Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Татаркин, А. Б. Шишкин, Синтез в ядре оператора трехсторонней свертки, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 130–141

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-130-141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:25:10

СИНТЕЗ В ЯДРЕ ОПЕРАТОРА ТРЕХСТОРОННЕЙ СВЕРТКИ

© 2021 г. А. А. ТАТАРКИН, А. Б. ШИШКИН

Аннотация. Говорят, что для однородного уравнения типа свертки справедлива аппроксимационная теорема, если любое решение этого уравнения аппроксимируется его элементарными решениями. В статье сформулировано необходимое и достаточное условие выполнимости аппроксимационной теоремы для однородного уравнения трехсторонней свертки при любом выборе выпуклой области и его характеристической функции.

Ключевые слова: экспоненциальный синтез, ядро оператора, оператор типа свертки, инвариантное подпространство, аналитическая функция.

SYNTHESIS IN THE KERNEL OF THE THREE-WAY CONVOLUTION OPERATOR

© 2021 А. А. TATARKIN, А. В. SHISHKIN

ABSTRACT. One says that an approximation theorem holds for a homogeneous convolution-type equation if any solution of this equation is approximated by its elementary solutions. In this paper, we state a necessary and sufficient condition for the validity of the approximation theorem for the homogeneous equation of three-way convolution for any choice of a convex domain and its characteristic function.

Keywords and phrases: exponential synthesis, kernel of operator, convolution-type operator, invariant subspace, analytic function.

AMS Subject Classification: 34L05

1. Введение. Пусть Ω_0, Ω — выпуклые области в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, U_ε — круг $\{z : |z| < \varepsilon\}$. Будем считать, что $\Omega_0 + U_\varepsilon \subseteq \Omega$ и пространства голоморфных функций $O(\Omega_0)$, $O(U_\varepsilon)$, $O(\Omega_0)$ и $O(\mathbb{C})$ наделены топологиями равномерной сходимости на компактах. Выберем произвольный набор комплексных чисел a_0, a_1, a_2 , не все из которых равны нулю. Символом ω_3 обозначим комплексное число $\exp \frac{2\pi i}{3}$. Пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий в пространстве $O(\mathbb{C})$ по правилу

$$g(\lambda) \rightarrow a_0 g(\omega_3^0 \lambda) + a_1 g(\omega_3^1 \lambda) + a_2 g(\omega_3^2 \lambda);$$

AT_h — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$ по правилу

$$f(z) \rightarrow a_0 f(z + \omega_q^0 h) + a_1 f(z + \omega_q^1 h) + a_2 f(z + \omega_q^2 h).$$

Оператор AT_h принято называть *оператором трехстороннего сдвига* (на шаг $h \in U_\varepsilon$).

Выберем произвольную функцию $f \in O(\Omega)$ и произвольный линейный непрерывный функционал S на пространстве $O(\Omega_0)$. Функция

$$\psi(h) := \langle S, T_h(f) \rangle$$

называется сверткой функции f и функционала S . При фиксированных S и ε оператор

$$f \rightarrow \psi(h) := \langle S, T_h(f) \rangle$$

называется оператором свертки. Известно, что он действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(U_\varepsilon)$ и является непрерывным (см. [2, § 6]). Выберем произвольный оператор трехстороннего сдвига $AT_h: O(\Omega) \rightarrow O(\Omega_0)$, произвольную функцию $f \in O(\Omega)$ и произвольный линейный непрерывный функционал S на пространстве $O(\Omega_0)$. Функция $\psi_A(h) := \langle S, AT_h(f) \rangle$ называется *трехсторонней сверткой* функции f и функционала S . При фиксированных S и ε линейный оператор $f \rightarrow \psi_A(h) := \langle S, AT_h(f) \rangle$ называется *оператором трехсторонней свертки*. Легко убедиться, что оператор трехсторонней свертки действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(U_\varepsilon)$ и является непрерывным (см. [4, § 7]). Он перестановочен с оператором трехкратного дифференцирования D^3 , то есть в области Ω_0 выполняется следующее соотношение

$$D_h^3 \langle S, AT_h(f) \rangle = \langle S, AT_h(D^3 f) \rangle.$$

Однородное уравнение типа свертки

$$\langle S, AT_h(f) \rangle = 0, \quad f \in O(\Omega), \quad (1)$$

называется *однородным уравнением трехсторонней свертки*. Множество решений $f \in O(\Omega)$ однородного уравнения (1) обозначим символом W_S . Множество W_S является замкнутым D^3 -инвариантным подпространством в $O(\Omega)$, то есть справедлива импликация

$$f \in W_S \Rightarrow D^3 f \in W_S.$$

Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие уравнению (1), принято называть *элементарными решениями* этого уравнения. Говорят, что для однородного уравнения (1) справедлива *аппроксимационная теорема*, если произвольное решение $f \in O(\Omega)$ этого уравнения можно аппроксимировать элементарными решениями в топологии пространства $O(\Omega)$.

Известно, что аппроксимационная теорема для однородного уравнения (1) справедлива, если лишь один из коэффициентов a_0, a_1, a_2 отличен от нуля. В этом случае однородное уравнение (1) равносильно однородному уравнению свертки

$$\langle S, f(z+h) \rangle = 0, \quad f \in O(\Omega).$$

Справедливость аппроксимационной теоремы для таких уравнений доказана в [2, теорема 6.1]. Кроме того, аппроксимационная теорема справедлива, если $a_0 = a_1 = a_2$. В этом случае однородное уравнение (1) равносильно однородному уравнению

$$\langle S, f(z + \omega_q^0 h) + f(z + \omega_q^1 h) + f(z + \omega_q^2 h) \rangle = 0, \quad f \in O(\Omega).$$

Справедливость аппроксимационной теоремы для таких уравнений доказана в [4, теорема 7.1, следствие 7.3]. Возникает вопрос о справедливости аппроксимационной теоремы в случае произвольных коэффициентов a_0, a_1, a_2 , произвольной выпуклой области Ω и произвольного S .

2. Формулировка основного результата. Оператор AT_h является линейным и непрерывным. Он совпадает с дифференциальным оператором бесконечного порядка

$$f(z) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{h^n}{n!} (D^n f)(z), \quad (2)$$

где

$$b_n := a_0 + a_1 \omega_q^n + a_2 \omega_q^{2n}, \quad n \in \{0, 1, \dots\},$$

и ряд (2) сходится равномерно на компактах из Ω_0 . Характеристическая функция оператора AT_h совпадает с функцией

$$A(e^{h\lambda}) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{h^n \lambda^n}{n!}.$$

Замечаем, что эти коэффициенты b_n зависят от n периодическим образом, то есть для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняется равенство $b_{n+3} = b_n$. Значит, среди коэффициентов b_0, b_1, b_2 есть отличные

от нуля. Отметим, что коэффициенты a_0, a_1, a_2 однозначно определяются по коэффициентам b_0, b_1, b_2 с помощью формулы $a_k = \Delta_k / \Delta$, где Δ_k — определитель, полученный из определителя

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_3^1 & \omega_3^2 \\ 1 & \omega_3^2 & \omega_3^4 \end{vmatrix} = (\omega_3 - 1)(\omega_3^2 - 1)(\omega_3^2 - \omega_3) \neq 0,$$

заменой k -го столбца на столбец, составленный из коэффициентов b_0, b_1, b_2 .

Обозначим через $n_A := \{n_1, \dots, n_\nu\}$ упорядоченный набор целых неотрицательных чисел из множества $\{0, 1, 2\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) $0 \leq n_1 < \dots < n_\nu \leq 2$;
- (ii) если $n \in \{n_1, \dots, n_\nu\}$, то $b_n \neq 0$;
- (iii) если $n \notin \{n_1, \dots, n_\nu\}$, то $b_n = 0$.

Упорядоченный набор целых чисел n_A , удовлетворяющий условиям (i)–(iii), будем называть *индикатором* уравнения (1). Дополним индикатор n_A уравнения (1) одним элементом $n_{\nu+1} := n_1 + 3$. Будем говорить, что индикатор n_A *периодичен*, если существует такое $q \in \mathbb{N}$, что для всех $k \in \{1, \dots, \nu\}$ выполняется равенство

$$n_{k+1} = n_k + q.$$

Отметим, что индикатор n_A периодичен, если $\nu = 1$ или $\nu = 3$. Действительно, если $\nu = 1$, то индикатор n_A включает лишь один элемент n_1 и условие периодичности содержит лишь одно равенство $n_2 = n_1 + q$, в котором можно положить $q := 3$. В случае $\nu = 3$ индикатор n_A включает три элемента $n_1 := 0, n_2 = 1$ и $n_3 = 2$, значит, условие периодичности содержит три равенства $n_2 = n_1 + q, n_3 = n_2 + q$ и $n_4 = n_3 + q$, в которых можно положить $q := 1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Аппроксимационная теорема для однородного уравнения трехсторонней свертки (1) справедлива при любом выборе выпуклой области Ω и функционала S тогда и только тогда, когда индикатор n_A этого уравнения периодичен.*

3. Спектральный синтез. Пусть $O^*(\Omega)$ — сильное сопряженное к пространству $O(\Omega)$; L_Ω — преобразование Лапласа, которое каждому функционалу $S \in O^*(\Omega)$ ставит в соответствие целую функцию экспоненциального типа $\varphi(\lambda) := \langle S, e^{\lambda z} \rangle$; $P(\Omega)$ — полный образ L_Ω . Известно, что отображение $L_\Omega: O^*(\Omega) \rightarrow P(\Omega)$ является взаимно однозначным. Оно индуцирует в $P(\Omega)$ отделимую локально выпуклую топологию. Известно, что пространство $P(\Omega)$ совпадает с индуктивным пределом $P[1, H_\Omega]$, где H_Ω — опорная функция области Ω в смысле комплексного анализа (см. [1, предложение 3.1]). Так как L_Ω осуществляет изоморфизм локально выпуклых пространств, то его сопряженное отображение L_Ω^* осуществляет изоморфизм сильного сопряженного пространства $P^*(\Omega)$ на второе сопряженное пространство $O^{**}\Omega$. Воспользуемся рефлексивностью пространства $O(\Omega)$ и отождествим это пространство с его вторым сопряженным пространством.

Соблюдая традицию, оператор умножения $O(\mathbb{C}) \rightarrow O(\mathbb{C})$ на одночлен $\pi(z) := z^3$ обозначим π , а его сопряженный оператор обозначим π^* . Символом Δ_λ обозначим корневое подпространство оператора π^* , соответствующее собственному значению λ . Известно, что алгебраический спектр оператора π^* совпадает с $\mathbb{C}$, а корневое подпространство $\Delta_\lambda \subseteq O^*(\mathbb{C})$ совпадает с линейной оболочкой множества

$$\{\delta_\xi^{(j)} : (j, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \lambda^{1/3}\},$$

где $\delta_\xi^{(j)} \in O^*(\mathbb{C})$ — функционал, действующий по правилу $f \rightarrow f^{(j)}(\xi)$ (см. [4, теорема 1.1]).

Пространство $P(\Omega)$ является всюду плотным подпространством $O(\mathbb{C})$ и вложение $P(\Omega) \subseteq O(\mathbb{C})$ является непрерывным. Значит, сильное сопряженное пространство $O^*(\mathbb{C})$ можно отождествить с подпространством сильного сопряженного $P^*(\Omega)$. При этом вложение $O^*(\mathbb{C}) \subseteq P^*(\Omega)$ является непрерывным. Говорят, что корневой элемент $s \in \Delta_\lambda$ *погружен в подпространство* $V \subseteq P^*(\Omega)$, если $(\pi^* - \lambda)^j s \in V$ для любого $j \in \mathbb{Z}_+$. Замкнутое подпространство $V \subseteq P^*(\Omega)$ *допускает спектральный синтез* (синтез по корневым элементам оператора π^*), если оно совпадает с замыканием линейной оболочки множества корневых элементов оператора π^* , погруженных в V .

Рассмотрим дуальный оператор π^* к оператору $\pi: O(\mathbb{C}) \rightarrow O(\mathbb{C})$ (см. [6, § 3]). Согласно определению оператор π^* действует из пространства $P(\mathbb{C})$ в пространство $P(\mathbb{C})$ и совпадает с композицией $L_{\mathbb{C}} \circ \pi^* \circ L_{\mathbb{C}}^{-1}$. В [6, § 6, п. 2] доказаны следующие утверждения:

- (а) алгебраический спектр оператора π^* совпадает с $\mathbb{C}$, а корневое подпространство $E_{\lambda} \subseteq P(\mathbb{C})$ оператора π^* , соответствующее собственному значению λ , совпадает с линейной оболочкой множества экспоненциальных одночленов

$$\{z^j e^{\xi z} : (j, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \lambda^{1/3}\};$$

- (б) замкнутое подпространство $W_S \subseteq O(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора π^* тогда и только тогда, когда его дуальное подпространство $V_S := (L_{\Omega}^*)^{-1}(W_S) \subseteq P^*(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора π^* .

Из (а) и (б) вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 1. *Аппроксимационная теорема для однородного уравнения трехсторонней свертки (1) справедлива тогда и только тогда, когда дуальное подпространство $V_S \subseteq P^*(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора π^* .*

Доказательство. Из (а) вытекает, что аппроксимационная теорема для однородного уравнения трехсторонней свертки (1) справедлива тогда и только тогда, когда замкнутое подпространство $W_S \subseteq O(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора π^* . Осталось сослаться на условие (б). Предложение доказано. $\square$

4. Плотность многочленов. Пусть $n_A := \{n_1, \dots, n_{\nu}\}$ — индикатор уравнения (1). Векторную функцию $\mathbf{g} := (g_1, \dots, g_{\nu})$ называем *целой ν -функцией*, если все функции $g_1, \dots, g_{\nu}$ являются целыми. Если целые функции $g_1, \dots, g_{\nu}$ являются полиномами, то целую ν -функцию $\mathbf{g} := (g_1, \dots, g_{\nu})$ называем *ν -полиномом*.

Выберем произвольную функцию $\varphi \in P(\Omega)$ и обозначим $\mathbf{O}_{\varphi}$ пространство всех целых ν -функций $\mathbf{g} := (g_1, \dots, g_{\nu})$, для которых сумма

$$z^{n_1} g_1(z^q) \varphi(z) + \dots + z^{n_{\nu}} g_{\nu}(z^q) \varphi(z)$$

принадлежит $P(\Omega)$. Определим отображение $\mathbf{u}_{\varphi}: \mathbf{O}_{\varphi} \rightarrow P(\Omega)$ по правилу

$$\mathbf{g} \rightarrow z^{n_1} g_1(z^q) \varphi(z) + \dots + z^{n_{\nu}} g_{\nu}(z^q) \varphi(z).$$

Символом Δ_{n_A} обозначим определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} \omega_q^0 & \dots & \omega_q^0 \\ \omega_q^{n_1} & \dots & \omega_q^{n_{\nu}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_q^{(\nu-1)n_1} & \dots & \omega_q^{(\nu-1)n_{\nu}} \end{vmatrix}.$$

По известной формуле имеем

$$\Delta_{n_A} := \prod_{1 \leq i < j \leq \nu} (\omega_q^{n_i} - \omega_q^{n_j}) \neq 0.$$

Для произвольной целой функций ψ символом

$$\Delta_{n_A}^k(\psi(z), \psi(\omega_q z), \dots, \psi(\omega_q^{\nu-1} z))$$

обозначим определитель

$$\begin{vmatrix} \omega_q^0 & \dots & \psi(z) & \dots & \omega_q^0 \\ \omega_q^{n_1} & \dots & \psi(\omega_q z) & \dots & \omega_q^{n_{\nu}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_q^{(\nu-1)n_1} & \dots & \psi(\omega_q^{\nu-1} z) & \dots & \omega_q^{(\nu-1)n_{\nu}} \end{vmatrix},$$

который получен из определителя Вандермонда Δ_{n_A} заменой k -го столбца на столбец из функций $\psi(z), \psi(\omega_q z), \dots, \psi(\omega_q^{\nu-1} z)$.

$$\begin{cases} z^{n_1} g_1(z^q) + \dots + z^{n_\nu} g_\nu(z^q) = \psi(z), \\ \omega_q^{n_1} z^{n_1} g_1(z^q) + \dots + \omega_q^{n_\nu} z^{n_\nu} g_\nu(z^q) = \psi(\omega_q z), \\ \dots\dots\dots \\ \omega_q^{(\nu-1)n_1} z^{n_1} g_1(z^q) + \dots + \omega_q^{(\nu-1)n_\nu} z^{n_\nu} g_\nu(z^q) = \psi(\omega_q^{\nu-1} z). \end{cases}$$
$$g_k(z^q) = \frac{\Delta_{n_A}^k(\psi(z), \psi(\omega_q z), \dots, \psi(\omega_q^{\nu-1} z))}{z^{n_k} \Delta_{n_A}}.$$
$$\frac{\Delta_{n_A}^k(\psi(z), \psi(\omega_q z), \dots, \psi(\omega_q^{\nu-1} z))}{z^{n_k} \Delta_{n_A}}$$
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varphi(\mathbf{g}) &= z^{n_1} g_1(z^q) \varphi(z) + \dots + z^{n_\nu} g_\nu(z^q) \varphi(z) = \\ &= \varphi(z) \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\Delta_{n_A}^k(\psi(z), \psi(\omega_q z), \dots, \psi(\omega_q^{\nu-1} z))}{\Delta_{n_A}} = \varphi(z) \psi(z) = f(z). \end{aligned}$$
$$f_m(z) := \mathbf{u}_\varphi(\mathbf{g}^{(m)}) = z^{n_1} g_1^{(m)}(z^q) \varphi(z) + \dots + z^{n_\nu} g_\nu^{(m)}(z^q) \varphi(z) = \psi_m(z) \varphi(z),$$
$$\psi_m(z) := z^{n_1} g_1^{(m)}(z^q) + \dots + z^{n_\nu} g_\nu^{(m)}(z^q), \quad \mathbf{g}^{(m)} := (g_1^{(m)}, \dots, g_\nu^{(m)})$$
$$\psi_m \rightarrow \psi := \frac{f}{\varphi}$$
$$g_k^{(m)}(z^q) = \frac{\Delta_{n_A}^k(\psi_m(z), \psi_m(\omega_q z), \dots, \psi_m(\omega_q^{\nu-1} z))}{z^{n_k} \Delta_{n_A}}.$$
$$g_k^{(m)}(z^q) \rightarrow g_k(z^q) := \frac{\Delta_{n_A}^k(\psi(z), \psi(\omega_q z), \dots, \psi(\omega_q^{\nu-1} z))}{z^{n_k} \Delta_{n_A}}$$
$$\psi(z) := z^{n_1} g_1(z^q) \varphi(z) + \dots + z^{n_\nu} g_\nu(z^q) \varphi(z).$$

По предложению 2 отображение $\mathbf{u}_\varphi: \mathbf{O}_\varphi \rightarrow P(\Omega)$ является взаимно однозначным. Наделим $\mathbf{O}_\varphi$ локально выпуклой топологией, индуцированной из пространства $P(\Omega)$ отображением $\mathbf{u}_\varphi$. Так как $\varphi \in P(\Omega)$ и оператор умножения на многочлен является эндоморфизмом пространства $P(\Omega)$, то пространство $\mathbf{O}_\varphi$ включает в себя все ν -полиномы. Принципиальное значение имеет вопрос плотности множества всех ν -полиномов в пространстве $\mathbf{O}_\varphi$. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) дуальное подпространство $V_S \subseteq P^*(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора π^* ,
- (ii) ν -полиномы плотны в пространстве $\mathcal{O}_\varphi$.

Доказательство. Согласно [5, теорема 3] вытекает, что утверждение (i) выполняется тогда и только тогда, когда дуальное подпространство $V_S \subseteq P^*(\Omega)$ допускает инъективное описание (см. [5, п. 1.3]). С другой стороны, по теореме 4 из той же работы допустимость инъективного описания подпространством V_S равносильна плотности ν -полиномов в пространстве $\mathcal{O}_\varphi$. Теорема доказана. $\square$

В силу предложения 1 теорема 2 сводит доказательство аппроксимационной теоремы для однородного уравнения трехсторонней свертки (1) к доказательству плотности ν -полиномов в пространстве $\mathcal{O}_\varphi$.

5. Независимое описание топологии пространства $\mathcal{O}_\varphi$. Предположим, что область Ω является выпуклой, ограниченной и содержит начало. Так как $0 \in \Omega$, то при некотором $\rho > 0$ круг $U_\rho := \{z : |z| < \rho\}$ лежит в области Ω . Пусть

$$h_\Omega(\theta) := \sup_{z \in \Omega} \operatorname{Re}(z \exp\{-i\theta\})$$

— опорная функция области Ω в смысле комплексного анализа. Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ выполняется очевидное неравенство $h_\Omega(\theta) > \rho$. Выберем натуральное m из условия $m > \rho^{-1}$ и символом $\mathcal{O}_{\varphi,m}$ обозначим векторное пространство всех целых ν -функций $\mathbf{g} := (g_1, \dots, g_\nu)$, для которых

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|z^{n_1} g_1(z^q) \varphi(z) + \dots + z^{n_\nu} g_\nu(z^q) \varphi(z)|}{\exp h_m(z)} < +\infty,$$

где $n_A := \{n_1, \dots, n_\nu\}$ — индикатор оператора q -стороннего сдвига AT_h и h_m — неотрицательная функция

$$z \rightarrow \left(h_\Omega(\arg z) - \frac{1}{m} \right) |z|.$$

Используя предложение 2, легко убедиться, что соотношение

$$\|\mathbf{g}\|_m := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|z^{n_1} g_1(z^q) \varphi(z) + \dots + z^{n_\nu} g_\nu(z^q) \varphi(z)|}{\exp h_m(z)}$$

определяет норму на пространстве $\mathcal{O}_{\varphi,m}$. При этом пространство $\mathcal{O}_{\varphi,m}$ является банаховым, и вложение $\mathcal{O}_{\varphi,m} \subseteq \mathcal{O}_{\varphi,m+1}$ является вполне непрерывным. Хорошо известное описание топологии пространства $P(\Omega)$ (см. [1, предложение 3.1]) позволяет заключить, что пространство $\mathcal{O}_\varphi$ совпадает с индуктивным пределом пространств $\mathcal{O}_{\varphi,m} := (\mathcal{O}_{\varphi,m}; \|\mathbf{g}\|_m)$ относительно вполне непрерывных вложений $\mathcal{O}_{\varphi,m} \subseteq \mathcal{O}_{\varphi,m+1}$, $m > \rho^{-1}$.

6. Доказательство (аппроксимационной) теоремы 1.

Достаточность. Предположим, что индикатор $n_A := \{n_1, \dots, n_\nu\}$ уравнения (1) периодичен, т.е.

$$n_2 - n_1 = n_3 - n_2 = \dots = n_{\nu+1} - n_\nu,$$

где $n_{\nu+1} := n_1 + 3$. Это означает, что выполняется одно из условий: $n_A := \{n_1\}$, то есть индикатор состоит из одного элемента; $n_A := \{0, 1, 2\}$, то есть индикатор состоит из трех элементов.

В первом случае аппроксимационная теорема для однородного уравнения трехсторонней свертки (1) справедлива так как уравнение (1) в этом случае равносильно однородному уравнению

$$\langle S, f(z + \omega_q^0 h) + f(z + \omega_q^1 h) + f(z + \omega_q^2 h) \rangle = 0.$$

Действительно, система линейных уравнений

$$a_0 + \omega_q^n a_1 + \omega_q^{2n} a_2 = b_n, \quad n \in \{0, 1, 2\}$$

в рассматриваемом случае имеет единственное решение $a_0 = a_1 = a_2 = b_0/3$.

Рассмотрим второй случай. После кратного дифференцирования функции $\psi(h) := \langle S, AT_h(f) \rangle$ по h получаем

$$\begin{aligned}\psi^{(n)}(h) &:= \left\langle S, a_0 f^{(n)}(z + \omega_q^0 h) + \omega_q^n a_1 f^{(n)}(z + \omega_q^1 h) + \omega_q^{2n} a_2 f^{(n)}(z + \omega_q^2 h) \right\rangle, \\ \psi^{(n)}(0) &:= \left\langle S, (a_0 + \omega_q^n a_1 + \omega_q^{2n} a_2) f^{(n)} \right\rangle = b_n \left\langle S, f^{(n)} \right\rangle.\end{aligned}$$

Если f является решением однородного уравнения трехсторонней свертки (1), то $\psi^{(n)}(h) = 0$ для любого h из окрестности нуля, значит, $b_n \langle S, f^{(n)} \rangle = 0$ для любого $n \in \{0, 1, \dots\}$. Так как во втором случае все коэффициенты b_n отличны от нуля, то $\langle S, f^{(n)} \rangle = 0$ для любого $n \in \{0, 1, \dots\}$. Это означает, что функция f удовлетворяет уравнению $\langle S, T_h(f) \rangle = 0$. Следовательно, однородное уравнение трехсторонней свертки (1) во втором случае равносильно однородному уравнению свертки $\langle S, T_h(f) \rangle = 0$.

Необходимость. Рассмотрим произвольное однородное уравнение трехсторонней свертки

$$\left\langle S, \sum_{n=0}^2 a_n f(z + \omega_3^n h) \right\rangle = 0, \quad f \in O(\Omega), \quad (3)$$

с индикатором $n_A := \{n_1, n_2\}$. Предположим, что аппроксимационная теорема для однородного уравнения трехсторонней свертки (3) справедлива при любом выборе выпуклой области Ω и функционала S . Дополним индикатор n_A двумя элементами $n_3 := n_1 + 3$ и $n_4 := n_2 + 3$. Замечаем, что $0 < n_3 - n_2 = 3 - (n_2 - n_1) < 3$ и $0 < n_4 - n_3 = n_2 - n_1 < 3$, значит,

$$0 < n_{k+1} - n_k < 3 \quad (4)$$

при любом $k \in \{1, 2, 3\}$. Условие периодичности индикатора $n_A := \{n_1, n_2\}$ в рассматриваемом случае равносильно условию

$$n_2 - n_1 = n_3 - n_2 = n_4 - n_3.$$

Допустим, что это условие нарушено. Тогда существует такое $s \in \{1, 2\}$, что $n_{s+1} - n_s < n_{s+2} - n_{s+1}$ или

$$2n_{s+1} - n_s < n_{s+2}. \quad (5)$$

Выберем произвольное число $\theta \in (0, \pi/3)$ и обозначим символом G_0 угловую область $\{z : |\arg z| < \theta\}$, а символом G'_0 обозначим угловую область $\{z : |\arg z - \pi/3| < \pi/3 - \theta\}$. Пусть

$$\begin{aligned}G_1 &:= \omega_3^1 G_0, \quad G_2 := \omega_3^2 G_0, \quad G'_1 := \omega_3^1 G'_0, \quad G'_2 := \omega_3^2 G'_0, \\ G &= G_0 \cup G_1 \cup G_2, \quad G' = G'_0 \cup G'_1 \cup G'_2.\end{aligned}$$

Согласно свойствам квазиполиномов (см. [3, теорема 1.2.10]) нули $z_m^{(k)}$ целой 3-симметричной функции

$$e(z^3) := \sum_{k=0}^2 \exp \omega_3^k z$$

имеют вид

$$z_m^{(k)} = \frac{2\pi m i}{\omega_3^{k+1} - \omega_3^k} + c_k + \delta_m^{(k)}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad k \in \{0, 1, 2\},$$

где $|\delta_m^{(k)}| < e^{-\varepsilon_0 m}$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и всех достаточно больших m . Лучи

$$z = \frac{2\pi i}{\omega_3^{k+1} - \omega_3^k} t, \quad k \in \{0, 1, 2\},$$

являются серединными для угловых областей G'_0, G'_1, G'_2 и при этом $G' = \mathbb{C} \setminus \bar{G}$. Значит, лишь конечное число нулей 3-симметричного квазиполинома $e(z^3)$ лежит в замыкании $\bar{G}$ множества G .

Следовательно, при надлежащем выборе 3-симметричного полинома $p(z^3)$ все нули целой 3-симметричной функции

$$A(z^3) := \frac{e(z^3)}{p(z^3)} = \frac{1}{p(z^3)} \sum_{k=0}^2 \exp \omega_3^k z$$

будут лежать в множестве $G' = \mathbb{C} \setminus \bar{G}$. При этом все нули целой 3-симметричной функции

$$B(z^3) := \frac{1}{p(-z^3)} \sum_{k=0}^2 \exp \omega_6^{2k+1} z,$$

где $\omega_6 := \exp \frac{\pi}{3} i$, будут лежать в множестве G . Сопряженные диаграммы $\bar{D}_A$, $\bar{D}_B$ функций $A(z^3)$ и $B(z^3)$ совпадают с правильными 3-угольниками с вершинами в точках

$$z_{0,A} = \omega_6^0 = \omega_3^0, \quad z_{1,A} = \omega_6^2 = \omega_3^1, \quad z_{2,A} = \omega_6^4 = \omega_3^2$$

и в точках

$$z_{0,B} = \omega_6^1, \quad z_{1,B} = \omega_6^3, \quad z_{2,B} = \omega_6^5$$

соответственно. Кроме того, $\bar{D}_B = \omega_6 \bar{D}_A$. Пусть ς — вершина правильного шестиугольника $\bar{D}_A \cap \bar{D}_B$, лежащая на пересечении двух прямых: первая из этих прямых проходит через точки $z_{0,A} := 1$, $z_{1,A} := \omega_3$ и задается уравнением $\operatorname{Re} \omega_6^{-1} z = \cos \frac{\pi}{3}$, а вторая прямая проходит через точки $z_{0,B} := \omega_6$, $z_{2,B} := \omega_6^5 = \bar{\omega}_6$ и задается уравнением $\operatorname{Re} z = \cos \frac{\pi}{3}$. Решая систему из этих уравнений, получаем

$$\varsigma = \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Выберем $r \in (r', r'')$, где

$$r' := |\varsigma + 1| = \left| \frac{3}{2} + i \frac{1}{2\sqrt{3}} \right| = \sqrt{\frac{7}{3}}, \quad r'' := 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Ясно, что $1 < r' < r''$. Стало быть, сопряженные диаграммы $\bar{D}_A$, $\bar{D}_B$ функций $A(z^3)$ и $B(z^3)$ лежат в круговой области $\Omega_r := \{z : |z| < r\}$. Значит,

$$A(z^3), B(z^3) \in P(\Omega_r).$$

Сопряженная диаграмма $\bar{D}_{AB}$ произведения $A(z^3)B(z^3)$ совпадает с правильным шестиугольником. Вершины этого шестиугольника

$$\omega_6^0 + \omega_6^1, \quad \omega_6^1 + \omega_6^2, \quad \omega_6^2 + \omega_6^3, \quad \omega_6^3 + \omega_6^4, \quad \omega_6^4 + \omega_6^5, \quad \omega_6^5 + \omega_6^6$$

лежат вне области Ω_r . Действительно, для любых $k \in \{0, \dots, 5\}$ имеем

$$\begin{aligned} |\omega_6^k + \omega_6^{k+1}|^2 &= \left(\cos \frac{\pi k}{3} + \cos \frac{\pi(k+1)}{3} \right)^2 + \left(\sin \frac{\pi k}{3} + \sin \frac{\pi(k+1)}{3} \right)^2 = \\ &= 2 + 2 \left(\cos \frac{\pi k}{3} \cos \frac{\pi(k+1)}{3} + \sin \frac{\pi k}{3} \sin \frac{\pi(k+1)}{3} \right) = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{3} = 3. \end{aligned}$$

При этом по свойствам квазиполиномов вдоль лучей

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(\omega_6^k + \omega_6^{k+1}), \quad k \in \{0, \dots, 5\}$$

выполняются асимптотические оценки

$$A(z^3)B(z^3) > \exp\{\sqrt{3}|z| - o(1)|z|\}, \quad |z| \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Положим

$$a(z^3) := \sum_{k=0}^5 \exp\{\omega_6^k \varsigma z\}, \quad \varphi(z) := A(z^3) + z^{n_{s+1}-n_s} B(z^3)$$

и рассмотрим целую функцию

$$F(z) := z^{n_{s+1}} a(z^3) \varphi(z) = z^{n_{s+1}} a(z^3) A(z^3) + z^{2n_{s+1}-n_s} a(z^3) B(z^3).$$

Сопряженная диаграмма функции $a(z^3)$ совпадает с шестиугольником $\bar{D}_A \cap \bar{D}_B$, а сопряженная диаграмма функции $\varphi(z)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\bar{D}_A \cup \bar{D}_B$, значит, сопряженная диаграмма $\bar{D}_F$ функции $F(z)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества

$$(\bar{D}_A \cap \bar{D}_B + \bar{D}_A) \cup (\bar{D}_A \cap \bar{D}_B + \bar{D}_B).$$

Из геометрических соображений вытекает, что множество $\bar{D}_F$ лежит в круге $|z| \leq r' := |\varsigma + 1|$. Значит, целая функция $F(z)$ тоже принадлежит пространству $P(\Omega_r)$ и, следовательно, 2-функция

$$\mathbf{a}(z) := \begin{cases} (0, a(z)), & \text{если } s = 1, \\ (za(z), 0), & \text{если } s = 2, \end{cases}$$

принадлежит пространству $\mathbf{O}_\varphi := \mathbf{O}_\varphi(\Omega_r)$.

Предположим, что произвольное решение $f \in O(\Omega_r)$ однородного уравнения 3 можно аппроксимировать элементарными решениями этого уравнения в топологии пространства $O(\Omega_r)$. Тогда в силу предложения 1 и теоремы 2 2-полиномы плотны в пространстве $\mathbf{O}_\varphi$. Значит, существует обобщенная последовательность $\mathbf{p}_\sigma(z) := (p_{\sigma,1}(z), p_{\sigma,2}(z))$ 2-полиномов, сходящаяся к 2-функции $\mathbf{a}(z)$ в топологии пространства $\mathbf{O}_\varphi$. Значит, обобщенная последовательность

$$\Phi_\sigma(z) := p_\sigma(z)(A(z^3) + z^{n_{s+1}-n_s}B(z^3)) = (z^{n_1}p_{\sigma,1}(z^3) + z^{n_2}p_{\sigma,2}(z^3))(A(z^3) + z^{n_{s+1}-n_s}B(z^3))$$

сходится к функции $F(z)$ в топологии пространства $P(\Omega_r)$. При этом

$$p_\sigma(z) := z^{n_1}p_{\sigma,1}(z^3) + z^{n_2}p_{\sigma,2}(z^3) \rightarrow z^{n_{s+1}}a(z^3)$$

равномерно на компактах. Если $s = 1$, то в силу предложения 2

$$p_{\sigma,2}(z^3) = \frac{1}{3z^{n_2}} \sum_{k=0}^2 \omega_3^{-n_2 k} p_\sigma(\omega_3^k z) \rightarrow a(z^3) \quad (7)$$

равномерно на компактах. Если $s = 2$, то

$$p_{\sigma,1}(z^3) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 p_\sigma(\omega_3^k z) \rightarrow z^3 a(z^3) \quad (8)$$

равномерно на компактах. Ниже мы покажем, что соотношения (7) и (8) невозможны.

Воспользуемся представлением

$$\Phi_\sigma(z) = z^{k_s} P_\sigma(z^3) B(z^3) + C_\sigma(z), \quad (9)$$

где

$$k_s := \begin{cases} 2n_{s+1} - n_s, & \text{если } s = 1, \\ 2n_{s+1} - n_s - 3, & \text{если } s = 2, \end{cases} \quad P_\sigma(z^3) := \begin{cases} p_{\sigma,2}(z^3), & \text{если } s = 1, \\ p_{\sigma,0}(z^3), & \text{если } s = 2, \end{cases}$$

$$C_\sigma(z) = \sum_{n \in n_A} z^n p_{\sigma,n}(z^3) A(z^3) + z^{n_s} p_{\sigma,n_s}(z^3) B(z^3).$$

Выберем $r_1 \in (r, r'')$ и рассмотрим множество

$$V := \{\psi \in P(\Omega_r) : |\psi(z)| \leq \exp r_1 |z|\}.$$

Это множество является окрестностью нуля в $P(\Omega_r)$ (см. [1, теорема 3.3]). При некотором $M \geq 1$ все $\Phi_\sigma(z)$ принадлежат MV . Тогда для всех $z \in \mathbb{C}$ и всех $\sigma \in \Sigma$ будет выполняться неравенство

$$|\Phi_\sigma(z)| \leq M \exp r_1 |z|.$$

Выберем $r_2 \in (r_1, r'')$ и рассмотрим целую 6-симметричную функцию

$$D(z^3) := \sum_{k=0}^5 \exp[(r_2 - r_1)\gamma\omega_6^k z].$$

В силу (6) при некоторых $r_3 \in (0, r'' - r_2)$, $M' > 0$ на границе ∂G множества G имеет место равномерная по $\sigma \in \sum$ оценка

$$\left| \frac{D(z^3)\Phi_\sigma(z)}{A(z^3)B(z^3)} \right| \leq M' \exp[-r_3|z|]. \quad (10)$$

Отступим от границы множества G и рассмотрим множество $G_{\theta'} := \{z : |\arg z| < \theta', |z| > 1\} \subseteq G$, где $\theta' \in (0, \theta)$. Выберем произвольную точку $z \in G_{\theta'}$ и проинтегрируем функцию

$$\frac{\Phi_\sigma(h)D(h^3)h^{5-k_s}}{A(h^3)B(h^3)(h^3 - z^3)}$$

по положительно ориентированной границе $(\partial G)_+$ множества G . В силу (5) при $s = 1$ выполняются неравенства $k_s := 2n_2 - n_1 < n_3 \leq 4$, значит, $k_s \leq 3$. При $s = 2$ имеем $k_s := n_3 - n_2 = 3 - (n_2 - n_1) < 3$. Следовательно, интегрируемая функция аналитична в граничных точках множества G . Используя представление (9), получим

$$I_\sigma(z) = I_{\sigma,1}(z) + I_{\sigma,2}(z),$$

где

$$I_\sigma(z) := \int_{(\partial G)_+} \frac{\Phi_\sigma(h)D(h^3)h^{5-k_s}}{A(h^3)B(h^3)(h^3 - z^3)} dh, \quad I_{\sigma,1}(z) := \int_{(\partial G)_+} \frac{P_\sigma(h^3)D(h^3)h^5}{A(h^3)(h^3 - z^3)} dh,$$

$$I_{\sigma,2}(z) := \int_{(\partial G)_+} \frac{C_\sigma(h)D(h^3)h^{5-k_s}}{A(h^3)B(h^3)(h^3 - z^3)} dh.$$

Из оценки (10) вытекает равномерная по $\sigma \in \sum$ по $z \in \partial G$ оценка

$$|I_\sigma(z)| \leq \text{const}. \quad (11)$$

Поскольку все нули целой функции $A(z^3)$ лежат в $G' = \mathbb{C} \setminus \bar{G}$, то

$$I_{\sigma,1}(z) = \frac{P_\sigma(z^3)D(z^3)z^3}{A(z^3)} \sum_{k=0}^2 \left(\frac{h^2}{3h^2} \right) \Big|_{h=\omega_3^k z} = \frac{P_\sigma(z^3)D(z^3)z^3}{A(z^3)}.$$

Покажем, что интеграл $I_{\sigma,2}(z)$ равен нулю. Действительно,

$$I_{\sigma,2}(z) = \sum_{n \in n_A} I'_{\sigma,n}(z) + I''_\sigma(z)$$

где

$$I'_{\sigma,n}(z) = \int_{(\partial G)_+} \frac{p_{\sigma,n}(h^3)D(h^3)h^{5+n-k_s}}{B(h^3)(h^3 - z^3)} dh = - \int_{(\partial G')_+} \frac{p_{\sigma,n}(h^3)D(h^3)h^{5+n-k_s}}{B(h^3)(h^3 - z^3)} dh,$$

$$I''_\sigma(z) = \int_{(\partial G)_+} \frac{p_{\sigma,n_s}(h^3)D(h^3)h^{5+n_s-k_s}}{A(h^3)(h^3 - z^3)} dh.$$

Поскольку все нули целой функции $B(h^3)$ лежат в G и $z \in G_{\theta'} \subseteq G$, то $I'_{\sigma,n}(z) = 0$ для любого $n \in n_A$. При этом все нули целой функции $A(z^3)$ лежат в $G' = \mathbb{C} \setminus \bar{G}$, значит,

$$I''_\sigma(z) = \sum_{k=0}^2 \int_{(\partial G_k)_+} \frac{p_{\sigma,n_s}(h^3)D(h^3)h^{5+n_s-k_s}}{A(h^3)(h^3 - z^3)} dh =$$

$$= \frac{p_{\sigma,n_s}(z^3)D(z^3)}{A(z^3)} \sum_{k=0}^2 \left(\frac{h^{5+n_s-k_s}}{3h^2} \right) \Big|_{h=\omega_3^k z} = \frac{p_{\sigma,n_s}(z^3)D(z^3)z^{3+n_s-k_s}}{3A(z^3)} \sum_{k=0}^2 \omega_3^{k(n_s-k_s)} = 0,$$

так как целое число $l_s := n_s - k_s$ не делится на 3 для любого $s \in \{1; 2\}$. Действительно, если $s = 1$, то в силу (4) и (5) имеем $-3 = n_1 - n_3 < l_s = -2n_2 < 0$. Если $s = 2$, то $-6 = n_2 - n_4 - 3 < l_s = 2n_2 - 2n_1 - 3 < -3$. Далее, в силу (11)

$$|z^3 P_\sigma(z^3) D(z^3)| \leq \text{const } |A(z^3)|$$

для любого $z \in G_{\theta'}$ и любого $\sigma \in \Sigma$. Значит, в силу (7) и (8) для предельной функции имеем:

$$\begin{aligned} |z^3 a(z^3) D(h^3)| &\leq \text{const } |A(z^3)|, & z \in G_{\theta'}, & s = 1; \\ |z^6 a(z^3) D(h^3)| &\leq \text{const } |A(z^3)|, & z \in G_{\theta'}, & s = 2. \end{aligned}$$

Но эти неравенства не могут выполняться для всех $z \in G_{\theta'}$, если θ и θ' выбраны достаточно близко к $\pi/3$, так как рост функций $z^3 a(z^3) D(z^3)$ и $z^6 a(z^3) D(z^3)$ на лучах $|\arg z| = \pi/3$ больше роста функции $A(z^3)$. Необходимость доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях// Мат. сб. — 1972. — 87 (129), № 4. — С. 459–489.
2. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях// Мат. сб. — 1972. — 88, № 1. — С. 3–30.
3. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
4. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной// Мат. сб. — 1991. — 182, № 6. — С. 828–848.
5. Шишкин А. Б. Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — 14, № 1. — С. 47–65.
6. Шишкин А. Б. Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2016. — 447. — С. 129–170.

Татаркин Александр Александрович
Кубанский государственный университет, Краснодар
E-mail: tiamatory@gmail.com

Шишкин Андрей Борисович
Кубанский государственный университет, Краснодар
E-mail: shishkin-home@mail.ru