Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Ежак, М. Ю. Тельнова, О первом собственном значении задачи Штурма—Лиувилля с весовым интегральным условием на потенциал, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 87–98

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-87-98>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:26:50

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 87–98
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-87-98

УДК 517.5

О ПЕРВОМ СОБСТВЕННОМ ЗНАЧЕНИИ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ПОТЕНЦИАЛ

© 2021 г. С. С. ЕЖАК, М. Ю. ТЕЛЬНОВА

Аннотация. В статье рассматривается задача Штурма—Лиувилля на отрезке $[0, 1]$ с краевыми условиями Дирихле и весовым интегральным условием на потенциал, разрешающим потенциалу иметь разные порядки особенностей на концах отрезка $[0, 1]$. Устанавливается, какому дополнительному интегральному условию должен удовлетворять потенциал для того, чтобы первое собственное значение задачи существовало, и при тех значениях параметров весового интегрального условия, при которых существуют потенциалы, удовлетворяющие одновременно двум интегральным условиям, изучаются оценки первого собственного значения задачи.

Ключевые слова: задача Штурма—Лиувилля, экстремальная оценка, первое собственное значение, вариационный принцип, минимизация функционала, спектральная задача, краевая задача, условия Дирихле, весовое интегральное условие.

ON THE FIRST EIGENVALUE OF THE STURM—LIOUVILLE PROBLEM WITH A WEIGHTED INTEGRAL CONDITION ON THE POTENTIAL

© 2021 S. S. EZHAK, M. YU. TEL'NOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider the Sturm—Liouville problem on the segment $[0, 1]$ with the Dirichlet boundary conditions and a weighted integral condition on the potential, which allows the potential to have different orders of singularities at the endpoints of the segment $[0, 1]$. We obtain an additional integral condition for the potential under which the first eigenvalue of the problem exists. For values of the parameters of the weighted integral condition that provide the existence of potentials satisfying both integral conditions, we examine estimates of the first eigenvalue of the problem.

Keywords and phrases: Sturm—Liouville problem, extremal estimate, first eigenvalue, variational principle, minimization of a functional, spectral problem, boundary-value problem, Dirichlet conditions, weighted integral condition.

AMS Subject Classification: 34L15

1. Введение. Данная работа является продолжением исследований оценок первого собственного значения задач Штурма—Лиувилля с интегральным условием на потенциал, начало которым было положено Ю. В. Егоровым и В. А. Кондратьевым в [3, 12]. Исследования, посвященные задаче Штурма—Лиувилля с интегральным условием на потенциал, можно найти, например, в [1–7, 12–17].

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля

$$y'' + Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ измеримых неотрицательных локально интегрируемых на $(0, 1)$ функций, удовлетворяющих интегральным условиям

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x) dx = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0, \quad (3)$$

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < +\infty. \quad (4)$$

Функция y называется *решением задачи* (1), (2), если она абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, удовлетворяет условиям (2), ее производная y' абсолютно непрерывна на любом отрезке $[\rho, 1-\rho]$, где $0 < \rho < 1/2$, и равенство (1) выполняется почти всюду в интервале $(0, 1)$.

В данной работе доказывается, что если не выполняется условие (4), то не существует решения y уравнения (1), обладающего свойствами $y(0) = 0$, $y'(0) = \beta$ ни для какого $0 \leq \beta \leq +\infty$. Условие (4) не выполняется при $\gamma < 0$, $\alpha \leq 2\gamma - 1$ или $\beta \leq 2\gamma - 1$. Таким образом, при данных значениях параметров интегрального условия (3) первое собственное значение задачи (1), (2) не существует. При других значениях параметров α, β, γ , $\gamma \neq 0$, существуют функции Q , удовлетворяющие условиям (3), (4). Выполнения условия (4) достаточно для того, чтобы функционал

$$R[Q, y] = \left(\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Q(x)y^2 dx \right) / \left(\int_0^1 y^2 dx \right),$$

порожденный задачей (1), (2), был ограничен снизу. В работе доказано, что для любой функции $Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ первое собственное значение задачи (1), (2) есть

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} R[Q, y].$$

Изучаются оценки величин

$$m_{\alpha, \beta, \gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}} \lambda_1(Q), \quad M_{\alpha, \beta, \gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}} \lambda_1(Q).$$

2. Основные результаты. К. З. Куралбаева (см. [6]), рассматривая, в частности, задачу Штурма—Лиувилля

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \quad x \in (0, 1),$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ измеримых неотрицательных на $(0, 1)$ функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < \infty, \quad \int_0^1 x^\alpha Q^\gamma(x)dx = 1, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0,$$

показала (см. [6, гл. 1, § 2, теорема 3]), что при $\gamma < 0$, $\alpha \leq 2\gamma - 1$ множество $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ пусто, в остальных же случаях оно непусто. Следующая теорема 1 является вспомогательной для того чтобы показать, что при $\gamma < 0$, $\alpha \leq 2\gamma - 1$, $-\infty < \beta < +\infty$ или $\gamma < 0$, $\beta \leq 2\gamma - 1$, $-\infty < \alpha < +\infty$,

а именно при тех значениях параметров интегрального условия, при которых множество $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ пусто, минимальное собственное значение задачи (1)–(4) не существует.

Теорема 1. Для произвольного действительного числа λ рассмотрим уравнение (1), где Q — такая измеримая, неотрицательная, локально интегрируемая на $(0, 1)$ функция, что

$$\int_0^1 xQ(x)dx = +\infty.$$

Тогда не существует такой функции y , решения уравнения (1), что $y(0) = 0$, $y'(0) = p$ ни для какого $0 \leq p \leq +\infty$.

Для доказательства теоремы воспользуемся замечанием 2.1 к теореме 2 из [6, гл. 1, § 1].

Замечание 1. Пусть существует функция y — решение уравнения $y'' + Q(x)y = 0$, где функция Q измерима, неотрицательна, суммируема на любом отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ для любого $0 < \varepsilon < 1/2$. Пусть решение y определено на $[0, \delta]$, $0 < \delta \leq 1$, и $y(0) = 0$, $y'(0) = p$, $p > 0$. Тогда выполнено условие

$$\int_0^1 xQ(x)dx < +\infty.$$

Доказательство. Предположим сначала, что существует такая функция y , решение уравнения (1), что $y(0) = 0$, $y'(0) = p$ для некоторого $p > 0$. Тогда в некоторой правой δ -полуокрестности нуля $y(x) > px/2$. Имеем

$$y'(\delta) = p + \int_0^\delta -(Q(x) + \lambda)y dx.$$

Тогда $\int_0^\delta -(Q(x) + \lambda)y dx = y'(\delta) - p < \infty$, $\int_0^\delta \lambda y dx < \infty$, и, следовательно, $\int_0^\delta Q(x)y dx < \infty$, но

$$\int_0^\delta Q(x)y dx > \frac{p}{2} \int_0^\delta Q(x)x dx = +\infty.$$

Таким образом, если при условии бесконечности интеграла $\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx$ существует первая собственная функция задачи (1), (2), то либо $y'(0) = +\infty$, либо $y'(0) = 0$.

Если $y'(0) = +\infty$, то существует некоторая правая δ -полуокрестность точки 0, в которой $y'' \leq 0$.

Тогда в этой окрестности $Q(x) + \lambda \geq 0$ и $\int_0^\delta xQ(x)dx < +\infty$ согласно замечанию 1, что противоречит условию.

Пусть теперь $y'(0) = 0$. Поскольку $y(0) = 0$ и функция y неотрицательна, в некоторой правой δ -полуокрестности точки 0 функция y может быть выпукла вниз и $y'' \geq 0$. Тогда в этой окрестности $Q(x) + \lambda \leq 0$, и из условия $0 \leq Q(x) \leq -\lambda$ следует, что функция Q ограничена на отрезке $[0, \delta]$, и опять

$$\int_0^\delta xQ(x)dx < +\infty.$$

При условиях $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$ возможно, что в некоторой правой δ -полуокрестности точки 0 вторая производная y'' меняет знак, причем не найдется интервала $(0, \delta_1)$, $\delta_1 < \delta$, во всех точках которого $y''(x) > 0$.

Проинтегрируем равенство (1) в пределах от 0 до δ . Получим равенство

$$-y'(\delta) - \int_0^\delta \lambda y dx = \int_0^\delta Q(x) y dx. \quad (5)$$

Если равенство (5) имеет место, то $-y'(\delta) - \int_0^\delta \lambda y dx$ есть некоторое положительное число M .

Если вторая производная y'' постоянно меняет знак, а y' существует на интервале $(0, 1)$, то найдутся точки в δ -полуокрестности точки 0, в которых функция y имеет минимум. Пронумеруем точки минимума, выбирая в качестве x_1 самую правую точку, меньшую δ , получим последовательность точек минимума, сходящуюся к нулю справа. Будем соединять отрезками соседние точки графика функции, в которых функция имеет минимум. На каждом отрезке Δ_i между соседними точками минимума x_{i+1} и x_i , $i \geq 1$, график функции располагается выше отрезка, соединяющего точки $(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$ и $(x_i, y(x_i))$, а также выше одной прямой, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$ или точки $(0, 0)$ и $(x_i, y(x_i))$. Уравнение данной прямой имеет вид $y = p_i x$, где $p_i = \min\{y(x_{i+1}), y(x_i)\}$.

По свойству интеграла Лебега [10, теорема 8], если $f(x)$ — суммируемая на множестве E функция, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любого множества $e \subset E$ из того, что его мера $\mu(e) < \delta$, следует, что

$$\left| \int_e f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Поскольку $\int_0^\delta Q(x) x dx = +\infty$, то существует такое положительное число $\varepsilon = M/p_*$, что для любого $\delta > 0$ существует такое множество $e \subset E$, что $\mu(e) < \delta$ и

$$\left| \int_e Q(x) x dx \right| \geq \varepsilon.$$

Таким образом, выбирая множество e принадлежащим одному из отрезков Δ_i и обозначая через p_* соответствующее p_i , получим

$$\int_0^\delta Q(x) y dx > \sum_{i=1}^\infty \int_{\Delta_i} Q(x) p_i x dx > p_* \int_e Q(x) x dx \geq M,$$

и равенство (5) не выполняется.

Получаемое всякий раз противоречие доказывает теорему. $\square$

Теорема 2. Для любых $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ и $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$, для любой функции $Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ имеем

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} R[Q, y],$$

где

$$R[Q, y] = \left(\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Q(x) y^2 dx \right) / \left(\int_0^1 y^2 dx \right).$$

Доказательство. Для произвольной функции $y \in H_0^1(0,1)$ в силу неравенства Гельдера для $x \in (0,1)$ имеем

$$y^2(x) = \left(\int_0^x y'(t) dt \right)^2 \leq x \int_0^x y'^2(t) dt, \quad y^2(x) = \left(- \int_x^1 y'(t) dt \right)^2 \leq (1-x) \int_x^1 y'^2(t) dt.$$

Тогда

$$\frac{y^2}{x(1-x)} = \frac{y^2}{x} + \frac{y^2}{1-x} \leq \int_0^x y'^2(t)dt + \int_x^1 y'^2(t)dt = \int_0^1 y'^2(t)dt, \quad y^2(x) \leq x(1-x) \int_0^1 y'^2(t)dt.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 Q(x)y^2dx \leq \left(\int_0^1 y'^2dx \right) \int_0^1 x(1-x)Q(x)dx$$

и

$$\begin{aligned} R[Q, y] &= \left(\int_0^1 y'^2dx - \int_0^1 Q(x)y^2dx \right) / \left(\int_0^1 y^2dx \right) \geq \\ &\geq \left(\int_0^1 y'^2dx \left(1 - \int_0^1 x(1-x)Q(x)dx \right) \right) / \left(\int_0^1 y^2dx \right). \end{aligned}$$

Поскольку $R[Q, y] = R[Q, |y|]$, мы можем считать, что функция y неотрицательна. Если функция $y \in H_0^1(0, 1)$ выпукла вниз на каком-то подотрезке отрезка $[0, 1]$, мы можем привести другую функцию y_1 , выпуклую вверх на $[0, 1]$, и, следовательно, положительную на $(0, 1)$, такую, что $R[Q, y_1] \leq R[Q, y]$. Для этого соединим отрезком точки графика функции y , самую левую и самую правую, между которыми функция выпукла вниз. Таким образом, при исследовании на ограниченность снизу функционала R мы можем рассматривать только функции, положительные и выпуклые вверх на $(0, 1)$. Пусть

$$\Gamma_* = \left\{ y \in H_0^1(0, 1) \mid \int_0^1 y^2dx = 1 \right\}, \quad I[Q, y] = \int_0^1 y'^2dx - \int_0^1 Q(x)y^2dx.$$

Поскольку для любого $y \in H_0^1(0, 1)$

$$R[Q, y] = R \left[Q, y / \left(\int_0^1 y^2dx \right)^{1/2} \right],$$

то

$$\inf_{y \in H_0^1(0, 1) \setminus \{0\}} R[Q, y] = \inf_{y \in \Gamma_*} I[Q, y].$$

Для любого $y \in H_0^1(0, 1)$ имеем

$$\int_0^1 y^2dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 y'^2dx.$$

Тогда для любого $y \in \Gamma_*$

$$\int_0^1 y'^2dx \geq 2.$$

Если функция $y \in \Gamma_*$ выпукла вверх, то

$$y(x) \geq \begin{cases} 2y(1/2) \cdot x, & x \in [0, 1/2], \\ 2y(1/2) \cdot (1-x), & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 2y(1/2) \cdot x, & x \in [0, 1/2], \\ 2y(1/2) \cdot (1-x), & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Поскольку y положительна на $(0, 1)$, мы можем написать соотношения

$$\int_0^1 Q(x)y^2 dx \leq \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x(1-x)} \int_0^1 Q(x)x(1-x) dx = \sup_{[0,1]} \frac{1}{\frac{x(1-x)}{y^2}} \int_0^1 Q(x)x(1-x) dx.$$

Далее,

$$\sup_{[0,1]} \frac{1}{\frac{x(1-x)}{y^2}} < \sup_{[0,1]} \frac{1}{\frac{x(1-x)}{y^2}} = \frac{1}{\inf_{[0,1]} \frac{x(1-x)}{y^2}}.$$

На отрезке $[0, 1/2]$

$$\inf_{[0,1/2]} \frac{x(1-x)}{\tilde{y}^2} = \inf_{[0,1/2]} \frac{x(1-x)}{4y^2(1/2)x^2} = \inf_{[0,1/2]} \frac{1-x}{4y^2(1/2)x} = \frac{1}{4y^2(1/2)}.$$

На отрезке $[1/2, 1]$

$$\inf_{[1/2,1]} \frac{x(1-x)}{\tilde{y}^2} = \inf_{[1/2,1]} \frac{x(1-x)}{4y^2(1/2)(1-x)^2} = \inf_{[1/2,1]} \frac{x}{4y^2(1/2)(1-x)} = \frac{1}{4y^2(1/2)}.$$

Тогда

$$\int_0^1 Q(x)y^2 dx \leq 4y^2 \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 Q(x)x(1-x) dx.$$

Функция y выпукла вверх, следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции y и осью Ox , больше, чем площадь треугольника с вершинами $(0, 0)$, $(1/2, y(1/2))$, $(1, 0)$. Следовательно,

$$1 = \left(\int_0^1 y^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq \int_0^1 y dx > \frac{1}{2} y \left(\frac{1}{2} \right), \quad y \left(\frac{1}{2} \right) < 2.$$

Тогда

$$4y^2 \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^1 Q(x)x(1-x) dx < 16 \int_0^1 Q(x)x(1-x) dx = \text{const},$$

$$\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Q(x)y^2 dx \geq \int_0^1 y'^2 dx - 4y^2 \left(\frac{1}{2} \right) \int_0^1 Q(x)x(1-x) dx > 2 - 16 \int_0^1 Q(x)x(1-x) dx.$$

Если интеграл

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x) dx$$

конечен, то функционал $I[Q, y]$ ограничен снизу в Γ_* и функционал $R[Q, y]$ ограничен снизу в $H_0^1(0, 1)$. Таким образом, при $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ и $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ при любой функции $Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ функционал $R[Q, y]$ ограничен снизу в $H_0^1(0, 1)$ и существует конечная величина

$$\inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} R[Q, y] = m.$$

Лемма 1. Для любых $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ и $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$, для любой функции $Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ существует такая положительная на $(0, 1)$ функция $u \in \Gamma_*$, что

$$R[Q, u] = \inf_{y \in \Gamma_*} I[Q, y].$$

Доказательство. Пусть $\{\tilde{g}_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала $R[Q, y]$ в $H_0^1(0, 1)$. Тогда последовательность $\{g_k\} = \{\tilde{g}_k/C_k^{1/2}\}$, является минимизирующей последовательностью для функционала $I[Q, y]$ в Γ_* , т.е.

$$I[Q, g_k] \rightarrow m \text{ при } k \rightarrow \infty;$$

здесь

$$C_k = \int_0^1 \tilde{g}_k^2 dx, -$$

Можем считать, что функция g_k неотрицательна. Если функция g_k выпукла вниз на некотором подотрезке отрезка $[0, 1]$, мы можем привести такую функцию y_k , выпуклую вверх на $[0, 1]$ и, следовательно, положительную на $(0, 1)$, что $I[Q, y_k] \leq I[Q, g_k]$. Таким образом, будем считать, что новая минимизирующая последовательность функционала $\{y_k\}$ состоит из положительных, выпуклых вверх на $(0, 1)$ функций.

Покажем, что последовательность $\{y_k\}$ ограничена в $H_0^1(0, 1)$. На основании рассуждений, приведенных при доказательстве ограниченности функционала $I[Q, y]$ в Γ_* , можно показать, что для любого k

$$\int_0^1 Q(x) y_k^2 \leq 16 \int_0^1 Q(x) x(1-x) dx.$$

Для любого достаточно большого k имеем

$$\int_0^1 y_k'^2 dx - \int_0^1 Q(x) y_k^2 dx < m + 1, \quad \int_0^1 y_k'^2 dx < m + 1 + 16 \int_0^1 Q(x) x(1-x) dx = \text{const}.$$

Поскольку при $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ и $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ последовательность $\{y_k\}$ ограничена в $H_0^1(0, 1)$, она содержит подпоследовательность $\{z_k\}$, которая слабо сходится в $H_0^1(0, 1)$ к некоторой функции u , причем квадрат нормы $\|u\|_{H_0^1(0,1)}^2$ ограничен сверху той же константой, что и $\|z_k\|_{H_0^1(0,1)}^2$.

Пространство $H_0^1(0, 1)$ компактно вкладывается в $C[0, 1]$, следовательно, существует подпоследовательность $\{s_k\}$ последовательности $\{y_k\}$, которая сходится в $C[0, 1]$. Поскольку $C[0, 1]$ вкладывается в $L_2(0, 1)$, последовательность $\{s_k\}$ сходится в $L_2(0, 1)$ к функции u . Следовательно, для функционала $R[Q, y]$ имеем

$$\int_0^1 s_k^2 dx \rightarrow \int_0^1 u^2 dx \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad \int_0^1 u^2 dx = 1. \quad (6)$$

Поскольку последовательность $\{s_k\}$ ограничена в $H_0^1(0, 1)$, по определению нормы $\|s_k\|_{H_0^1(0,1)}$ последовательность $\{s_k'\}$ ограничена в $L_2(0, 1)$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{w_k\}$ последовательности $\{s_k'\}$, что последовательность $\{w_k'\}$ слабо сходится к функции u' в $L_2(0, 1)$. Тогда (см. [8, с. 217])

$$\|u'\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|w_k'\|_{L_2(0,1)}^2 = A.$$

Таким образом,

$$\|u'\|_{L_2(0,1)}^2 \leq A. \quad (7)$$

Пусть $\{v_k\}$ — такая подпоследовательность $\{w_k\}$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 v_k'^2 dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 w_k'^2 dx = A.$$

Поскольку m является пределом последовательности $\{I[Q, v_k]\}$, $m - A$ является пределом последовательности

$$\left\{ - \int_0^1 Q(x) v_k^2 dx \right\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер K , что для любого $k \geq K$ выполняется неравенство

$$- \left(\int_0^1 Q(x) v_k^2 dx \right) < m - A + \varepsilon \quad \text{или} \quad \left(\int_0^1 Q(x) v_k^2 dx \right) > A - m - \varepsilon. \quad (8)$$

Применим теорему Лебега (см. [11, с. 5]). Поскольку последовательность $\{v_k^2\}$ сходится к функции u^2 в пространстве $L_1(0, 1)$, существует такая подпоследовательность $\{r_k\}$ последовательности $\{v_k\}$, что последовательность $\{Q(x)r_k^2\}$ сходится к функции $Q(x)u^2$ при $k \rightarrow \infty$ почти всюду на $[0, 1]$.

Мы показали, что найдется такая константа C , что для любой функции r_k выполняется неравенство

$$\int_0^1 Q(x) r_k^2 dx \leq \int_0^1 r_k'^2 dx \int_0^1 x(1-x) Q(x) dx \leq C \int_0^1 x(1-x) Q(x) dx = \text{const}.$$

Тогда

$$Q(x)u^2 \in L_1(0, 1), \quad \int_0^1 Q(x) r_k^2 dx \rightarrow \int_0^1 Q(x) u^2 dx \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Если для любого $k \geq K$ выполняется неравенство (8), то

$$\int_0^1 Q(x) u^2 dx \geq A - m - \varepsilon.$$

Поскольку ε может быть сколь угодно малым числом, получаем

$$\int_0^1 Q(x) u^2 dx \geq A - m \quad \text{и} \quad - \int_0^1 Q(x) u^2 dx \leq m - A. \quad (9)$$

В силу (7) и (9) получим $I[Q, u] \leq m$. Поскольку $m = \inf_{y \in \Gamma_*} I[Q, y]$, имеем $I[Q, u] = m$. В силу (6), получим $u \in \Gamma_*$.

Поскольку $I[Q, u] = I[Q, |u|]$, можем считать, что $u \geq 0$ на $[0, 1]$. Докажем, что функция u выпукла вверх и, следовательно, положительна на $(0, 1)$.

Пусть существуют такие точки $x_1, x_2 \in [0, 1]$ и число $0 < \mu < 1$, что

$$u(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) < \mu u(x_1) + (1 - \mu)u(x_2).$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u, & x \in [0, 1] \setminus [x_1, x_2], \\ u(x_1) + (x - x_1) \frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Тогда $u(x_1) = \tilde{u}(x_1)$, $u(x_2) = \tilde{u}(x_2)$.

Пусть $x_3 = \mu x_1 + (1 - \mu)x_2$. Тогда $u(x_3) < \tilde{u}(x_3)$. Положим

$$\tilde{x}_1 = \sup_{\substack{u(x) \geq \tilde{u}(x), \\ x_1 \leq x < x_3}} x, \quad \tilde{x}_2 = \inf_{\substack{u(x) \geq \tilde{u}(x), \\ x_3 < x \leq x_2}} x.$$

Тогда для любого $x \in (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ имеем $u(x) < \tilde{u}(x)$.

Положим

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} u, & x \in [0, 1] \setminus [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2], \\ u(\tilde{x}_1) + (x - \tilde{x}_1) \frac{u(\tilde{x}_2) - u(\tilde{x}_1)}{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1}, & x \in [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]. \end{cases}$$

Покажем, что $R[Q, \hat{u}] < R[Q, u]$. Действительно,

$$\int_0^1 \hat{u}^2 dx > \int_0^1 u^2 dx, \quad \int_0^1 Q(x) \hat{u}^2 dx > \int_0^1 Q(x) u^2 dx, \quad \int_0^1 \hat{u}'^2 dx \leq \int_0^1 u'^2 dx.$$

Последнее неравенство следует из равенства

$$\int_0^1 \hat{u}'^2 dx - \int_0^1 u'^2 dx = \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \hat{u}'^2 dx - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} u'^2 dx$$

и утверждения, что функционал

$$J[y] = \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} y'^2 dx$$

при условиях $y(\tilde{x}_1) = u(\tilde{x}_1)$, $y(\tilde{x}_2) = u(\tilde{x}_2)$ достигает минимума на функции вида $y = C_1 x + C_2 = \hat{u}$, где C_1, C_2 — константы. Следовательно, $R[Q, \hat{u}] < R[Q, u]$.

Поскольку функция $\hat{u}$ также принадлежит $H_0^1(0, 1)$ и $R[Q, \hat{u}] < R[Q, u]$, мы получаем противоречие с тем, что $\inf_{H_0^1(0, 1) \setminus \{0\}} R[Q, y] = R[Q, u]$. Следовательно, функция u положительна и выпукла вверх на $(0, 1)$. $\square$

Лемма 2. Пусть функция u удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда u является решением уравнения

$$y'' + Q(x)y + \lambda y = 0,$$

где $\lambda = t$ — минимальное собственное значение задачи (1), (2).

Доказательство. Пусть функция $z \in H_0^1(0, 1)$. Рассмотрим функцию переменной $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = \left(\int_0^1 (u' + tz')^2 dx - \int_0^1 Q(x)(u + tz)^2 dx \right) / \left(\int_0^1 (u + tz)^2 dx \right).$$

Поскольку

$$g(0) = \inf_{H_0^1(0, 1) \setminus \{0\}} R[Q, y] = R[Q, u],$$

то $g'(0) = 0$. Так как $u \in \Gamma_*$ и $I[Q, u] = m$, то для любого $z \in H_0^1(0, 1)$ имеет место равенство

$$\int_0^1 u' z' dx - \int_0^1 Q(x) u z dx = m \int_0^1 u z dx.$$

Заметим, что при $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ и $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ для любой функции $z \in H_0^1(0, 1)$ интеграл $\int_0^1 Q(x) u z dx$ абсолютно сходится, поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(x) |u z| dx &\leq \left(\int_0^1 Q(x) u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 Q(x) z^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 u'^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 z'^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 x(1-x) Q(x) dx \right). \end{aligned}$$

Если $z \in C_0^\infty(0, 1)$, то u' имеет обобщенную производную

$$u'' = -Q(x)u - tu.$$

Согласно [9, следствие 2.6.1, с. 41], если $u, v \in L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, и интервал (a, b) конечен, $v(x)$ есть k -я обобщенная производная от $u(x)$, то функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема $k - 1$ раз на сегменте $[a, b]$ и почти всюду на нем имеет обычную k -ю производную $u^{(k)}(x) = v(x)$. При этом производная $u^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$.

Поскольку Q — локально интегрируемая на интервале $(0, 1)$ функция, она является интегрируемой на любом отрезке $[\rho, 1 - \rho]$, где $0 < \rho < 1/2$. Тогда в силу следствия 1 из теоремы 2.6.1 (см. [9, с. 41]) функция u непрерывно дифференцируема на любом отрезке $[\rho, 1 - \rho]$, где $0 < \rho < 1/2$, и почти всюду на нем имеет классическую производную второго порядка

$$u'' = -Q(x)u - tu.$$

При этом u' абсолютно непрерывна на отрезке $[\rho, 1 - \rho]$.

Таким образом, почти всюду на любом отрезке $[\rho, 1 - \rho]$, $0 < \rho < 1/2$, обобщенная производная второго порядка функции u является классической производной второго порядка функции u , и равенство (1) имеет место почти всюду в интервале $(0, 1)$. Выполнение граничных условий следует из принадлежности функции u пространству $H_0^1(0, 1)$. Следовательно, u является решением задачи (1), (2) с собственным значением $\lambda = m$.

Для любого решения z задачи (1), (2) умножим левую и правую части уравнения (1) на z_1 , где

$$z_1(x) = \begin{cases} z, & x \in (\rho, 1 - \rho), \\ 0, & x \in [0, \rho] \cup [1 - \rho, 1], \end{cases}$$

и, проинтегрировав по частям в пределах от ρ до $1 - \rho$, получим:

$$\int_{\rho}^{1-\rho} z'^2 dx - \int_{\rho}^{1-\rho} Q(x)z^2 dx = \lambda \int_{\rho}^{1-\rho} z^2 dx.$$

Перейдя к пределу при $\rho \rightarrow 0$, получим равенство

$$\int_0^1 z'^2 dx - \int_0^1 Q(x)z^2 dx = \lambda \int_0^1 z^2 dx.$$

Здесь использован факт, что $z_1(\rho) = z_1(1 - \rho) = 0$, $z'(\rho)$, $z'(1 - \rho)$ конечны. Тогда в силу того, что

$$m = \inf_{y \in H_0^1 \setminus \{0\}} R[Q, y],$$

мы получаем неравенство $\lambda \geq m$, из которого следует, что m — минимальное собственное значение задачи (1), (2). Лемма 2 доказана. □

Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. Для любых $\alpha, \beta, \gamma, \gamma \neq 0$, имеем $M_{\alpha, \beta, \gamma} \leq \pi^2$.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$V[y] = \left(\int_0^1 y'^2 dx \right) / \left(\int_0^1 y^2 dx \right).$$

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \gamma \neq 0$ — произвольные действительные числа. Для любой функции $Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ выполняется неравенство

$$\inf_{y \in H_0^1(0, 1) \setminus \{0\}} R[Q, y] \leq \inf_{y \in H_0^1(0, 1) \setminus \{0\}} V[y] = \pi^2,$$

Таким образом,

$$M_{\alpha, \beta, \gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}} \inf_{y \in H_0^1(0, 1)} R[Q, y] \leq \pi^2. \quad \square$$

Теорема 4. Если $\gamma < 0$ или $0 < \gamma < 1$, $\alpha, \beta > 3\gamma - 1$, то $M_{\alpha, \beta, \gamma} < \pi^2$.

Доказательство. В силу неравенства Гельдера для любых функций $Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ и $y \in H_0^1(0, 1)$ при $\gamma < 0$ имеем

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \leq \left(\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x) dx \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\int_0^1 Q(x) y^2 dx \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

при $0 < \gamma < 1$ имеем

$$1 = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x) dx \leq \left(\int_0^1 Q(x) y^2 dx \right)^\gamma \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{1-\gamma}.$$

Тогда

$$\int_0^1 Q(x) y^2 dx \geq \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (10)$$

и

$$\inf_{y \in H_0^1(0,1)} R[Q, y] \leq \inf_{y \in H_0^1(0,1)} G[y],$$

где

$$G[y] = \left[\int_0^1 y'^2 dx - \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] / \left(\int_0^1 y^2 dx \right).$$

При $\alpha, \beta > 3\gamma - 1$ интеграл

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} (\sin \pi x)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx$$

конечен. Тогда для любой функции $Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$

$$\inf_{y \in H_0^1(0,1)} R[Q, y] \leq \inf_{y \in H_0^1(0,1)} G[y] \leq G[\sin \pi x] < \pi^2$$

и $M_{\alpha, \beta, \gamma} < \pi^2$. □

В [5, 14] изучались оценки первого собственного значения задачи (1), (2) при выполнении интегрального условия на потенциал (3). Оценки для $M_{\alpha, \beta, \gamma}$ и $m_{\alpha, \beta, \gamma}$, полученные в этих работах, верны и для первого собственного значения задачи (1)–(4). Приведем соответствующие теоремы.

Теорема 5. Если $\gamma < -1$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$, то существуют такие функции $Q_* \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ и $u \in H_0^1(0, 1)$, $u > 0$ на $(0, 1)$, что $M_{\alpha, \beta, \gamma} = R[Q_*, u]$, причем u удовлетворяет уравнению

$$u'' + tu = -x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (11)$$

и интегральному условию

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx = 1. \quad (12)$$

Теорема 6. Если $\gamma > 1$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ и если $0 < \gamma \leq 1$, $\alpha \leq 2\gamma - 1$, $-\infty < \beta < +\infty$ или $\beta \leq 2\gamma - 1$, $-\infty < \alpha < +\infty$, то $M_{\alpha, \beta, \gamma} = \pi^2$. Если $0 < \gamma < 1/2$, $2\gamma - 1 < \alpha$, $\beta \leq \min\{0, 3\gamma - 1\}$, то $M_{\alpha, \beta, \gamma} \leq \pi^2$. Если $0 < \gamma < 1/2$, $\alpha, \beta > \min\{0, 3\gamma - 1\}$ и если $1/2 \leq \gamma < 1$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$, то $M_{\alpha, \beta, \gamma} < \pi^2$.

Теорема 7. Если $\gamma < 0$ или $0 < \gamma < 1$, то $m_{\alpha, \beta, \gamma} = -\infty$. Если $\gamma \geq 1$, то $m_{\alpha, \beta, \gamma} > -\infty$. Если $\gamma > 1$, $\alpha, \beta < 2\gamma - 1$, то существуют такие функции $Q_* \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ и $u \in H_0^1(0, 1)$, $u > 0$ на $(0, 1)$, что $m_{\alpha, \beta, \gamma} = R[Q_*, u]$, причем u удовлетворяет уравнению (11) и интегральному условию (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винокуров В. А., Садовничий В. А. О границах изменения собственного значения при изменении потенциала// Докл. РАН. — 2003. — 392, № 5. — С. 592–597.
2. А. А. Владимиров О мажорантах собственных значений задач Штурма–Лиувилля с потенциалами из шаров весовых пространств// Мат. сб. — 2017. — 208, № 9. — С. 42–55.
3. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля// Усп. мат. наук. — 1996. — 51, № 3. — С. 73–144.
4. Ежак С. С., Карулина Е. С., Тельнова М. Ю. Оценки первого собственного значения некоторых задач Штурма–Лиувилля с интегральным условием на потенциал. Ч. 4// в кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа (Асташова И. В., ред.). — М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. — С. 506–647.
5. Ежак С. С., Тельнова М. Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с потенциалами из весовых пространств// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2019. — 32. — С. 162–190.
6. Куралбаева К. З. Некоторые оптимальные оценки собственных значений задач Штурма–Лиувилля/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 1996.
7. Куралбаева К. З. Об оценках первого собственного значения оператора Штурма–Лиувилля// Дифференц. уравн. — 1996. — 32, № 6. — С. 852–853.
8. Люстernик Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
9. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.
10. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
11. Осмоловский В. Г. Нелинейная задача Штурма–Лиувилля. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003.
12. Egorov Yu., Kondratiev V. Spectral Theory of Elliptic Operators. — Basel: Birkhäuser, 1996.
13. Ezhak S. On estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with dirichlet boundary conditions and integral condition// in: Differential and Difference Equations with Applications. — New York: Springer-Verlag, 2013. — P. 387–394.
14. Ezhak S., Telnova M. Yu. On one upper estimate for the first eigenvalue of a Sturm–Liouville problem with Dirichlet boundary conditions and a weighted integral condition// Mem. Differ. Equations Math. Phys. — 2018. — 73. — P. 55–64.
15. Karulina E. Some estimates for the minimal eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with third-type boundary conditions// Math. Bohem. — 2011. — 136, № 4. — P. 377–384.
16. Karulina E. S., Vladimirov A. A. The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extrema of the first eigenvalue// Tatra Mount. Math. Publ. — 2013. — 54, № 1. — P. 101–118.
17. Telnova M. Some estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with a weight integral condition// Math. Bohem. — 2012. — 137, № 2. — P. 229–238.

Ежак Светлана Сергеевна

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва

E-mail: svetlana.ezhak@gmail.com

Тельнова Мария Юрьевна

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва

E-mail: mytelnova@ya.ru