Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Гусева, О наполненности подалгебры локальных операторов Гильберта—Шмидта, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 69–86

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-69-86>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:26:48

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 69–86
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-69-86

УДК 517.984.4

О НАПОЛНЕННОСТИ ПОДАЛГЕБРЫ ЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ГИЛЬБЕРТА—ШМИДТА

© 2021 г. Е. Ю. ГУСЕВА

Аннотация. Под локальным оператором Гильберта—Шмидта понимается оператор вида

$$(Tx)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, s)x(s)ds$$

с измеримым ядром $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ в предположении, что при всех $-\infty < a < b < +\infty$

$$\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 ds dt < \infty.$$

При некоторых дополнительных условиях, обеспечивающих, в частности, действие оператора T в $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, устанавливается, что если оператор $\mathbf{1} + T$ обратим, то обратный оператор имеет вид $\mathbf{1} + T_1$, где T_1 — также локальный оператор Гильберта—Шмидта, причем ядро S удовлетворяет тем же условиям.

Ключевые слова: оператор Гильберта—Шмидта, наполненная подалгебра, разностный оператор, сверточный оператор, мажорируемый сверткой оператор.

ON THE INVERSE CLOSEDNESS OF THE SUBALGEBRA OF LOCAL HILBERT—SCHMIDT OPERATORS

© 2021 Е. YU. GUSEVA

ABSTRACT. A local Hilbert—Schmidt operator is an operator of the form

$$(Tx)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, s)x(s)ds$$

with a measurable kernel $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ under the condition that

$$\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 ds dt < \infty$$

for all $-\infty < a < b < +\infty$. We prove that, under some additional conditions that provide the action of the operator T in $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, the invertibility of the operator $\mathbf{1} + T$ implies that the inverse operator has the form $\mathbf{1} + T_1$, where T_1 is also a local Hilbert—Schmidt operator whose kernel S satisfies the same conditions.

Keywords and phrases: Hilbert—Schmidt operator, full subalgebra, difference operator, convolution operator, operator majorized by a convolution.

AMS Subject Classification: 47L80, 47B10, 35P05

1. Введение. Для многих классов $\mathfrak{T}$ интегральных операторов справедливо следующее свойство (см., например, [10, теорема 2.3]): если оператор $\mathbf{1} + T$, где $T \in \mathfrak{T}$, обратим, то обратный оператор $(\mathbf{1} + T)^{-1}$ имеет вид $\mathbf{1} + T_1$, где T_1 принадлежит тому же классу $\mathfrak{T}$. Например, таким свойством обладает класс $\mathfrak{S}_2$ операторов Гильберта—Шмидта (см. [10, 14, 40]). В спектральной теории (см. [8]) это свойство называют *наполненностью*. Наполненность различных классов интегральных операторов T обычно тесно связана с тем, что входящие в класс операторы являются компактными, и поэтому их спектр состоит из изолированных точек (за исключением нуля).

В настоящей работе рассматривается случай, когда интегральный оператор

$$(Tx)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, s)x(s)ds$$

с измеримым ядром $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, является оператором Гильберта—Шмидта лишь *локально*, т.е. операторами Гильберта—Шмидта являются лишь операторы $P_{[a,b]}TP_{[a,b]}$ для конечных a и b ; здесь $P_{[a,b]}$ — оператор умножения на характеристическую функцию отрезка $[a, b]$. Такой оператор T , как правило, не является компактным. Дополнительно мы требуем, чтобы ядро $k(t, s)$ оператора T убывало при $t - s \rightarrow \infty$ определенным образом.

В более точной формулировке условие убывания ядра на бесконечности заключается в следующем. Представим область определения $\mathbb{R}$ функций $x \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ в виде $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1)$.

В соответствии с этим представлением отождествим пространство $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ с $l_2(\mathbb{Z}, L_2([0, 1), \mathbb{C}))$, а оператору T поставим в соответствие бесконечную матрицу $\{b_{km} : k, m \in \mathbb{Z}\}$, состоящую из операторов b_{km} , действующих из $L_2([0, 1), \mathbb{C})$ в $L_2([0, 1), \mathbb{C})$ и связанную с оператором T посредством равенства

$$(Tx)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_{km}x_{k-m}.$$

Элементы $b_{km} : L_2([0, 1), \mathbb{C}) \rightarrow L_2([0, 1), \mathbb{C})$ матрицы с одним и тем же значением m образуют m -ю диагональ матрицы; все они являются операторами Гильберта—Шмидта. Убывание ядра k на бесконечности описывается в терминах убывания диагоналей: предполагается, что коэффициенты $b_{km} \in \mathbf{B}(X)$ удовлетворяют оценке

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} g(m) \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|b_{km}\|_{\mathfrak{S}_2} < \infty$$

для некоторого специального (подробнее см. раздел 3) веса g на $\mathbb{Z}$, здесь $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}_2}$ — норма Гильберта—Шмидта.

Мы рассматриваем два случая. В первом $b_{km} = a_{k-m}$, и тем самым ядро k оказывается периодическим: $k(t+1, s+1) = k(t, s)$. Во втором случае дополнительных условий не накладывается. Установлено (см. теоремы 5.10 и 6.6), что оператор T_1 из представления $(\mathbf{1} + T)^{-1} = \mathbf{1} + T_1$ наследует свойство быть локальным оператором Гильберта—Шмидта, и его ядро убывает на бесконечности с той же скоростью, что и ядро исходного оператора T . Сохранение скорости убывания диагоналей при переходе к обратному оператору изучалось многими авторами (см., например, [1–6, 11, 12, 23–25, 28–31, 34, 35, 40]); чтобы сделать изложение замкнутым, мы приводим некоторые из их результатов в удобной для наших целей интерпретации.

Отметим также работы [19, 20, 26, 33, 35–37], в которых изучалась наполненность других классов некомпактных интегральных операторов.

Разделы 2–4 посвящены изложению вспомогательных определений, конструкций и фактов. В разделах 5 и 6 излагаются основные результаты: в теоремах 5.8 и 6.5 рассматривается общий абстрактный случай, а в теоремах 5.10 и 6.6 — его конкретизация для интегральных операторов.

2. Банаховы алгебры. *Линейной алгеброй* или просто *алгеброй* называют (см. [8, гл. 1, § 1], [15, гл. 10, § 10.1], [18, гл. 4, § 1.13]) линейное пространство $\mathbf{B}$ над полем комплексных чисел,

в котором задана операция умножения, обладающая свойствами

$$A(BC) = (AB)C, \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \\ (A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC.$$

Если алгебра $\mathbf{B}$ является нормированным пространством и при этом выполнена аксиома

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

то говорят, что $\mathbf{B}$ — *нормированная алгебра*. Если нормированная алгебра является полным, т.е. банаховым пространством, то ее называют *банаховой алгеброй*.

Если в $\mathbf{B}$ выделен элемент $\mathbf{1}$, обладающий свойством $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A$, то говорят, что алгебра $\mathbf{B}$ *имеет единицу*, при этом элемент $\mathbf{1}$ называют *единицей* алгебры, а саму алгебру называют *унитальной*. Если алгебра нормирована и при этом выполнена аксиома $\|\mathbf{1}\| = 1$, то говорят, что $\mathbf{B}$ — *нормированная унитарная алгебра*.

Пусть $\mathbf{B}$ — унитарная алгебра и $A \in \mathbf{B}$. Элемент $B \in \mathbf{B}$ называют *обратным* к A , если $AB = BA = \mathbf{1}$. Обратный к A обозначают символом A^{-1} . Если элемент A имеет обратный, его называют *обратимым* (в алгебре $\mathbf{B}$).

Пусть $\mathbf{B}$ — унитарная алгебра и $A \in \mathbf{B}$. Множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых элемент $\lambda\mathbf{1} - A$ не имеет обратного, называют *спектром* A (в алгебре $\mathbf{B}$) и обозначают символом $\sigma(A)$ или $\sigma_{\mathbf{B}}(A)$.

Дополнение $\rho(A) = \rho_{\mathbf{B}}(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ называют *резольвентным множеством* A . Функцию $R_{\lambda} = (\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}$ называют *резольвентой* A ; областью определения резольвенты является множество $\rho(A)$. Число

$$R(A) = R_{\mathbf{B}}(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

называют *спектральным радиусом* элемента A .

Предложение 2.1 (см. [15, теорема 10.13]). *Спектр любого элемента A унитарной банаховой алгебры $\mathbf{B}$ есть замкнутое ограниченное непустое подмножество $\mathbb{C}$, причем*

$$R(A) \leq \|A\|.$$

Подмножество $\mathbf{R}$ алгебры $\mathbf{A}$ называют *подалгеброй*, если все три алгебраические операции (сложение, умножение на скаляры и умножение элементов) из $\mathbf{R}$ не выводят. Если $\mathbf{A}$ содержит единицу и $\mathbf{1}_{\mathbf{A}} \in \mathbf{R}$, то говорят, что $\mathbf{R}$ — *унитарная подалгебра*. Очевидно, подалгебра сама является алгеброй. Очевидно также, что замыкание подалгебры (нормированной алгебры) является подалгеброй.

Пусть $\mathbf{B}$ — неунитарная алгебра (или унитарная алгебра, единица которой по каким-либо соображениям нам не подходит; см., например, определение подалгебры $\widetilde{l}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$ в разделе 5). Пусть $\widetilde{\mathbf{B}}$ — алгебра, состоящая из всевозможных упорядоченных пар (α, A) и $\alpha \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbf{A}$, с операциями

$$(\alpha, A) + (\beta, B) = (\alpha + \beta, A + B), \quad \lambda(\alpha, A) = (\lambda\alpha, A), \quad (\alpha, A)(\beta, B) = (\alpha\beta, \alpha B + \beta A + AB).$$

Нетрудно видеть, что элемент $(1, \mathbf{O})$ является единицей алгебры $\widetilde{\mathbf{B}}$. Если $\mathbf{B}$ — нормированная алгебра, то норму в алгебре $\widetilde{\mathbf{B}}$ можно задать следующим образом:

$$\|(\alpha, A)\| = |\alpha| + \|A\|.$$

Очевидно, $\widetilde{\mathbf{B}}$ банахова, если $\mathbf{B}$ банахова. Алгебру $\widetilde{\mathbf{B}}$ называют (см. [15, гл. 10, § 10.1, с. 256], [36, гл. 1, § 1.4.1, с. 21]) *алгеброй $\mathbf{B}$ с присоединенной единицей*. Если $\mathbf{B}$ — унитарная алгебра, то под $\widetilde{\mathbf{B}}$ условимся понимать саму алгебру $\mathbf{B}$.

В частном случае, когда алгебра $\mathbf{B}$ является подалгеброй некоторой алгебры $\mathbf{A}$, имеющей единицу, алгебру с присоединенной единицей можно реализовать как подалгебру

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \{\alpha\mathbf{1}_{\mathbf{A}} + A \in \mathbf{A} : A \in \mathbf{B}, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

алгебры $\mathbf{A}$. Нетрудно видеть, что эта реализация изоморфна описанной выше, но может иметь другую норму, тем не менее, эквивалентную норме $\|(\alpha, A)\| = |\alpha| + \|A\|$.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — алгебры. Говорят (см. [8, гл. 1, § 1, с. 7]), что отображение $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ является *морфизмом алгебр*, если

$$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B), \quad \varphi(\alpha A) = \alpha \varphi(A), \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$$

для всех $A, B \in \mathbf{A}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — унитарные алгебры и дополнительно $\varphi(\mathbf{1}_\mathbf{A}) = \mathbf{1}_\mathbf{B}$, то говорят, что φ — *морфизм унитарных алгебр*. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — банаховы (нормированные) алгебры и морфизм φ непрерывен, то говорят, что φ — *морфизм банаховых (нормированных) алгебр*. Если φ^{-1} существует и также является соответствующим морфизмом, то говорят, что φ — *изоморфизм*, а $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ *изоморфны*. Изоморфизм φ нормированных алгебр называют *изометрическим*, если $\|\varphi(A)\| = \|A\|$ для всех A .

Предложение 2.2 (см. [17, гл. 5, § 2, предложение 3]). Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — унитарные алгебры и $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ — морфизм унитарных алгебр. Если $A \in \mathbf{A}$ обратим, то $\varphi(A)$ также обратим.

Следствие 2.3 (см. [17, гл. 5, § 2, предложение 4]). Рассмотрим унитарные алгебры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и морфизм унитарных алгебр $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Для любого $A \in \mathbf{A}$ имеет место включение

$$\sigma_\mathbf{B}(\varphi(A)) \subseteq \sigma_\mathbf{A}(A).$$

Унитарную подалгебру $\mathbf{B}$ унитарной алгебры $\mathbf{A}$ называют (см. [8, гл. 1, § 4, с. 11]) *наполненной*, если всякий $A \in \mathbf{B}$, обратимый в $\mathbf{A}$, также обратим и в $\mathbf{B}$. В силу единственности обратного это определение эквивалентно следующему: если существует такой $A^{-1} \in \mathbf{A}$, что $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$, то $A^{-1} \in \mathbf{B}$.

Теорема 2.4 (см. [15, гл. 10, § 10.18], [8, гл. 3, § 2, с. 29]). Пусть $\mathbf{B}$ — унитарная банахова алгебра и $\mathbf{R}$ — ее замкнутая унитарная подалгебра. Тогда для любого $R \in \mathbf{R}$ множество $\sigma_\mathbf{R}(R)$ является объединением $\sigma_\mathbf{B}(R)$ и отделенного подмножества множества $\rho_\mathbf{B}(R)$. В частности, граница $\sigma_\mathbf{R}(R)$ содержится в границе $\sigma_\mathbf{B}(R)$. Кроме того, для любого $R \in \mathbf{R}$ справедливо равенство

$$R_\mathbf{R}(R) = R_\mathbf{B}(R).$$

(Двусторонним) идеалом в алгебре $\mathbf{B}$ называют [16, гл. 1, § 3] подпространство $\mathbf{J}$, обладающее свойством: $AJ, JA \in \mathbf{J}$ для всех $A \in \mathbf{B}$ и $J \in \mathbf{J}$. Если $\mathbf{J}$ — идеал, то фактор-пространство $\mathbf{B}/\mathbf{J}$ является алгеброй.

Алгебру $\mathbf{B}$ называют *коммутативной*, если $AB = BA$ для любых $A, B \in \mathbf{B}$.

Пусть $\mathbf{B}$ — коммутативная унитарная банахова алгебра. *Характером* алгебры $\mathbf{B}$ называют (см. [8, гл. 1, § 1.5]) всякий морфизм алгебр $\chi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{C}$, т. е. всякое отображение $\chi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} \chi(A + B) &= \chi(A) + \chi(B), & \chi(AB) &= \chi(A)\chi(B), \\ \chi(\lambda A) &= \lambda\chi(A), & \chi(\mathbf{1}_\mathbf{B}) &= 1_\mathbb{C} \end{aligned}$$

для всех $A, B \in \mathbf{B}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Множество всех характеров алгебры $\mathbf{B}$ обозначают символом $X(\mathbf{B})$. Множество $X(\mathbf{B})$ будем называть *пространством характеров* алгебры $\mathbf{B}$.

Предложение 2.5. Пусть $\mathbf{B}$ — коммутативная унитарная алгебра, а χ — ее характер. Если элемент $A \in \mathbf{B}$ обратим, то

$$\chi(A^{-1}) = \frac{1}{\chi(A)}.$$

Доказательство вытекает из свойств характера. □

Предложение 2.6 (см. [8, гл. 1, § 3.1, теорема 1]). Норма любого характера коммутативной унитарной банаховой алгебры равна 1.

Теорема 2.7 (см. [9, с. 31, теорема 3], [15, теорема 11.9(с)], [8, с. 33, предложение 3]). Пусть $\mathbf{B}$ — коммутативная унитарная банахова алгебра. Элемент $A \in \mathbf{B}$ обратим тогда и только тогда, когда $\chi(A) \neq 0$ для всех характеров χ алгебры $\mathbf{B}$.

Следствие 2.8. В условиях теоремы 2.7

$$\sigma(A) = \{\chi(A) : \chi \in X(\mathbf{B})\}.$$

3. Алгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z})$. Символом $\mathbb{Z}$ будем обозначать группу целых чисел. *Весом* на группе $\mathbb{Z}$ называют произвольную функцию $g : \mathbb{Z} \rightarrow (0, +\infty)$. Всегда будем предполагать, что вес на $\mathbb{Z}$ обладает следующими свойствами:

- (a) $g(0) = 1$,
- (b) $g(m+n) \leq g(m)g(n)$,
- (c) $g(-n) = g(n)$,
- (d) $g(n) \geq 1$,
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln g(n)}{|n|} = 0$.

Примеры весов, обладающих этими свойствами:

$$g(n) = 1; \quad g(n) = (1 + |n|)^s, \quad s \geq 0; \quad g(n) = e^{a|n|^b} (1 + |n|)^s, \quad 0 \leq b < 1, \quad a \geq 0;$$

$$g(n) = e^{a|n|^b} (1 + |n|)^s \ln^t(e + |n|), \quad t \geq 0.$$

Пусть g — вес на $\mathbb{Z}$, а $\mathbf{B}$ — банахова алгебра. *Пространством $l_{1,g}$ на $\mathbb{Z}$ со значениями в $\mathbf{B}$ с весом g* называют множество $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$, состоящее из семейств $a = \{a_m \in \mathbf{B} : m \in \mathbb{Z}\}$, для которых

$$\|a\| = \|a\|_{l_{1,g}} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(m) \|a_m\| < \infty.$$

В частности, символом $l_1 = l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ будем обозначать пространство $l_{1,g}$, соответствующее весу $g(m) \equiv 1$.

Предложение 3.1 (см. [30, с. 196, лемма 5.22]). *Пространство $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ является банаховой алгеброй относительно операции свертки*

$$(a * b)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{k-m},$$

взятой в качестве умножения. Если $\mathbf{B}$ унитарна, то $l_{1,g}$ также унитарна; при этом единицей алгебры $l_{1,g}$ является семейство δ , определяемое по формуле

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

Если $\mathbf{B} = \mathbb{C}$, то алгебра $l_{1,g}$ коммутативна.

Найдем все характеры алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Обозначим через $\varepsilon \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ семейство

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 1, \\ 0, & \text{при } k \neq 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Вычислим степени ε (относительно операции свертки). Заметим, что ε^m при $m \geq 1$ состоит из чисел

$$\varepsilon_k^{(m)} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

По определению положим $\varepsilon^0 = \delta$. Проверим, что ε^{-1} представляет собой семейство

$$\varepsilon_k^{(-1)} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = -1, \\ 0, & \text{при } k \neq -1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, имеем

$$(\varepsilon^{(-1)} * \varepsilon)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varepsilon_m^{(-1)} \varepsilon_{k-m} = \delta_k, \quad (\varepsilon * \varepsilon^{(-1)})_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varepsilon_m \varepsilon_{k-m}^{(-1)} = \delta_k.$$

Теперь понятно, что при всех $m \in \mathbb{Z}$ семейство ε^m состоит из чисел

$$\varepsilon_k^{(m)} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 3.2. Для семейства $\varepsilon \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ имеет место равенство

$$\|\varepsilon^m\|_{l_{1,g}} = g(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 3.3. Всякое семейство $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ представимо в виде

$$a = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \varepsilon^m, \quad (1)$$

где $a_m \in \mathbb{C}$ — координаты семейства a , при этом ряд (1) сходится абсолютно.

Теорема 3.4. Общий вид характера χ алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ задается формулой

$$\chi(a) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k u^k, \quad (2)$$

где u пробегает множество $\mathbb{U} = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$. Иными словами, всякая формула вида (2) с $u \in \mathbb{U}$ задает характер; и обратно, всякий характер представим в таком виде. В частности, пространство характеров алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ не зависит от g .

Доказательству теоремы 3.4 предпошлим несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 3.5. Любой характер χ алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ задается формулой (2), где $u = \chi(\varepsilon)$, а элемент $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ имеет вид (1). При этом $u \neq 0$.

Доказательство. Имеем

$$\chi(a) = \chi\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varepsilon^k\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(a_k \varepsilon^k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \chi(\varepsilon^k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k [\chi(\varepsilon)]^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k u^k. \quad \square$$

Предложение 3.6. Пусть $\chi : l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ — характер. Тогда

$$\|\chi\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|u|^k}{g(k)},$$

где $u = \chi(\varepsilon)$.

Доказательство. Введем обозначение

$$\gamma = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|u|^k}{g(k)}.$$

Покажем, что $\gamma \leq \|\chi\|$. Для этого заметим, что в силу предложения 3.2 $\|\varepsilon^k\| = g(k)$. В то же время, $\chi(\varepsilon^k) = u^k$. Отсюда

$$\|\chi\| \geq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|u|^k}{g(k)}.$$

Докажем обратное неравенство $\|\chi\| \leq \gamma$. Возьмем произвольное $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$; по определению

$$\|a\| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| g(k).$$

Имеем

$$\frac{|\chi(a)|}{\|a\|} = \frac{\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k u^k \right|}{\|a\|} \leq \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \cdot |u|^k}{\|a\|} \leq \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \gamma g(k)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| g(k)} = \gamma.$$

Переходя к супремуму по $a \neq 0$, получаем $\|\chi\| \leq \gamma$. □

Следствие 3.7. Для того чтобы комплексное число $u \neq 0$ порождало характер алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ по формуле (2), необходимо и достаточно, чтобы оно обладало свойством

$$|u|^k \leq g(k)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$. При этом ряд (2) сходится абсолютно.

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$; очевидно, также $\varepsilon^{-1} \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Из формулы $\chi(\varepsilon)\chi(\varepsilon^{-1}) = \chi(\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1}) = \chi(\delta) = 1$ получаем, что $u = \chi(\varepsilon) \neq 0$.

Пусть формула (2) определяет характер. Тогда в силу того, что $\|\chi\| = 1$ (предложение 2.6), и согласно предложению 3.6 имеем

$$\frac{|u|^k}{g(k)} \leq 1,$$

или $|u|^k \leq g(k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Обратно, пусть $|u|^k \leq g(k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Покажем, что формула (2) определяет характер. Сначала проверим, что ряд (2) абсолютно сходится. Имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k u^k| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \cdot |u|^k \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| g(k) = \|a\|_{l_{1,g}} < \infty.$$

Проверим выполнение свойств характера. Не является очевидным только третье свойство:

$$\begin{aligned} \chi(a)\chi(b) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m u^m \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n u^n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m u^m \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{k-m} u^{k-m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_m u^m b_{k-m} u^{k-m} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{k-m} \right) u^{k-m} u^m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{k-m} \right) u^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a * b)_k u^k = \chi(a * b). \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 3.8. Пределы $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln g(n)}{n}$ существуют и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln g(n)}{n} = \inf_{n > 0} \frac{\ln g(n)}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\ln g(n)}{n} = \sup_{n < 0} \frac{\ln g(n)}{n}.$$

Доказательство. Докажем первую формулу. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon} \leq \inf_{n > 0} \frac{\ln g(n)}{n} + \varepsilon.$$

Возьмем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Представим его в виде $k = ln_\varepsilon + m$, где $m = 0, 1, \dots, n_\varepsilon - 1$, а $l \in \mathbb{Z}$. Тогда по свойству (b) веса имеем

$$g(k) = g(ln_\varepsilon + m) \leq \underbrace{g(n_\varepsilon)g(n_\varepsilon) \dots g(n_\varepsilon)}_{l \text{ штук}} \cdot g(m) = [g(n_\varepsilon)]^l g(m).$$

Следовательно,

$$\ln g(k) \leq l \ln g(n_\varepsilon) + \ln g(m).$$

Отсюда

$$\frac{\ln g(k)}{k} = \frac{\ln g(k)}{ln_\varepsilon + m} \leq \frac{l}{ln_\varepsilon + m} \ln g(n_\varepsilon) + \frac{\ln g(m)}{ln_\varepsilon + m} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon}.$$

Поэтому при достаточно больших k имеем

$$\frac{\ln g(k)}{k} \leq \frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon} + \varepsilon < \inf_{n > 0} \frac{\ln g(n)}{n} + 2\varepsilon.$$

В то же время по определению инфимума при всех $k > 0$

$$\inf_{n > 0} \frac{\ln g(n)}{n} \leq \frac{\ln g(k)}{k}.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln g(k)}{k} = \inf_{n > 0} \frac{\ln g(n)}{n}.$$

Докажем вторую формулу. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем по нему номер $n_\varepsilon \in -\mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon} \geq \sup_{n < 0} \frac{\ln g(n)}{n} - \varepsilon.$$

Возьмем произвольное $k \in -\mathbb{N}$. Представим его в виде $k = ln_\varepsilon + m$, где $m = 0, -1, \dots, -n_\varepsilon + 1$, а $l \in \mathbb{Z}$. Рассуждая как и выше, получаем

$$\frac{\ln g(k)}{k} = \frac{\ln g(k)}{ln_\varepsilon + m} \geq \frac{l}{ln_\varepsilon + m} \ln g(n_\varepsilon) + \frac{\ln g(m)}{ln_\varepsilon + m} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon}.$$

Поэтому при больших по модулю отрицательных k имеем

$$\frac{\ln g(k)}{k} \geq \frac{\ln g(n_\varepsilon)}{n_\varepsilon} - \varepsilon > \sup_{n < 0} \frac{\ln g(n)}{n} - 2\varepsilon.$$

В то же время

$$\sup_{n < 0} \frac{\ln g(n)}{n} \geq \frac{\ln g(k)}{k}.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{\ln g(k)}{k} = \sup_{n < 0} \frac{\ln g(n)}{n}. \quad \square$$

Доказательство теоремы 3.4. Пусть χ — характер алгебры $l_{1,g}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Согласно предложению 3.5 он имеет вид (2), причем в силу следствия 3.7 $|u|^k \leq g(k)$ или $k \ln |u| \leq \ln g(k)$ или $\ln |u| \leq \ln g(k)/k$ при $k > 0$ и $\ln |u| \geq \ln g(k)/k$ при $k < 0$. Переходя к пределу при $k \rightarrow +\infty$ в неравенстве $\ln |u| \leq \ln g(k)/k$, получаем

$$\ln |u| \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln g(k)}{k} = 0.$$

Аналогичным образом переходя к пределу при $k \rightarrow -\infty$ в неравенстве $\ln |u| \geq \ln g(k)/k$, получаем

$$\ln |u| \geq \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{\ln g(k)}{k} = 0.$$

Отсюда $\ln |u| = 0$ или $|u| = 1$.

Обратно, пусть $|u| = 1$. Покажем, что формула (2) задает характер алгебры $l_{1,g}$. Воспользуемся вновь следствием 3.7. Условие $|u|^k \leq g(k)$ из следствия 3.7 выполняется благодаря условию (d) из определения веса. $\square$

Следствие 3.9 (ср. [30, следствие 5.27]). *Подалгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ наполнена в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.*

Доказательство. Пусть $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ имеет обратный $b \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Тогда в силу предложения 2.2 $\chi(b) \neq 0$ для любого характера χ алгебры l_1 . Но в силу теоремы 3.4 у $l_1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ и $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ характеры одинаковые. Значит, $\chi(b) \neq 0$ для любого характера χ алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Следовательно, по теореме 2.7 b обратим в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. $\square$

4. Теорема Бохнера—Филлипса. (Алгебраическое) тензорное произведение (см. [7, гл. 3, § 1], [16, гл. 0, § 3.2, с. 38], [17, гл. 2, § 7]) $X \otimes Y$ линейных пространств X и Y есть линейное пространство всех формальных конечных сумм

$$z = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k, \quad x_k \in X, \quad y_k \in Y,$$

в котором отождествляются следующие выражения:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, \\ x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2, \\ \alpha(x \otimes y) &= (\alpha x) \otimes y = x \otimes (\alpha y). \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть X и Y — банаховы пространства. Невырожденную норму $\alpha(\cdot) = \|\cdot\|_\alpha$ в $X \otimes Y$ называют *кросс-нормой* (см. [22, 33, 39]), если для всех $x \in X$ и $y \in Y$

$$\|x \otimes y\|_\alpha = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Обозначим пространство $X \otimes Y$, снабженное кросс-нормой α , символом $X \otimes_\alpha Y$. Если X и Y являются бесконечномерными, то пространство $X \otimes_\alpha Y$ не полное. Обозначим пополнение $X \otimes_\alpha Y$

символом $X \overline{\otimes}_\alpha Y$ и назовем его (*топологическим*) *тензорным произведением* X и Y . Кросс-норма в $X \otimes Y$ не является единственной. Поэтому возможны различные пополнения $X \otimes Y$. В настоящей работе нам потребуется только так называемая *проективная кросс-норма*

$$\pi(v) = \|v\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \|e_k\| \cdot \|x_k\| : v = \sum_{k=1}^n e_k \otimes x_k \right\},$$

где инфимум берется по всевозможным представлениям

$$v = \sum_{k=1}^n e_k \otimes x_k.$$

Теорема 4.1 (см. [33, гл. 1], [39, гл. 4, § 6], [36, теорема 1.7.4 (с)]). Пусть $\mathbf{B}$ — банахово пространство, а T — локально компактное топологическое пространство с положительной мерой. Тогда

$$\mathbf{B} \overline{\otimes}_\pi L_1(T, \mathbb{C}) \simeq L_1(T, \mathbf{B}).$$

Этот изоморфизм является естественным (в том смысле, что элементу $a \otimes f$ соответствует функция $t \mapsto af(t)$) и изометрическим.

В соответствии с этой теоремой символом $a \otimes f$ будем обозначать не только элемент тензорного произведения, но и соответствующую ему функцию $t \mapsto af(t)$.

Следствие 4.2. Для любого банахова пространства $\mathbf{B}$ имеет место канонический изоморфизм $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}) \simeq \mathbf{B} \overline{\otimes}_\pi l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Отметим, что в силу нашего соглашения символ $b = a_k \otimes \varepsilon^k$ означает как элемент тензорного произведения, так и семейство из $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$, состоящее из элементов

$$b_m = \begin{cases} a_k, & \text{при } m = k, \\ 0, & \text{при } m \neq k, \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 4.3. Всякий элемент $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}) \simeq \mathbf{B} \overline{\otimes}_\pi l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ представим в виде абсолютно сходящегося ряда

$$a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \otimes \varepsilon^k, \quad (4)$$

где $a_k \in \mathbf{B}$ — элементы семейства a .

Доказательство. Возьмем $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$. По определению a имеет вид

$$a = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots),$$

где $a_k \in \mathbf{B}$. При этом

$$\|a\|_{l_{1,g}} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(m) \|a_m\|. \quad (5)$$

Проверим, что ряд (4) абсолютно сходится. Действительно, имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k \otimes \varepsilon^k\| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| \|\varepsilon^k\| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|a_k\| g(k) = \|a\|_{l_{1,g}}.$$

Рассмотрим остаток ряда (4):

$$a - \sum_{k \in [-n, n]} a_k \otimes \varepsilon^k = (\dots, a_{-n-1}, 0, \dots, 0, a_{n+1}, \dots).$$

Применяя (5), приходим к равенству

$$\left\| a - \sum_{k \in [-n, n]} a_k \otimes \varepsilon^k \right\| = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus [-n, n]} g(k) \|a_k\|.$$

Поскольку ряд (5) при любом порядке суммирования сходится, его остаток (при любом порядке суммирования) стремится к нулю. Значит, суммой ряда (4) является элемент a . $\square$

Пусть X , X_1 , Y и Y_1 — линейные пространства, а $A : X \rightarrow X_1$ и $B : Y \rightarrow Y_1$ — линейные операторы. Символом $A \otimes B$ обозначают линейный оператор, действующий из $X \otimes Y$ в $X_1 \otimes Y_1$ и определенный по правилу

$$(A \otimes B) \left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k \right) = \sum_{k=1}^n (Ax_k) \otimes (By_k).$$

Нетрудно показать, что это определение корректно в том смысле, что оно согласуется с отождествлениями (3).

Предположим дополнительно, что пространства X , X_1 , Y и Y_1 являются банаховыми, а операторы A и B — ограниченными. Введем на $X \otimes Y$ и $X_1 \otimes Y_1$ кросс-норму π . Нетрудно показать, что

$$\|A \otimes B\|_{X \otimes_\pi Y \rightarrow X_1 \otimes_\pi Y_1} \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Поэтому оператор $A \otimes B$ расширяется по непрерывности до оператора

$$A \otimes B : X \overline{\otimes}_\pi Y \rightarrow X_1 \overline{\otimes}_\pi Y_1,$$

который будем обозначать тем же символом $A \otimes B$.

Например, в приводимой ниже теореме 4.4

$$\mathbf{1}_B \otimes \chi : B \overline{\otimes}_\pi M \rightarrow B \overline{\otimes}_\pi \mathbb{C} \simeq B \otimes_\pi \mathbb{C} \simeq B.$$

Теорема 4.4 (см. [21], [36, гл. 1, § 1.7, теорема 1.7.10]). Пусть B — унитарная банахова алгебра, M — коммутативная унитарная банахова алгебра, а $X = X(M)$ — пространство характеров алгебры M . В этих условиях элемент $T \in B \overline{\otimes}_\pi M$ обратим слева (справа) в алгебре $B \overline{\otimes}_\pi M$ тогда и только тогда, когда элемент

$$(\mathbf{1}_B \otimes \chi)(T)$$

обратим слева (справа) в алгебре $B \simeq B \otimes \mathbb{C}$ для всех $\chi \in X(M)$.

Предложение 4.5. Пусть $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, B)$ имеет вид $a = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$, где $a_i \in B$, $i \in \mathbb{Z}$, а характер χ алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ задается формулой (2). Тогда

$$(\mathbf{1}_B \otimes \chi)(a) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k a_k.$$

Доказательство. В силу предложения 4.3 представим элемент a в виде (4). В силу определения тензорного произведения операторов и соображений непрерывности имеем

$$(\mathbf{1}_B \otimes \chi) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \otimes \varepsilon^k \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbf{1}_B a_k) \otimes \chi(\varepsilon^k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \otimes u^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k a_k. \quad \square$$

Теорема 4.6. Пусть B — унитарная банахова алгебра. Элемент $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, B)$ обратим тогда и только тогда, когда элемент

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k a_k$$

обратим в алгебре B для всех $u \in \mathbb{U}$.

Доказательство вытекает из теоремы 4.4 и предложения 4.5. □

Следствие 4.7. Подалгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z}, B)$ наполнена в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, B)$.

Доказательство. В силу теоремы 4.6 обратимость $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, B)$ в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, B)$ и $l_1(\mathbb{Z}, B)$ означает одно и то же. □

Следствие 4.8 (см. ср. [36, теорема 4.5.7]). Пусть B — унитарная банахова алгебра. Тогда спектр любого элемента $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, B)$ можно вычислить по формуле

$$\sigma(a) = \bigcup \left\{ \sigma \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k a_k \right) : |u| = 1 \right\}.$$

5. Сверточные операторы. Пусть X — банахово пространство и $l_p = l_p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leq p < \infty$, — банахово пространство, состоящее из всех семейств $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1 \dots)$, элементами которых являются векторы $x_k \in X$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|x_k\|^p < \infty,$$

с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|x_k\|^p \right)^{1/p}.$$

Через $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ обозначим банахово пространство, состоящее из всех ограниченных семейств $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1 \dots)$, элементами которых являются векторы $x_k \in X$, с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{l_\infty} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|x_k\|.$$

Рассмотрим алгебру (предложение 3.1) $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$, где $\mathbf{B}(X)$ — алгебра всех операторов, действующих в банаховом пространстве X . Для каждого семейства $a \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ рассмотрим оператор свертки $T_a \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$, определяемый по формуле

$$(T_a x)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Множество всех таких операторов обозначим через $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$.

Для каждого $m \in \mathbb{Z}$ введем в рассмотрение оператор сдвига

$$(S_m x)_k = x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, он действует из $l_p(\mathbb{Z}, X)$ в себя при всех $1 \leq p \leq \infty$ и имеет единичную норму.

Предложение 5.1. Для любого $a \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ во всех пространствах $l_p = l_p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, оператор (6) допускает представление в виде абсолютно сходящегося ряда

$$T_a = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m S_m,$$

где

$$(A_m x)_k = a_m x_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

— оператор умножения на $a_m \in \mathbf{B}(X)$. При этом для любого $a \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ справедливо неравенство

$$\|T_a\|_{\mathbf{B}(l_p)} \leq \|a\|_{l_1}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Предложение 5.2 (см. [36, гл. 4, § 4.4, теорема 4.4.4]). При любом $1 \leq p \leq \infty$ отображение $a \mapsto T_a$ из $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ в $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$ является непрерывным морфизмом унитарных алгебр. В частности, для любых $a, b \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ имеем

$$T_a T_b = T_{a*b}.$$

Теорема 5.3 (см. [36, гл. 4, § 4.5, теорема 4.5.5 (g)]). Элемент $a \in l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ обратим в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ тогда и только тогда, когда оператор T_a обратим в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$ для некоторого (a , следовательно, и для всех) $1 \leq p \leq \infty$.

Следствие 5.4. Семейство $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ обратимо в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ тогда и только тогда, когда оператор T_a обратим в $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$.

Доказательство. Пусть семейство $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ — обратимо, $b \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ — обратное к нему. Тогда из предложения 5.2 следует, что $T_a T_b = T_{a*b} = \mathbf{1}$. Это означает, что $T_b = (T_a)^{-1}$; иными словами, T_b является обратным к T_a ; ср. с предложением 2.2.

Обратно. Пусть для некоторого $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ оператор T_a обратим в $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$. Покажем, что семейство a обратимо в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. По теореме 5.3 семейство a обратимо в $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. А по следствию 4.7 обратимость в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ эквивалентна обратимости в алгебре $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. Значит, $a^{-1} \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. $\square$

Пусть $\mathbf{B}$ — унитарная банахова алгебра, а $\mathbf{R}$ — ее подалгебра, являющаяся банаховой относительно своей нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{R}}$, причем существует такая константа C , что $\|R\|_{\mathbf{B}} \leq C\|R\|_{\mathbf{R}}$ для всех $R \in \mathbf{R}$. Тогда, очевидно, $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$ является подалгеброй алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$. Если $\mathbf{R}$ не содержит единицу алгебры $\mathbf{B}$, обозначим через $\tilde{\mathbf{R}}$ подалгебру $\mathbf{R}$ с присоединенной единицей, реализованную как подалгебра алгебры $\mathbf{B}$, а через $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \tilde{\mathbf{R}})$ соответствующую подалгебру алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$; если $\mathbf{R}$ содержит единицу алгебры $\mathbf{B}$, обозначим через $\tilde{\mathbf{R}}$ и $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \tilde{\mathbf{R}})$ сами подалгебры $\mathbf{R}$ и $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$ соответственно.

Теорема 5.5. *Пусть подалгебра $\tilde{\mathbf{R}}$ наполнена в алгебре $\mathbf{B}$. Тогда подалгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \tilde{\mathbf{R}})$ наполнена в алгебре $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$.*

Доказательство. Предположим, что элемент $\lambda \mathbf{1}_{l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})} + a$, где $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{R})$, обратим в алгебре $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$. Согласно теореме 4.4 отсюда следует, что для любого характера χ алгебры $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ элемент $(\mathbf{1} \otimes \chi)(\lambda \mathbf{1} + a)$ обратим в алгебре $\mathbf{B}$. Представим a в виде семейства

$$a = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots).$$

В силу предложения 4.5

$$(\mathbf{1} \otimes \chi)(\lambda \mathbf{1}_{l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})} + a) = \lambda \mathbf{1}_{\mathbf{B}} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k u^k \in \tilde{\mathbf{R}}, \quad (7)$$

где u соответствует характеру χ в соответствии с теоремой 3.4. Но в силу наполненности подалгебры $\tilde{\mathbf{R}}$ из обратимости элемента (7) в алгебре $\mathbf{B}$ вытекает его обратимость в алгебре $\tilde{\mathbf{R}}$, которая, в свою очередь, в силу теоремы 4.4 означает обратимость $\lambda \mathbf{1}_{l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B})} + a$ в алгебре $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \tilde{\mathbf{R}})$. $\square$

Пусть H — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство. Оператор $A \in \mathbf{B}(H)$ называют [14, гл. 7, § 7, с. 170–174], [40], [13, гл. 2, § 2.4, с. 81] *оператором Гильберта—Шмидта*, если для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\} \in H$

$$\|A\|_{\mathfrak{S}_2} = \sqrt{\sum_i \|Ae_i\|^2} < \infty.$$

Множество всех операторов Гильберта—Шмидта $A \in \mathbf{B}(H)$ обозначим символом $\mathfrak{S}_2(H)$.

Предложение 5.6 (см. [14, гл. 7, § 8, с. 170, лемма 1]). *Величина $\|A\|_{\mathfrak{S}_2}$ не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{e_i\}$.*

Предложение 5.7 (см. [14, гл. 7, § 8, с. 174, теорема 2]). *Множество $\mathfrak{S}_2(H)$ является идеалом в $\mathbf{B}(H)$. При этом*

$$\|JA\|_{\mathfrak{S}_2}, \|AJ\|_{\mathfrak{S}_2} \leq \|J\|_{\mathfrak{S}_2} \|A\|_{\mathbf{B}(H)}, \quad J \in \mathfrak{S}(H), \quad A \in \mathbf{B}(H).$$

Поскольку H бесконечномерно, $\mathfrak{S}_2(H)$ не содержит единицу. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{S}_2(H)}$ подалгебру $\mathfrak{S}_2(H)$ алгебры $\mathbf{B}(H)$, к которой присоединена единица алгебры $\mathbf{B}(H)$. Обозначим через $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ множество всех операторов вида (6) с $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$, а через $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ множество всех операторов вида (6) с $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$. В силу предложения 3.1 множество $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ является банаховой алгеброй. Поскольку соответствие $a \mapsto T_a$ является морфизмом алгебр (предложение 5.2), $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ является унитарной подалгеброй алгебры $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H))$ при всех $1 \leq p \leq \infty$.

Теорема 5.8. *Подалгебра $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ наполнена в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H))$ при всех $1 \leq p \leq \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку морфизмов унитарных алгебр:

$$l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)}) \rightarrow l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H)) \rightarrow l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H)) \rightarrow \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H)).$$

Первый морфизм является вложением. В силу теоремы 5.5 он сохраняет обратимость: для любого $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ из обратимости a в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))$ вытекает его обратимость в $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$.

Второй морфизм также является вложением. Он корректно определен в силу условия (d) из определения веса. А в силу следствия 4.7 он также сохраняет обратимость.

Наконец, последнее отображение является морфизмом в силу предложения 5.2. Оно сохраняет обратимость в силу теоремы 5.3.

Сохранение обратимости композицией рассматриваемых морфизмов означает, что для любого $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ из обратимости соответствующего оператора T_a в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H))$ вытекает обратимость элемента a в алгебре $l_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$ и, следовательно, принадлежность T_a^{-1} алгебре $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$. $\square$

Предложение 5.9. *Подалгебра $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ является идеалом в алгебре $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))$.*

Доказательство. Пусть $a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$, а $b \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))$. Покажем, что $a * b \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$. Вначале проверим, что величина

$$\|a * b\|_{l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^c} g(k) \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} a_m b_{k-m} \right\|_{\mathfrak{S}_2(H)}$$

конечна. Согласно предположению

$$\begin{aligned} \|a\|_{l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} g(m) \|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)} < \infty, \\ \|b\|_{l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^c} g(n) \|b_n\|_{\mathbf{B}(H)} < \infty. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\infty > \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} g(m) \|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^c} g(n) \|b_n\|_{\mathbf{B}(H)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} \sum_{n \in \mathbb{Z}^c} g(m) g(n) \|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)} \|b_n\|_{\mathbf{B}(H)}.$$

Сделаем в суммировании по n замену $n = k - m$:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^c} \sum_{n \in \mathbb{Z}^c} g(m) g(n) \|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)} \|b_n\|_{\mathbf{B}(H)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} \sum_{k \in \mathbb{Z}^c} g(m) g(k - m) \|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)} \|b_{k-m}\|_{\mathbf{B}(H)}.$$

По свойству (b) веса и в силу предложения 5.7 имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^c} \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} g(m) g(k - m) \|a_m\|_{\mathfrak{S}_2(H)} \|b_{k-m}\|_{\mathbf{B}(H)} \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}^c} \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} g(k) \|a_m b_{k-m}\|_{\mathfrak{S}_2(H)}.$$

Так как $g(k)$ не зависит от m , вынесем его из под внутреннего знака суммы:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^c} \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} g(k) \|a_m b_{k-m}\|_{\mathfrak{S}_2(H)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^c} g(k) \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} \|a_m b_{k-m}\|_{\mathfrak{S}_2(H)}.$$

Используя неравенство треугольника, имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^c} g(k) \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} \|a_m b_{k-m}\|_{\mathfrak{S}_2(H)} \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}^c} g(k) \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} a_m b_{k-m} \right\|_{\mathfrak{S}_2(H)}.$$

Последнее выражение и есть $\|a * b\|_{l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))}$. Следовательно, $\|a * b\|_{l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))} < \infty$. Аналогично проверяется, что $b * a \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$. $\square$

Обозначим через $\mathbf{SA}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$ множество всех операторов, действующих в $L_2 = L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, вида

$$(Tx)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, s)x(s)ds,$$

где $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 ds dt < \infty, \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad (8)$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} g(m) \sup_{k+l=m} \sqrt{\int_k^{k+1} \int_l^{l+1} |k(t, s)|^2 ds dt} < \infty, \quad (9)$$

$$k(t+1, s+1) = k(t, s). \quad (10)$$

Теорема 5.10. Пусть оператор $\mathbf{1} + T : L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, где $T \in \mathbf{SA}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$, обратим. Тогда обратный оператор $(\mathbf{1} + T)^{-1}$ имеет вид $\mathbf{1} + T_1$, где $T_1 \in \mathbf{SA}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$.

Доказательство. Представим пространство $L_2 = L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ в виде $l_2(\mathbb{Z}, L_2[0, 1])$. Для этого разобьем область определения $\mathbb{R}$ функций $x \in L_2$ на промежутки $[k, k+1)$. Каждой функции $x \in L_2$ сопоставим последовательность функций $x_k(t) = x(k+t)$, $t \in [0, 1)$; очевидно $x_k \in L_2[0, 1)$, а соответствие $x \mapsto \{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ является изометрическим изоморфизмом из $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ в $l_2(\mathbb{Z}, L_2[0, 1))$ (подробнее см. [28], [36, 1.6.3]). Покажем, что класс операторов $T \in \mathbf{B}(L_2)$, соответствующих в силу этого изоморфизма классу $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(L_2[0, 1)))$, совпадает с $\mathbf{SA}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$.

В соответствии с описанным изоморфизмом будем задавать операторы $T \in \mathbf{B}(L_2)$ матрицами. Очевидно, условие (8) равносильно принадлежности блоков b_{km} матрицы оператора T идеалу $\mathfrak{S}_2(L_2[0, 1))$, условие (9) означает принадлежность матрицы $\{b_{km}\}$ оператора T классу $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(L_2[0, 1)))$, а условие (10) эквивалентно тому, что в матричном представлении оператор T является сверточным.

Обозначим пространство $L_2[0, 1)$ сокращенно через H . Обозначим через $T_a \in \mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ оператор вида (6), соответствующий оператору T . Очевидно, алгебра $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$. Более того, в силу предложения 5.9 $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ является идеалом в $\mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)})$.

Рассмотрим фактор-морфизм алгебр

$$\varphi : \mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)}) \rightarrow \mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)}) / \mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H)).$$

По определению фактор-морфизма $\varphi(\mathbf{1} + T_a) = \mathbf{1}$. В силу теоремы 5.8

$$(\mathbf{1} + T_a)^{-1} \in \mathbf{sa}_{1,g}(\mathbb{Z}, \widetilde{\mathfrak{S}_2(H)}).$$

Следовательно, $\varphi((\mathbf{1} + T_a)^{-1})$ определено и

$$\varphi((\mathbf{1} + T_a)^{-1}) = (\varphi(\mathbf{1} + T_a))^{-1} = (\mathbf{1})^{-1} = \mathbf{1}.$$

Отсюда $(\mathbf{1} + T_a)^{-1} = \mathbf{1} + T_b$, где $T_b \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$. □

6. Операторы, мажорируемые сверткой. Пусть X — банахово пространство. Обозначим через $\mathbf{s}_{1,g} = \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ множество всех операторов $T \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$, $1 \leq p \leq \infty$, имеющих вид

$$(Tx)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_{km} x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

где коэффициенты $b_{km} \in \mathbf{B}(X)$ удовлетворяют оценке $\|b_{km}\| \leq \beta_m$ для некоторого $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Напомним, что для каждого $m \in \mathbb{Z}$ мы рассматриваем оператор сдвига

$$(S_m x)_k = x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Он действует из $l_p(\mathbb{Z}, X)$ в себя при всех $1 \leq p \leq \infty$ и имеет единичную норму.

Пусть $a \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$, т. е. $a = \{a_k \in \mathbf{B}(X) : k \in \mathbb{Z}\}$, причем

$$\|a\| = \|a\|_{l_\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|a_k\|_{\mathbf{B}(X)} < \infty.$$

Сопоставим этому семейству a оператор умножения

$$(Ax)_k = a_k x_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

рассматриваемый как действующий из $l_p(\mathbb{Z}, X)$ в себя. Очевидно,

$$\|A\|_{\mathbf{B}(l_p)} = \|a\|_\infty.$$

Представим оператор (11) в виде

$$T = \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_m S_m,$$

где B_m — операторы умножения

$$(B_m x)_k = b_{km} x_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно,

$$\|B_m S_m\| \leq \beta_m.$$

Предложение 6.1. Для всех $1 \leq p \leq \infty$

$$\|T\|_{\mathbf{B}(l_p)} \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m.$$

Предложение 6.2. Подмножество $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ образует унитарную подалгебру алгебры $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$.

Доказательство. Доказательство очевидно. □

Теорема 6.3 (см. [12], [11, теорема 2.2.7], [36, гл. 5, § 5.2, теорема 5.2.6]). При всех $1 \leq p \leq \infty$ подалгебра $\mathbf{s}_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ наполнена в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$.

Теорема 6.4 (см. [1–3]). При всех $1 \leq p \leq \infty$ подалгебра $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ наполнена в алгебре $\mathbf{s}_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$.

Доказательство. Предположим, что оператор $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$ обратим в $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$. Покажем, что $T^{-1} \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$.

Обозначим оператор T^{-1} сокращенно через D . В силу теоремы 6.3 имеем $D \in \mathbf{s}_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. Поэтому D можно представить в виде

$$D = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m S_m,$$

где $A_m \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$ — некоторые операторы умножения $(A_m x)_k = a_{km} x_k$, удовлетворяющие условию $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \|A_m\| < \infty$. Отметим, что равенства $TD = \mathbf{1}$ и $DT = \mathbf{1}$ равносильны тому, что

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_m S_m A_{k-m} S_{k-m} &= \begin{cases} \mathbf{1}_{\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))}, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0, \end{cases} \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m S_m B_{k-m} S_{k-m} &= \begin{cases} \mathbf{1}_{\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))}, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим семейства

$$\mathfrak{t} = \{B_m S_m \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)) : m \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathfrak{d} = \{A_m S_m \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)) : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Будем интерпретировать их как элементы банаховой алгебры $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))$. Более того, по предположению $\mathfrak{t} \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))$.

В силу определения умножения в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))$ и в соответствии с (12) имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}\mathfrak{d} &= \left\{ \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_m S_m A_{k-m} S_{k-m} \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)) : k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbf{1}_{l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))}, \\ \mathfrak{d}\mathfrak{t} &= \left\{ \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m S_m B_{k-m} S_{k-m} \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)) : k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbf{1}_{l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))}. \end{aligned}$$

Таким образом, семейство $\mathfrak{d}$ является обратным к $\mathfrak{t}$ в алгебре $l_1(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))$. Поэтому в силу следствия 4.7 $\mathfrak{d} \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X)))$. Но это означает, что $T^{-1} \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(X))$. $\square$

Пусть H — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство. Обозначим через $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ множество всех операторов $T \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$ вида

$$(Tx)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_{km} x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $b_{km} \in \mathfrak{S}_2(H)$, причем

$$\|b_{km}\|_{\mathfrak{S}_2} \leq \beta_m$$

для некоторого $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ подалгебру $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$, к которой присоединена единица алгебры $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H))$.

Теорема 6.5. *Подалгебра $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ является наполненной в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, H))$ для всех $1 \leq p \leq \infty$.*

Доказательство. Покажем, что подалгебра $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$ наполнена в алгебре $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))$.

Пусть элемент $\lambda \mathbf{1} + T$, где $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$, обратим в $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))$. В силу предложения 5.9 существует фактор-морфизм алгебр $\varphi : \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H)) \rightarrow \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H)) / \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$. По определению морфизма φ имеем $\varphi(\lambda \mathbf{1} + T) = \lambda \mathbf{1}$. В силу предложения 2.2, поскольку элемент $\lambda \mathbf{1} + T$ обратим, элемент $\lambda \mathbf{1}$ также обратим. В частности, $\lambda \neq 0$. Следовательно,

$$\varphi((\lambda \mathbf{1} + T)^{-1}) = (\varphi(\lambda \mathbf{1} + T))^{-1} = (\lambda \mathbf{1})^{-1} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{1}.$$

Отсюда $(\lambda \mathbf{1} + T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{1} + T_1$, где $T_1 \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$. Это означает, что $(\lambda \mathbf{1} + T)^{-1} \in \widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(H))$.

Для завершения доказательства остается напомнить, что подалгебра $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathbf{B}(H))$ наполнена в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}, X))$ в силу теоремы 6.4. $\square$

Обозначим через $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$ множество всех операторов, действующих в $L_2 = L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, вида

$$(Tx)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t, s) x(s) ds,$$

где $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция, удовлетворяющая условиям (8) и (9) (без условия (10)).

Теорема 6.6. *Пусть оператор $\mathbf{1} + T : L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, где $T \in \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$, обратим. Тогда обратный оператор $(\mathbf{1} + T)^{-1}$ имеет вид $\mathbf{1} + T_1$, где $T_1 \in \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 5.10, представим пространство $L_2 = L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ в виде $l_2(\mathbb{Z}, L_2[0, 1))$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 5.10, видим, что класс операторов $T \in \mathbf{B}(L_2)$, соответствующих в силу этого изоморфизма классу $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}, \mathfrak{S}_2(L_2[0, 1)))$, совпадает с $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}, \mathfrak{S}_2)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Функц. анализ. прилож. — 1990. — 24, № 3. — С. 64–65.
2. Баскаков А. Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. ж. — 1997. — 38, № 1. — С. 14–28.
3. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Совр. мат. Фундам. напр. — 2004. — 9. — С. 3–151.

4. Блатов И. А. Алгебра обобщенной дискретной свертки операторов с осциллирующими коэффициентами. — Деп. в ВИНТИ АН СССР, № 5852-B90.
5. Блатов И. А. Об оценках элементов обратных матриц и модернизации метода матричной прогонки// Сиб. мат. ж. — 1992. — 32, № 2. — С. 10–21.
6. Блатов И. А. О методах неполной факторизации для систем с разреженными матрицами// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1993. — 33, № 6. — С. 819–836.
7. Бурбаки Н. Алгебра I. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. — М.: ГИФМЛ, 1962.
8. Бурбаки Н. Спектральная теория. — М.: Мир, 1972.
9. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. — М.: ГИФМЛ, 1960.
10. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
11. Курбатов В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990.
12. Курбатов В. Г. Об алгебрах разностных и интегральных операторов// Функц. анализ. прилож. — 1990. — 24, № 2. — С. 87–88.
13. Мерфи Дж. C^* -алгебры и теория операторов. — М.: Факториал, 1997.
14. Морен К. Методы гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965.
15. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
16. Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. — М.: Наука, 1989.
17. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦНМО, 2004.
18. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
19. Beltiță I., Beltiță D. Erratum to: Inverse-closed algebras of integral operators on locally compact groups// Ann. H. Poincaré. — 2015. — 16, № 5. — P. 1307–1309.
20. Beltiță I., Beltiță D. Inverse-closed algebras of integral operators on locally compact groups// Ann. H. Poincaré. — 2015. — 16, № 5. — P. 1283–1306.
21. Bochner S., Phillips R. S. Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings// Ann. Math. (2). — 1942. — 43. — P. 409–418.
22. Defant A., Floret K. Tensor Norms and Operator Ideals. — Amsterdam–London–New York: North-Holland, 1993.
23. Demko S. Inverses of band matrices and local convergence of spline projections// SIAM J. Numer. Anal. — 1977. — 14, № 4. — P. 616–619.
24. Demko S. Spectral bounds for $\|A^{-1}\|_\infty$ // J. Approx. Theory — 1986. — 48, № 2. — P. 207–212.
25. Demko S., Moss W. F., Smith Ph. W. Decay rates for inverses of band matrices// Math. Comp. — 1984. — 43, № 168. — P. 491–499.
26. Farrell B., Strohmer Th. Inverse-closedness of a Banach algebra of integral operators on the Heisenberg group// J. Oper. Theory. — 2010. — 64, № 1. — P. 189–205.
27. Fendler G., Gröchenig K., Leinert M. Convolution-dominated operators on discrete groups// Integral Equations Operator Theory. — 2008. — 61, № 4. — P. 493–509.
28. Fournier J. J. F., Stewart J. Amalgams of L^p and l^q // Bull. Am. Math. Soc. (N.S.). — 1985. — 13, № 1. — P. 1–21.
29. Gohberg I., Kaashoek M. A., Woerdeman H. J. The band method for positive and strictly contractive extension problems: an alternative version and new applications// Integral Equations Operator Theory. — 1989. — 12, № 3. — P. 343–382.
30. Gröchenig K. Wiener’s lemma: theme and variations. An introduction to spectral invariance// in: Four Short Courses on Harmonic Analysis: Wavelets, Frames, Time-Frequency Methods, and Applications to Signal and Image Analysis. — Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2010. — P. 175–244.
31. Gröchenig K., Klotz A. Noncommutative approximation: inverse-closed subalgebras and off-diagonal decay of matrices// Constr. Approx. — 2010. — 32, № 3. — P. 429–466.
32. Gröchenig K., Leinert M. Symmetry and inverse-closedness of matrix algebras and functional calculus for infinite matrices// Trans. Am. Math. Soc. — 2006. — 358, № 6. — P. 2695–2711.
33. Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1966.

34. *Guseva E. Yu., Kurbatov V. G.* Inverse-closedness of subalgebras of integral operators with almost periodic kernels/ [arXiv: 1810.02682 \[math.FA\]](#) .
35. *Jaffard S.* Propriétés des matrices “bien localisées” près de leur diagonale et quelques applications// Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire. — 1990. — 7, № 5. — P. 461–476.
36. *Kurbatov V. G.* Functional differential operators and equations. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
37. *Kurbatov V. G.* Some algebras of operators majorized by a convolution// Funct. Differ. Equations. — 2001. — 8, № 1. — P. 323–333.
38. *Kurbatov V. G., Kuznetsova V. I.* Inverse-closedness of the set of integral operators with L_1 -continuously varying kernels// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — 436, № 1. — P. 322–338.
39. *Schatten R.* A Theory of Cross-Spaces. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1950.
40. *Schatten R. A.* Norm Ideals of Completely Continuous Operators. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1970.
41. *Sjöstrand J.* Wiener-Type Algebras of Pseudodifferential Operators. — Palaiseau: École Polytech., 1994–1995.

Гусева Елена Юрьевна

Воронежский государственный университет

E-mail: elena.guseva.01.06@gmail.com