.14) соответственно.

Пусть $p \in \{1, \dots, 2^{N+1}\} \setminus S_j$. Тогда по построению множества S_j (см. формулы (3.31), (5.3)) существует минимум одно значение $m \in N_\kappa$ ($\kappa \neq j$) такое, что $\alpha_m^{(s)} = -\alpha_{m,j}^{(0)}$, и, значит, при выполнении условий (5.2), (5.7) из неравенства (5.1) и соотношений (4.8), (4.10), (4.11), (4.13), (4.14), (5.5) получим

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re}\{\lambda(h_p - H_0^{(j)})\}}{|\lambda|} &\leq -2\chi^{(m)} |\cos(\pi/2 - \omega_j + \delta + \psi_m)| + \sum_{n \in N_j} 2\chi^{(n)} |\cos(\pi/2 + \delta)| = \\ &= -2\chi^{(m)} |\sin(\omega_j - \delta - \omega_\kappa)| + 2\chi_j^{(0)} |\sin \delta| \leq -2\chi_j^{(out)} \sin(\varepsilon_1^{(j)}/2) + 2\chi_j^{(0)} |\sin \delta| \leq -\delta^{(j)}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $\delta^{(j)} = \chi_j^{(out)} \sin(\varepsilon_1^{(j)}/2) > 0$.

Из (4.10), (4.14) и (5.6) следует, что $\Psi_s^{(j)}$ — действительные неотрицательные числа, не превышающие $2\chi_j^{(0)}$. Часть из них может совпадать между собой. Однако существуют ровно одно число $k_{0,j} \in S_j$, такое, что $\Psi_{k_{0,j}}^{(j)} = 0$, и ровно одно число $k_{1,j} \in S_j$, такое, что $\Psi_{k_{1,j}}^{(j)} = 2\chi_j^{(0)}$.

Пусть множество определенных в (5.6) чисел $\{\Psi_s^{(j)}, s \in S_j\}$ содержит I_j различных значений $\beta_p^{(j)}$ ($p = \overline{1, I_j}$), которые пронумерованы так, что

$$0 = \beta_1^{(j)} < \beta_2^{(j)} < \dots < \beta_{I_j}^{(j)} = 2\chi_j^{(0)}. \quad (5.9)$$

Тогда множество чисел S_j можно разбить на I_j непересекающихся непустых подмножеств $S_p^{(j)}$ ($p = \overline{1, I_j}$) таким образом, что $\Psi_l^{(j)} = \beta_p^{(j)}$ тогда и только тогда, когда $l \in S_p^{(j)}$. Положим

$$d_p^{(j)}(\lambda) := \sum_{s \in S_p^{(j)}} d_r^{(s)}(\lambda), \quad (5.10)$$

где $d_r^{(s)}$ — коэффициенты перед экспонентами в (4.6), которые могут быть асимптотически представлены в виде (4.7). Из сказанного выше имеем

$$S_1^{(j)} = \{k_{0,j}\}, \quad S_{I_j}^{(j)} = \{k_{1,j}\}.$$

Поэтому

$$d_1^{(j)} := d_r^{(k_{0,j})}, \quad d_{I_j}^{(j)} := d_r^{(k_{1,j})}.$$

Пусть

$$m_{\min}^{(j)} := \min \left\{ m_r^{(k_{0,j})}, m_r^{(k_{1,j})} \right\}.$$

Тогда из (4.7) и (5.10) следует, что либо $d_p^{(j)}$ можно представить в виде:

$$d_p^{(j)}(\lambda) = \lambda^{m_p^{(j)}} \delta_p^{(j)} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda} \right) \neq 0, \quad m_p^{(j)} \geq m_{\min}^{(j)}, \quad \delta_p^{(j)} \neq 0 \quad (p \in \{1, \dots, I_j\}), \quad (5.11)$$

либо $d_p^{(j)} = \lambda^{m_{\min}^{(j)}} O(1)$. В последнем случае при выполнении условий (5.2) в силу (5.9) справедливо следующее соотношение

$$d_p^{(j)}(\lambda) \exp \left\{ \beta_p^{(j)} \lambda_1 \right\} = \frac{O(1)}{\lambda} \begin{cases} d_1^{(j)}(\lambda) \exp \left\{ \beta_1^{(j)} \lambda_1 \right\}, & \text{если } \delta \geq 0; \\ d_{I_j}^{(j)}(\lambda) \exp \left\{ \beta_{I_j}^{(j)} \lambda_1 \right\}, & \text{если } \delta \leq 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

где $\lambda_1 := \lambda \exp\{i\omega_j\} = i|\lambda| \exp\{i\delta\}$, а величины $\beta_p^{(j)}$ были определены в соотношении (5.9) и перед ним.

Выделим из множества чисел $\{1, \dots, I_j\}$ такое подмножество $L^{(j)}$, что $d_p^{(j)}(\lambda)$ удовлетворяет условию (5.11) тогда и только тогда, когда $p \in L^{(j)}$. Заметим, что по построению $\{1, I_j\} \subset L^{(j)}$. Пусть

$$r^{(j)}(\lambda) := \sum_{p \in L^{(j)}} \lambda_1^{m_p^{(j)}} \delta_{p,0}^{(j)} \exp \left\{ \beta_p^{(j)} \lambda_1 \right\}, \quad \delta_{p,0}^{(j)} := \delta_p^{(j)} \exp \left\{ -im_p^{(j)} \omega_j \right\}, \quad (5.13)$$

Пользуясь соотношениями (5.4), (5.6), (5.8)–(5.13), получим, что при выполнении условий (5.2) и (5.7) формулу (4.6) для $r_{11} = D_0$ можно записать в виде:

$$r_{11} \exp \left\{ -\lambda H_0^{(j)} \right\} = \sum_{p \in L^{(j)}} \lambda_1^{m_p^{(j)}} \delta_{p,0}^{(j)} \exp \left\{ \beta_p^{(j)} \lambda_1 \right\} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda} \right), \quad m_p^{(j)} \geq m_{\min}^{(j)}. \quad (5.14)$$

Теорема 1.5 является прямым следствием формулы (5.14) и [1, гл. 12, § 8, теорема 12.10]. $\square$

Выражения вида (4.6), (5.13) и (5.14) часто называют квазиполиномами. В результате их детального изучения, которое имеет давнюю историю (см. [20, 22, 23, 26]), было установлено, в каких случаях расположение корней квазиполиномов асимптотически определено, получены формулы для первых членов соответствующих асимптотических разложений по $1/|\lambda|$ (см., например, [1, гл. 12]) и рекуррентные формулы для последующих членов (см. [13, 15]).

Поэтому представляет интерес не столько анализ асимптотики нулей целых функций, представимых в виде (4.6), (5.13) или (5.14), сколько установление связи конкретных особенностей спектра краевой задачи H с особенностями характеристических данных (1.10) простой кривой γ , на которой она рассматривается. Наиболее простая и общая связь такого типа следует из теоремы 1.4: при выполнении условий (1.23) спектр на комплексной плоскости параметра λ асимптотически локализуется в направлениях перпендикулярных отрезкам $z_n^* z_{n+1}^*$, где $\{z_n\}_0^{N+1}$ — набор характеристических точек кривой γ , а звездочка означает комплексное сопряжение. Однако характер этой локализации может быть разным.

Если среди отрезков L_m ($m = \bar{0}, \bar{N}$), соединяющих последовательные характеристические точки z_m и z_{m+1} простой кривой, нет параллельных, то $J = N + 1$, и, значит, при любом значении $j \in \{1, \dots, N + 1\}$ множество N_j состоит ровно из одного элемента, множество S_j — из двух, и в формуле (5.13) присутствует ровно два слагаемых. В этом случае в окрестности каждого

луча $\rho = -t \exp\{-2i\omega_j\}$ ($t > 0$) спектр краевой задачи H является асимптотически определенным и состоит из одной асимптотической последовательности точек (см. [1]). Как уже говорилось в конце раздела 1, одна из возможных реализаций этого случая была подробно исследована в [8].

Пусть теперь среди отрезков L_m ($m = \overline{0, N}$) есть параллельные, и, например, два или более отрезка параллельны прямой с параметризацией $z = t \exp\{i\omega_{j_0}\}$ ($t \in \mathbb{R}, j_0 \in \{1, \dots, J\}$). В этом случае N_{j_0} содержит более одного числа, и спектр краевой задачи H в окрестности луча $\rho = -t \exp\{-2i\omega_{j_0}\}$ ($t > 0$) может состоять из нескольких, возможно, разнотипных последовательностей точек. При этом особенности его асимптотического поведения сильно зависят от соотношений величин всех коэффициентов $\beta_p^{(j_0)}$ ($p \in L^{(j_0)}$), а также целых чисел $m_p^{(j_0)}$ и комплексных чисел $\delta_{p,0}^{(j_0)}$, входящих в формулу (5.13). Более того, при определенных соотношениях между значениями всех коэффициентов $\beta_p^{(j_0)}$ и всех чисел $m_p^{(j_0)}$ ($p \in L^{(j_0)}$) указанный спектр может содержать последовательность точек, которая не будет асимптотически определенной, не считая, конечно, локализации в окрестности указанного луча. Эту локализацию в этом случае можно лишь слегка уточнить, зажав асимптотически неопределенную последовательность точек между двумя прямыми, параллельными лучу $\rho = -t \exp\{-2i\omega_{j_0}\}$ ($t > 0$).

Подробный разбор всех описанных выше ситуаций и соответствующие формулы для первых членов асимптотического разложения приведены в [1, гл. 12]. Однако для установления связи условий реализации каждого из этих случаев с особенностями набора характеристических данных простой кривой γ необходимо более конкретно связать числа $m_p^{(j_0)}$, $\delta_{p,0}^{(j_0)}$ ($p \in L^{(j_0)}$) с числами $N_{1\pm}^{(n)}$, $N_{\pm}^{(n)}$, m_n , $\delta_{1\pm}^{(n)}$, $\delta_{\pm}^{(n)}$, δ_n ($n = \overline{1, N}$) (см. формулы (3.15), (3.16)). В конкретных ситуациях это можно сделать с помощью формулы (4.5) и лемм 3.2–3.4, 4.1, но намного больший интерес представлял бы анализ указанной связи в общем случае краевых задач класса H или хотя бы для каких-то подклассов этих задач. Напомним, что как следует из доказательства леммы 3.3, величина целых чисел $N_{1\pm}^{(n)}$, $N_{\pm}^{(n)}$ и комплексных чисел $\delta_{1\pm}^{(n)}$, $\delta_{\pm}^{(n)}$ зависит от целых функций $Q^{(n-1)}$, $Q^{(n)}$ и вида зависимостей элементов матрицы перехода $\hat{\eta}^{(n)}$ от спектрального параметра ρ , а числа m_n и δ_n равны соответственно минимальному порядку производной от потенциала вдоль кривой γ , которая имеет скачок в точке z_n , и величине этого скачка (см. [4, формулы (18), (19)]). При этом случай $m_n = 0$ соответствует скачку самого потенциала.

Общий анализ связи особенностей спектра с параметрами набора характеристических данных простой кривой, на которой рассматривается краевая задача, представляет интерес, прежде всего, с точки зрения решения обратных задач. При этом особенно ценными его результаты могут оказаться при формулировании и доказательстве теорем существования решений обратных задач для уравнения (1.3) класса H по спектрам, поскольку для доказательства теорем единственности в [3] был разработан значительно более простой и очень эффективный метод единичной передаточной матрицы, который с небольшими изменениями может быть обобщен на рассматриваемый в настоящей работе случай уравнения (1.3) класса H .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
3. Голубков А. А. Обратная задача для операторов Штурма—Лиувилля в комплексной плоскости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2018. — 18, № 2. — С. 144–156.
4. Голубков А. А. Асимптотика передаточной матрицы уравнения Штурма—Лиувилля с кусочно целым потенциалом на кривой // Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2019. — 2. — С. 37–41.
5. Ишкин Х. К. О локализации спектра задачи с комплексным весом // Фундам. прикл. мат. — 2006. — 12, № 5. — С. 49–64.
6. Ишкин Х. К. О критерии безмонодромности уравнения Штурма—Лиувилля // Мат. заметки. — 2013. — 94, № 4. — С. 552–568.
7. Ишкин Х. К. Критерий локализации спектра оператора Штурма—Лиувилля на кривой // Алгебра анал. — 2016. — 28, № 1. — С. 52–88.

8. Ишкин Х. К., Резбаев А. В. К формуле Дэвиса о распределении собственных чисел несамосопряженного дифференциального оператора// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 153. — С. 84–93.
9. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
10. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
11. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.
12. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1983.
13. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций// Мат. сб. — 1968. — 75 (117), № 4. — С. 558–566.
14. Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.
15. Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белаббаси Ю. О нулях целых функций одного класса// Тр. семина. им. И. Г. Петровского. — 1982. — 8. — С. 211–217.
16. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
17. Юрко В. А. О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала// Диффер. уравн. — 2000. — 36, № 8. — С. 1139–1140.
18. Юрко В. А. Спектральный анализ дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва во внутренней точке// Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — 63, № 2. — С. 362–372.
19. Amirov R. Kh., Ozkan A. S. Discontinuous Sturm–Liouville problems with eigenvalue dependent boundary conditions// Math. Phys. Anal. Geom. — 2014. — 17, № 3–4. — P. 483–491.
20. Dickson D. G. Expansions in Series of Solutions of Linear Difference-Differential and Infinite Order Differential Equations with Constant Coefficients. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1957.
21. Duistermaat J. J., Grünbaum F. A. Differential equations in the spectral parameter// Commun. Math. Phys. — 1986. — 103, № 2. — P. 177–240.
22. Horn J. Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung, II// Math. Ann. — 1897. — 49, № 3–4. — P. 473–496.
23. Langer R. E. On the zeros of exponential sums and integrals// Bull. Am. Math. Soc. — 1931. — 37. — P. 213–239.
24. Mennicken R., Möller M. Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems. — Amsterdam: Elsevier, 2003.
25. Tretter C. Boundary eigenvalue problems with differential equations $N\eta = \lambda P\eta$ with λ -polynomial boundary conditions// J. Differ. Equations. — 2001. — 170, № 2. — P. 408–471.
26. Turrittin H. L. Asymptotic distribution of zeros for certain exponential sums// Am. J. Math. — 1944. — 66, № 2. — P. 199–228.
27. Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition// Math. Z. — 1973. — 133, № 4. — P. 301–312.

Голубков Андрей Александрович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: andrej2501@yandex.ru