Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Н. Ляхов, М. Г. Лапшина, Аналог теоремы Пэли—Винера для K_γ -преобразования Радона при целом $|\gamma|$, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 104–109

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-104-109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:10:45

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ—ВИНЕРА ДЛЯ K_γ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ПРИ ЦЕЛОМ $|\gamma|$

© 2021 г. Л. Н. ЛЯХОВ, М. Г. ЛАПШИНА

Аннотация. Изучение преобразования Радона на основе весовых плоских волн инициировано И. А. Киприяновым. В этой статье приведены необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет K_γ -преобразование Радона гладких, быстро убывающих вместе со всеми производными.

Ключевые слова: теорема Пэли—Винера, преобразование Радона, преобразование Радона—Киприянова, обращение преобразования Радона, обращение преобразования Радона—Киприянова.

AN ANALOG OF THE PALEY—WIENER THEOREM FOR THE RADON K_γ -TRANSFORM FOR INTEGER $|\gamma|$

© 2021 L. N. LYAKHOV, M. G. LAPSHINA

ABSTRACT. The study of the Radon transformation based on weighted plane waves was initiated by I. A. Kipriyanov. In this paper, we obtain necessary and sufficient conditions satisfied by the Radon K_γ -transform of smooth functions that decrease together with all their derivatives.

Keywords and phrases: Paley—Wiener theorem, Radon transform, Radon—Kipriyanov transform, inversion of the Radon transform, inversion of the Radon—Kipriyanov transform.

AMS Subject Classification: 44A12, 42A38

Идея использования конструкций весовых плоских волн для работы с дифференциальными операторами, содержащими сингулярный дифференциальный оператор Бесселя

$$B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1)$$

принадлежит И. А. Киприянову (1960–1970-е гг.). Такие конструкции плоских волн (см. [3]) определены как действие оператора Пуассона на «плоскую волну» (см. [6]):

$$\phi(x, \xi) = \mathcal{P}_x^\gamma f(\langle x, \xi \rangle), \quad \langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \xi_i,$$

где многомерный оператор Пуассона $\mathcal{P}_x^\gamma$ определен по формуле

$$\mathcal{P}_x^\gamma g(x', x'') = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times \int_0^\pi \dots \int_0^\pi g(x_1 \cos \alpha_1, \dots, x_n \cos \alpha_n, x'') \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i d\alpha_1 \dots d\alpha_n. \quad (2)$$

Одномерные операторы Пуассона изучались в [7]. Отметим особенность действия оператора Пуассона: он уничтожает нечетные функции. В частности,

$$\mathcal{P}_{x'}^\gamma \langle x, \xi \rangle = \sum_{i=n+1}^N x_i, \xi_i.$$

Поэтому далее мы предполагаем, что скалярное произведение N -мерных векторов определено в n -полупространстве, а рассматриваемые функции допускают четное продолжение по тем переменным, по которым действует оператор Пуассона. Это приводит к следующему определению четности функций (см. [4, с. 21]): функция $f = f(x', x'')$, определенная в n -полупространстве

$$\mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_N^+ \times \mathbb{R}_{N-n}, \quad x' \in \mathbb{R}_n^+ = \{x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}, \quad x'' \in \mathbb{R}_{N-n}, \quad n < N$$

называется x' -четной по Киприянову, если для всех производных нечетного порядка $l = 2k + 1$ справедливо равенство $f_{x_i}^{(l)}(0, x^i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ (используем обозначение $x = (x_i, x^i)$, $x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x^n)$).

Преобразование Радона на основе весовых плоских волн введено в [5, 11]. Пусть x' -четная функция $f(x)$ принадлежит пространству Шварца. Ее преобразование Радона–Киприянова определяется формулой (см. [5])

$$K_\gamma[f](\xi; p) := \int_{\mathbb{R}_N^+} f(x) \mathcal{P}_{x'}^\gamma \delta(p - \langle x, \xi \rangle) (x')^\gamma dx, \quad (3)$$

где $\delta(P)$ — дельта-функция, сосредоточенная на $(N - 1)$ -мерной поверхности $P(x) = 0$. Конструкция (3) называется *преобразованием Радона–Киприянова* (сокращая, говорим K_γ -преобразование Радона или K_γ -преобразование). Это интегральное преобразование мы будем рассматривать на классе функций, определенных в области $\mathbb{R}_N^+$, бесконечно дифференцируемых, x' -четных и быстро убывающих в следующем смысле:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_N^+} |x'|^{\beta'} |x''|^{\beta''} B_\gamma^{\alpha'} D_{x''}^{\alpha''} f(x', x'') \leq \infty, \quad \forall \alpha = (\alpha', \alpha''), \beta = (\beta', \beta''), \quad (4)$$

где α и β — целочисленные мультииндексы, $B_\gamma^{\alpha'} = B_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots B_{\gamma_n}^{\alpha_n}$, B_{γ_i} — оператор Бесселя (1), $D_{x''}^{\alpha''} = D_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}} \dots D_{x_N}^{\alpha_N}$, $D_{x_i} = \partial / \partial x_i$. Класс функций, удовлетворяющих условию (4), будем обозначать $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$.

1. Необходимые свойства. Если функция $f = f(x', x'')$ принадлежит классу x' -четных функций, быстро убывающих вместе со всеми производными, то ее K_γ -преобразование удовлетворяет следующим условиям (известны из работ [5, 11]):

(i) однородность:

$$K_\gamma[f](\lambda \xi, \lambda p) = |\lambda|^{-1} K_\gamma[f](\xi, p);$$

(ii) функция $K_\gamma[f](\xi, p)$ бесконечно дифференцируема по ξ и по p при $\xi \neq 0$;

(iii) при $|p| \rightarrow \infty$ для любого $k > 0$ справедлива равномерная по ξ оценка

$$|K_\gamma[f](\xi, p)| = O(|p|^{-k}),$$

когда ξ пробегает ограниченную замкнутую область, не содержащую точки $\xi = 0$.

Докажем еще одно, необходимое в дальнейшем, свойство о представлении интеграла от $p^k K_\gamma[f](\xi, p)$ однородном многочленом.

(iv) Для любого $k > 0$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[f](\xi; p) p^k dp \quad (5)$$

является однородным многочленом от ξ порядка k .

Доказательство. Наличие оператора Пуассона в определении K_γ -преобразования позволяет, используя процедуру вращения $x_i \rightarrow \sqrt{z_{2i-1}^2 + z_{2i}^2}$, привести определение (3) к виду

$$K_\gamma[f](\xi; p) := \int_{\mathbb{R}_{N+n}^+} \tilde{f}(z) \delta(p - \langle z, \hat{\xi} \rangle) \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1} dz, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2}, x''\right), \\ z &= (z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}, x'') \in \mathbb{R}_{N+n}^+ = \{z : z_{2i} > 0, i = 1, 2, \dots, n\}, \\ \tilde{\xi} &= (\xi_1, 0, \xi_3, 0, \dots, \xi_{2n-1}, 0, \xi'') \in \overline{\mathbb{R}_{N+n}^+}, \end{aligned}$$

причем все нечетные координаты вектора $\tilde{\xi}$ совпадают с координатами вектора ξ : $\xi_{2i-1} = \xi_i$ и $|\tilde{\xi}| = |\xi|$.

По определению преобразования Радона—Киприянова (6) имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[f](\xi; p) p^k dp = \int_{-\infty}^{+\infty} p^k dp \int_{\Gamma=\{p=\langle \tilde{\xi}, z \rangle\}^+} \tilde{f}(z) \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1} d\Gamma,$$

где $\{p = \langle \tilde{\xi}, z \rangle\}^+ = \{p = \langle \tilde{\xi}, z \rangle\} \cap \mathbb{R}_{N+n}^+$. Ось интегрирования Op ортогональна плоскости интегрирования Γ , поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[f](\xi; p) p^k dp = \int_{\mathbb{R}_{N+n}^+} \langle \tilde{\xi}, z \rangle^k \tilde{f}(z) \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1} dz.$$

Так как

$$\langle \Theta, z \rangle^k = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \xi^\alpha,$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[f](\xi; p) p^k dp = \sum_{|\alpha|=k} \xi^\alpha \int_{\mathbb{R}_{N+n}^+} z^\alpha \tilde{f}(z) \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1} dz = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \xi^\alpha,$$

где коэффициенты A_α зависят от функции f и от параметров N , n и γ . □

2. О формулах обращения. Преобразование Радона—Киприянова, определенное в виде

$$\check{f}(\xi; p) = K_\gamma[f](\xi; p) = \int_{\mathbb{R}_N} f(x) \mathcal{P}_x^\gamma \delta(p - \langle x, \xi \rangle) (x')^\gamma dx,$$

удалось обратить, используя методы обращения В-потенциалов Рисса (см. [9]).

Известны формулы обращения преобразования Радона—Киприянова (см. [2, 10, 11]). Наиболее общей из приведенных в этих работах формул является формула

$$f(x) = \frac{2^{2n-|\gamma|-N} \pi^{n+1-N}}{i^{N+|\gamma|-1} \prod_{i=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \mathbf{D}_\gamma^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}} \int_{S_1^+(N)} \mathcal{P}_{x'}^\gamma K_\gamma[f](\xi; \langle x, \xi \rangle) (\xi')^\gamma dS(\xi), \quad (7)$$

полученная применением В-гиперсингулярного интеграла смешанного типа (введены в [8])

$$\mathbf{D}_\gamma^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{d_{N,\gamma,l}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_N^+} \frac{\square_t^l \varphi(x)}{t^{N+\gamma+\alpha}} (t')^\gamma dt,$$

где $\square_t^l$ — конечная разность, порожденная обобщенным сдвигом Пуассона, нормирующая константа $d_{N,\gamma,l}$ выбрана так, чтобы в образах Фурье—Бесселя этот оператор имел символ $|\xi|^\alpha$.

Если же число $|\gamma|$ — целое, то В-гиперсингулярный интеграл есть сингулярный дифференциальный оператор

$$\mathbf{D}_\gamma^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}} = \Delta_B^m, \quad \Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i} + \sum_{j=n+1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad m = N + |\gamma| - 1,$$

дробного (вообще говоря) порядка.

Если $N + |\gamma|$ — нечетное, то $(N + |\gamma| - 1)/2 = m$ — натуральное число, и формула обращения (7) принимает более простой вид:

$$f(x) = C_1(N, \gamma) \Delta_B^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}} \int_{C^+(N)} K_\gamma[f](\Theta; \langle x, \Theta \rangle) (\Theta')^\gamma dS(\Theta), \quad (8)$$

где C^+ — произвольная поверхность, охватывающая начало координат.

Если же число $N + |\gamma|$ — четное, то

$$f(x) = C_2(N, \gamma) \Delta_B^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}} \int_{C^+(N)} (\Theta')^\gamma dS(\Theta) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_{x'}^\gamma \left[\frac{1}{\langle x, \Theta \rangle} - p \right] d_p K_\gamma[f](\Theta; p).$$

Отметим, что если числа γ_i — натуральные, то K_γ -преобразование — это преобразование Радона функций от сферических симметрий (см. [12, теорема 1]). Для примера докажем теорему для случая, когда число $N + |\gamma|$ нечетно.

Многомерный оператор Пуассона сплетает оператор Бесселя B_γ и вторую производную $\partial^2/\partial x^2$ в следующем смысле (см. [6]):

$$B^m \mathcal{P}_t^\gamma f(t) = \mathcal{P}_t^\gamma \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} f(t), \quad t \in \mathbb{R}_1^+.$$

Отсюда вытекает формула

$$\Delta_B \mathcal{P}_t^\gamma f(t) = \mathcal{P}_t^\gamma \sum_{i=1}^N \frac{d^2}{dx_i^2} f(x', x'') = \mathcal{P}_t^\gamma \Delta f(x), \quad x \in \mathbb{R}_N^+.$$

Поэтому

$$\Delta_B \mathcal{P}_t^\gamma \check{f}(\xi; \langle x, \xi \rangle) = \mathcal{P}_t^\gamma \sum_{i=1}^N \frac{d^2}{dx_i^2} \check{f}(\xi, \langle x, x_i \rangle) = \mathcal{P}_t^\gamma \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \check{f}_p''(\xi, \langle x, \xi \rangle) = \mathcal{P}_t^\gamma \check{f}_p''(\xi, \langle x, \xi \rangle),$$

Мы учли, что $|\xi|^2 = 1$. Из формулы (8) имеем

$$f(x) = C_1(N, \gamma) \int_{C^+(N)} \mathcal{P}_{x'}^\gamma \check{f}_p^{(N+|\gamma|-1)}(\xi; p) (\Theta')^\gamma dS(\Theta), \quad (9)$$

где $p = \langle x, \Theta \rangle$, $|\Theta| = 1$.

3. Аналог теоремы Пэли—Винера. Условия (i)–(iv) являются необходимыми условиями для принадлежности прообраза преобразования Радона—Кириянова подпространству S_{ev} пространства Шварца, состоящего из x' -четных функций, удовлетворяющих условию (1). На самом деле условия (i)–(iv) являются и достаточными, что доказывается в следующем утверждении, которое и является аналогом известной теоремы Пэли—Винера для преобразования Фурье и преобразования Радона.

Теорема 1. *Всякая функция, удовлетворяющая условиям (i)–(iv) является преобразованием Радона—Кириянова функции $f(x) \in S_{ev}$.*

Доказательство. Мы следуем подходу к доказательству аналогичной теоремы для преобразования Радона из [1], поэтому приведем его кратко, выделяя наиболее принципиальные для этих исследований места в доказательстве. Нужно доказать, что $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая и быстро убывающая функция вместе со всеми В-производными (по x') и производными (по x''), а преобразование Радона—Киприянова функции $f(x)$ совпадает с $K_\gamma[f](\Theta, p)$. Из условия (ii) бесконечной дифференцируемости функции $K_\gamma[f](\xi, p)$ по ξ и по p при $\xi \neq 0$ и из формулы (7) следует бесконечная дифференцируемость функции $f(x)$.

Докажем, что функция $f(x)$ быстро убывающая. Идея простая, достаточно доказать убывание функции $f(x)$ в направлении вектора Ox_0 , т.е. рассмотреть функцию $\Phi(t) = f(tx_0)$ при $t \rightarrow \infty$. Точка x_0 при этом произвольная. Положим $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Принципиально то, что ненулевая координата выбранной нами точки x_0 является весовой. Введем обозначение

$$\Psi(\xi_1, \dots, \xi_N; p) = C_1(N, \gamma) \mathcal{P}_{x', f_p}^{\gamma, \check{f}}(N+|\gamma|-1)(\xi; p).$$

В данном случае $p = \langle tx_0, \xi \rangle = t\xi_1$ и из (9) получим равенство

$$f(tx_0) = \int_{\mathbb{R}_{N-1}^+} \Psi(\xi_1, \dots, \xi_{N-1}, 1; t\xi_1) (\xi')^\gamma d\xi.$$

Заменой переменной $\xi_1 = \frac{p}{t}$, $d\xi_1 = \frac{dp}{t}$ приходим к выражению

$$f(tx_0) = t^{-\gamma-1} \int_{\mathbb{R}_{N-1}^+} \Psi\left(\frac{p}{t}, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}, 1; p\right) p^{\gamma_1} dp d\xi_2 \dots d\xi_{N-1}.$$

Подынтегральная функция, как функция от t^{-1} , бесконечно дифференцируема и может быть представлена в окрестности точки $t^{-1} = 0$ разложением в ряд Тейлора по степеням t^{-1} . Это приведет к следующему асимптотическому ряду для функции $\Phi(t) = f(tx_0)$:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = f(tx_0) &\sim t^{-\gamma_1-1} \int_{\mathbb{R}_{N-1}^+} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{-k} p^k}{k!} \Psi_{\xi_1}^{(k)}(0, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}, 1; p) \prod_2^N \xi_i^{\gamma_i} p^{\gamma_1} dp d\xi_2 \dots d\xi_{N-1} = \\ &= t^{-\gamma_1-1} \int_{\mathbb{R}_{N-1}^+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{-k} p^{k+\gamma_1}}{k!} \Psi_{\xi_1}^{(k)}(0, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}, 1; p) \prod_2^N \xi_i^{\gamma_i} dp d\xi_2 \dots d\xi_{N-1}. \end{aligned}$$

Здесь выделим переменную интегрирования p и введем обозначения $\tilde{\xi} = (\xi_2, \dots, \xi_{N-1})$ и $\tilde{\gamma} = (\gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Тогда

$$\Phi(t) = f(tx_0) \sim \int_{\tilde{\xi}} \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\gamma-1-k} \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^{k+\gamma_1}}{k!} \frac{\partial^{N+|\gamma|-1}}{\partial p^{N+|\gamma|-1}} K_\gamma[f](\xi, p) dp \Big|_{\xi_1=0} (\tilde{\xi})^{\tilde{\gamma}} d\tilde{\xi}.$$

Во внутреннем интеграле можем совершить интегрирование по частям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^{k+\gamma_1}}{k!} \frac{\partial^{N+|\gamma|-1}}{\partial p^{N+|\gamma|-1}} K_\gamma[f](\xi, p) dp = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{N+|\gamma|-1} p^{k+\gamma_1}}{\partial p^{N+|\gamma|-1}} K_\gamma[f](\xi, p) dp.$$

Ясно, что $\frac{\partial^{N+|\gamma|-1} p^{k+\gamma_1}}{\partial p^{N+|\gamma|-1}} = 0$ при $N + |\tilde{\gamma}| - 1 > k$. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned}\Phi(t) = f(tx_0) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\gamma-1-k} \int_{\tilde{\xi}} \frac{(\tilde{\xi})^{\gamma}}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{k+\gamma_1-N-\gamma_1-|\tilde{\gamma}|+1} K_{\gamma}[f](\xi, p) dp = \\ &= \sum_{k=N+|\gamma|}^{\infty} t^{-\gamma-1-k} \int_{\tilde{\xi}} \frac{(\tilde{\xi})^{\gamma}}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \xi_1^k} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{k-N-|\tilde{\gamma}|+1} K_{\gamma}[f](\xi, p) dp d\tilde{\xi}.\end{aligned}$$

Здесь по условию (iv) внутренний интеграл есть однородный многочлен по ξ степени $k - N - |\tilde{\gamma}| + 1$. Но поскольку $k > N + |\tilde{\gamma}| - 1$ (т.е. порядок производной выше степени дифференцируемого многочлена), то это выражение равно нулю. Отсюда следует быстрое убывание $\Psi(t)$ и, следовательно, соответствующее асимптотическое поведение функции Φ при $|x| \rightarrow \infty$. $\square$

Быстрое убывание функции $B_{\gamma}^{\alpha'} D_{x''}^{\alpha''} f$ доказывается по той же схеме, что и быстрое убывание f , поскольку производные функции $B_{\gamma}^{\alpha'} D_{x''}^{\alpha''}$ инвариантны по отношению к свойству x' -четности функции f .

Доказательство того, что функция f , полученная по формуле обращения преобразование Радона–Киприянова, единственна, стандартно и мы его не приводим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: ГИФМЛ, 1962.
2. Гоц Е. Г., Ляхов Л. Н. Обращение преобразования Радона–Киприянова посредством дробного дифференцирования Грюнвальда–Летникова–Рисса // Докл. РАН. — 2006. — 412, № 1. — С. 11–14.
3. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. — М.: Мир, 1958.
4. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1987.
5. Киприянов И. А. О преобразованиях Фурье, Фурье–Бесселя и Радона // Докл. РАН. — 1998. — 360, № 2. — С. 157–160.
6. Киприянов И. А., Кононенко В. И. О фундаментальных решениях некоторых сингулярных уравнений в частных производных // Диффер. уравн. — 1969. — 5, № 8. — С. 1471–1483.
7. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2. — С. 102–143.
8. Ляхов Л. Н. Об одном классе гиперсингулярных интегралов // Докл. АН СССР. — 1990. — 315, № 2. — С. 291–296.
9. Ляхов Л. Н. Обращение В-потенциалов Рисса // Докл. РАН. — 1991. — 321, № 3. — С. 466–469.
10. Ляхов Л. Н. Обращение преобразования Киприянова–Радона // Докл. РАН. — 2004. — 399, № 5. — С. 153–163.
11. Ляхов Л. Н. Преобразование Киприянова–Радона // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2005. — 248. — С. 144–152.
12. Ляхов Л. Н. Преобразование Радона–Киприянова обобщенного сферического среднего значения функции // Мат. заметки. — 2016. — 100, № 1. — С. 100–112.

Ляхов Лев Николаевич

Воронежский государственный университет

E-mail: levnllya@mail.ru

Лапшина Марина Геннадьевна

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского

E-mail: marina.lapsh@yandex.ru