Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Томин, И. В. Томина, Об одной абстрактной формуле регуляризованных следов дискретных операторов и ее применениях, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 142–152

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-142-152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:03:59

ОБ ОДНОЙ АБСТРАКТНОЙ ФОРМУЛЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

© 2021 г. Н. Г. ТОМИН, И. В. ТОМИНА

Аннотация. В статье приведено доказательство абстрактной формулы регуляризованных следов дискретных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве, принадлежащей первому автору. Эта формула удобна для применений и является обобщением на случай следов высших порядков полученной ранее формулы первого регуляризованного следа. Рассмотрено применение полученной формулы к широкому классу дискретных операторов, действующих в пространстве Бергмана и в определенном смысле обобщающих оператор Грибова из реджеонной теории поля.

Ключевые слова: гильбертово пространство, дискретный оператор, линейный несамосопряженный оператор, спектральная теория, формула регуляризованного следа, пространство Бергмана, реджеонная теория поля, оператор Грибова.

AN ABSTRACT FORMULA FOR REGULARIZED TRACES OF DISCRETE OPERATORS AND ITS APPLICATIONS

© 2021 N. G. TOMIN, I. V. TOMINA

ABSTRACT. In this paper, we prove an abstract formula for regularized traces of discrete operators in a separable Hilbert space. This formula is a generalization of the formula for the first regularized trace to the case of higher-order traces. We also discuss applications of the formula obtained to a wide class of discrete operators acting in the Bergman space that are generalizations of the Gribov operator from Reggeon field theory.

Keywords and phrases: Hilbert space, discrete operator, linear non-self-adjoint operator, spectral theory, regularized trace formula, Bergman space, Reggeon field theory, Gribov operator.

AMS Subject Classification: 35P20, 47A10, 47B37, 32K15

1. Введение. В статье приведено доказательство принадлежащей Н. Г. Томину абстрактной формулы регуляризованных следов дискретных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве. Эта формула удобна для применений и является обобщением на случай следов высших порядков полученной в 2001 г. формулы первого регуляризованного следа (см. [9]).

1.1. Предварительные сведения. Пусть H — комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в H , $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \lambda_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортонормированная полная система в H . Тогда при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ оператор

$$T^\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^\alpha(\cdot, u_n)u_n, \quad \mathcal{D}(T^\alpha) = \left\{ f \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2\alpha} |(f, u_n)|^2 < +\infty \right\},$$

является линейным самосопряженным в H оператором с собственными числами λ_n^α и соответствующими им собственными векторами u_n , $n \in \mathbb{N}$. При $\alpha < 0$ оператор T^α ограничен и компактен, при $\alpha = 0$ совпадает с единичным оператором E в H , при $\alpha > 0$ является дискретным в H , то

есть его резольвента компактна в H . Полагаем $T = T^1$, тогда оператор T^α есть степень порядка α от положительного самосопряженного в гильбертовом пространстве H оператора T . Пусть $R_\lambda = (T - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора T . Через $\{\lambda'_n\}_{n=1}^{+\infty}$ обозначаем последовательность всех попарно различных собственных чисел оператора T , занумерованных в порядке возрастания. Далее, ν'_n есть кратность собственного числа λ'_n , $\Delta\lambda'_n = \lambda'_{n+1} - \lambda'_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Для замкнутого линейного оператора P , действующего в H , при $0 \leq \gamma \leq 1$ и $\lambda \neq \lambda_n$ ($n \in \mathbb{N}$) мы говорим, что оператор P подчиняется оператору $(T - \lambda E)^\gamma$ и пишем $P \prec (T - \lambda E)^\gamma$, если $\mathcal{D}(P) \supset \mathcal{D}(T - \lambda E) = \mathcal{D}(T)$ и $\|Pu\| \leq A_0 \|(T - \lambda E)^\gamma u\|$ при некотором $A_0 > 0$ и любом $u \in \mathcal{D}(T)$. Отметим, что $P \prec (T - \lambda E)^\gamma$ в том и только том случае, когда линейный оператор $P(T - \lambda E)^{-\gamma}$ может быть продолжен до ограниченного на H оператора.

Рассмотрим возмущенный оператор $\tilde{T} = T + P$ и его собственные числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$, занумерованные в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей.

Через $|\cdot|_1$ и $\text{Tr}(\cdot)$ обозначаем соответственно ядерную норму и след ядерного оператора в гильбертовом пространстве H (сведения о ядерных операторах в гильбертовых пространствах и их свойствах можно найти, например, в [2]).

1.2. Формулировки теорем. Следующая теорема анонсирована в [6] и доказана в [7].

Теорема 1. Пусть

$$0 < s \leq 1, \quad l \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \gamma \leq (1-s)l/(l+1), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{-s} < +\infty, \quad P \prec T^\gamma.$$

Тогда оператор $\tilde{T} = T + P$ имеет ядерную резольвенту, и существуют подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ и последовательность вещественных чисел $\{a_m\}_{m=1}^\infty$, для которых выполняются неравенства $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$ и справедлива формула следов

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{n_m} (\mu_n - \lambda_n) + \oint_{\Gamma_m} \sum_{j=1}^l \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \text{Tr}((PR_\lambda)^j) d\lambda \right) = 0, \quad (1)$$

где Γ_m — пробегаемая в положительном направлении окружность радиуса a_m с центром в нуле на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В частности, при $l = 1$ формула (1) принимает вид

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{n_m} (\mu_n - \lambda_n - (Pu_n, u_n)) = 0. \quad (2)$$

Ранее, чем в [7], а именно, в работах [4, 5] было доказано, что если оператор T имеет ядерную резольвенту, а P ограничен в H , то для возмущенного оператора $\tilde{T} = T + P$ при некотором выборе последовательностей $\{n_m\}_{m=1}^{+\infty}$ и $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$ выполняется формула следов (2). Этот результат является частным случаем теоремы 1 при $s = 1$, $l = 1$.

Отметим, что во всех указанных выше статьях [4–7], как и в ряде других работ, приводятся условия, обеспечивающие лишь существование некоторой подпоследовательности натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{+\infty}$, удовлетворяющей условию $\lambda_{n_m} < \lambda_{n_m+1}$ при всех $m \in \mathbb{N}$ и такой, что при соответствующем выборе последовательности $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$ справедлива формула следов (1) или ее частный случай (2). В связи с этим возникает важная для приложений задача нахождения удобных для проверки условий, при которых формула следов (1) выполняется не для одной, а для всех таких последовательностей $\{n_m\}_{m=1}^{+\infty}$ при надлежащем выборе последовательностей $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$, то есть приобретает вид

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\lambda_n \leq \lambda'_m} (\mu_n - \lambda_n) + \oint_{\Gamma_m} \sum_{j=1}^l \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \text{Tr}((PR_\lambda)^j) d\lambda \right) = 0 \quad (3)$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\lambda_n \leq \lambda} (\mu_n - \lambda_n) + \oint_{\Gamma_m} \sum_{j=1}^l \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \operatorname{Tr}((PR_\lambda)^j) d\lambda \right) = 0.$$

Для $l = 1$ в [8] анонсирована и в [9] доказана следующая ниже теорема 2. В ней приведены удобные для проверки условия, при выполнении которых формула следов (2) справедлива для любой последовательности $\{n_m\}_{m=1}^{+\infty}$, удовлетворяющей неравенству $\lambda_{n_m} < \lambda_{n_m+1}$ или, что то же самое, для последовательности $\{n_m\}_{m=1}^{+\infty}$ такой, что $\lambda_{n_m} = \lambda'_m$ при любом $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

- (i) $\Delta\lambda'_n \geq C_1(\lambda'_{n+1})^q$ при $q \in (0, 1)$, $C_1 > 0$ и всех достаточно больших n ;
- (ii) $\nu'_n \leq C_2(\lambda'_n)^\beta$ при $0 \leq \beta < q$, $C_2 > 0$ и всех достаточно больших n ;
- (iii) $P \prec T^\gamma$ при $0 \leq \gamma < (q - \beta)/2$.

Тогда оператор $\tilde{T} = T + P$ имеет ядерную резольвенту, и для его собственных чисел μ_n справедлива формула следов

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sum_{\lambda_n \leq \lambda} (\mu_n - \lambda_n - (Pu_n, u_n)) = 0. \quad (4)$$

Недостатком этой теоремы является то, что, в отличие от теоремы 1, в ней рассматривается лишь случай первого регуляризованного следа $l = 1$. Однако потенциал статьи [9] этим случаем не исчерпывается. Справедлива следующая принадлежащая первому автору настоящей статьи основная теорема, обобщающая теорему 2 на случай $l > 1$.

Теорема 3. Предположим, что выполняются следующие условия:

- (i) $\Delta\lambda'_n \geq C_1(\lambda'_{n+1})^q$ при $q \in (0, 1)$, $C_1 > 0$ и всех достаточно больших n ;
- (ii) $\nu'_n \leq C_2(\lambda'_n)^\beta$ при $0 \leq \beta < q$, $C_2 > 0$ и всех достаточно больших n ;
- (iii) $P \prec T^\gamma$ при $0 \leq \gamma < q - \beta$.

Тогда возмущенный оператор $\tilde{T} = T + P$ имеет ядерную резольвенту, и при любом натуральном $l > \gamma/(q - \beta - \gamma)$ для его собственных чисел μ_n , занумерованных натуральными числами в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей, справедлива формула следов

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\lambda_n \leq \lambda'_m} (\mu_n - \lambda_n) + \oint_{\Gamma_m} \sum_{j=1}^l \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \operatorname{Tr}((PR_\lambda)^j) d\lambda \right) = 0, \quad (5)$$

где Γ_m — пробегаемая в положительном направлении окружность радиуса $r_m = (\lambda'_m + \lambda'_{m+1})/2$ с центром в нуле на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Условия на параметры, при которых согласно теореме 3 справедлива формула следов (5), могут быть представлены в другом, иногда более удобном виде:

$$0 \leq \beta < q < 1, \quad l \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \gamma < (q - \beta)l/(l + 1). \quad (6)$$

Замечание 1. Условие положительности невозмущенного оператора T не является существенным. Теорема 3, как и ее частный случай теорема 2, остается верной и при $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, $\lambda_n \rightarrow +\infty$, если только при $\lambda_1 \leq 0$ условие (iii) заменить следующим условием:

- (iv) $P \prec (T - \lambda_0 E)^\gamma$ при $0 \leq \gamma < q - \beta$ и каком-либо $\lambda_0 < \lambda_1$.

Отметим, что теорема 3 была анонсирована ранее в [13], однако условие, налагаемое в этой теореме на параметр l и имеющее вид $l > \gamma/(q - \beta - \gamma)$ или, согласно (6), $0 \leq \gamma < (q - \beta)l/(l + 1)$, в [13] в случае $\beta(l - 1) > 0$ было записано неточно, и мы исправляем здесь эту неточность.

Всюду далее через c обозначаем различные положительные постоянные, не зависящие от основных переменных, входящих в соответствующие неравенства.

1.3. *Вывод основной абстрактной формулы следов.* Приведем доказательство основной теоремы 3.

Условия теоремы 3 отличаются от условий теоремы 2 только тем, что в них вместо неравенства $0 \leq \gamma < (q - \beta)/2$ рассматривается неравенство $0 \leq \gamma < q - \beta$. Формально вывод формулы следов (4) или, что то же самое, формулы следов (5) при $l = 1$, проводился в [9] при условии $0 \leq \gamma < (q - \beta)/2$. Однако, как показывает анализ доказательства теоремы 2 в [9], все его этапы, результаты и выводы остаются верными и в общем случае $0 \leq \gamma < q - \beta$, за исключением доказательства неравенства (19) статьи [9] (или, что то же самое, приведенного ниже неравенства (10)); доказательство этого неравенства в [9] проведено для случая $0 \leq \gamma < 1/2$ и без корректировки может быть распространено только на случай $\gamma = 1/2$. Таким образом, в [9] содержится доказательство теоремы 3 при $l = 1$, и в нем практически все подготовлено для ее доказательства при $l \geq 2$. Мы приводим здесь вывод формулы следов (5) при всех $l \geq 1$ одновременно, в случае $l = 1$ он, в сущности, повторяет ее вывод в [9], а в случае $l \geq 2$ может рассматриваться как дополнение к доказательству теоремы 2 в [9]. Далее мы стараемся придерживаться обозначений и терминологии статьи [9], для уточнения деталей отсылаем к указанной статье.

Применяя формулы (15) и (14) работы [9] к контурам Γ_m , получаем согласно [9], что существует натуральное число N такое, что для всех $m \geq N$ при любом натуральном l справедлива формула

$$\sum_{\lambda_n \leq \lambda'_m} (\mu_n - \lambda_n) + \sum_{j=1}^l \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \oint_{\Gamma_m} \text{Tr } Q_\lambda^j d\lambda = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2\pi i j} \oint_{\Gamma_m} \text{Tr } Q_\lambda^j d\lambda \equiv J_l(\Gamma_m), \quad (7)$$

где $Q_\lambda = PR_\lambda$ и, в отличие от формул (14) и (15) из [9], направление обхода окружности Γ_m здесь и далее принимается положительным (против часовой стрелки).

В силу условия (iii) теоремы 3 линейный оператор $PT^{-\gamma}$ ограничен в H и $\|PT^{-\gamma}\| \leq A_0$, где $\|\cdot\|$ — обычная норма линейного ограниченного оператора в H . В [9] доказано, что операторы R_λ , Q_λ , $B_\lambda \equiv T^\gamma R_\lambda$ являются ядерными в H операторами в области $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \lambda_n \text{ при всех } n \in \mathbb{N}\}$, а оператор $\widetilde{R}_\lambda = (\widetilde{T} - \lambda E)^{-1}$ является ядерным в H в области

$$\Omega' = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \|B_\lambda\| < 1/A_0 \right\} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_n| > A_0 \lambda_n^\gamma \text{ при всех } n \in \mathbb{N} \right\} \subset \Omega.$$

Так как $Q_\lambda = PT^{-\gamma} B_\lambda$, то при всех $\lambda \in \Omega$ выполняются неравенства $\|Q_\lambda\| \leq A_0 \|B_\lambda\|$ и $|Q_\lambda|_1 \leq A_0 |B_\lambda|_1$. Согласно [9] окружности Γ_m при всех $m \geq N$ лежат в области Ω' и, следовательно, являются компактными множествами в Ω' , поэтому для всех таких m выполняются неравенства $\max_{\Gamma_m} |B_\lambda|_1 < 1/A_0$ и

$$\max_{\Gamma_m} |Q_\lambda|_1 \leq A_0 \max_{\Gamma_m} |B_\lambda|_1 < 1. \quad (8)$$

С учетом (7), (8) и известных свойств ядерных операторов в гильбертовом пространстве [2] (включая неравенство $|\text{Tr } A| \leq |A|_1$, справедливое для любого ядерного в H оператора A) получаем, что для всех $m \geq N$ при любом $l \geq 1$ выполняются неравенства

$$2(l+1)\pi |J_l(\Gamma_m)| \leq \oint_{\Gamma_m} \sum_{j=l+1}^{\infty} |\text{Tr } Q_\lambda^j| |d\lambda| \leq \oint_{\Gamma_m} \sum_{j=l+1}^{\infty} \|Q_\lambda\| \|Q_\lambda\|_1^{j-1} |d\lambda| \leq \oint_{\Gamma_m} \frac{\|Q_\lambda\| \|Q_\lambda\|_1^l}{1 - \|Q_\lambda\|_1} |d\lambda|,$$

откуда для таких m и l вытекает следующая оценка при $c_l(\Gamma_m) = A_0^{l+1} / (2(l+1)\pi(1 - \max_{\Gamma_m} |Q_\lambda|_1))$:

$$|J_l(\Gamma_m)| \leq c_l(\Gamma_m) \left(\max_{\Gamma_m} |B_\lambda|_1 \right)^l \oint_{\Gamma_m} \|B_\lambda\| |d\lambda|. \quad (9)$$

Согласно формулам (19) и (24) статьи [9] при всех $m \geq N$ справедливы неравенства

$$\oint_{\Gamma_m} \|B_\lambda\| |d\lambda| \leq cr_m^\gamma \ln(1 + r_m), \quad (10)$$

$$\max_{\Gamma_m} |B_\lambda|_1 \leq cr_m^{-\delta} \ln(1 + r_m), \quad (11)$$

где $\delta = q - \beta - \gamma \in (0, 1)$. Ниже, в конце доказательства теоремы, будет приведен вывод неравенства (10), охватывающий не рассмотренный в [9] случай $1/2 \leq \gamma < 1$.

Из (11) и левой части двойного неравенства (8) следует, что $\max_{\Gamma_m} |Q_\lambda|_1 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$, поэтому последовательность $\{c_l(\Gamma_m)\}_{m=N}^{+\infty}$ имеет конечный предел при $m \rightarrow +\infty$ и, следовательно, ограничена:

$$c_l(\Gamma_m) \leq c, \quad (12)$$

где положительная постоянная c не зависит от m .

Применяя неравенства (9), (10), (11) и (12), находим, что при всех $m \geq N$ для любого целого $l \geq 1$ выполняется неравенство

$$|J_l(\Gamma_m)| \leq cr_m^{\gamma-\delta l} \ln^{l+1}(1+r_m), \quad (13)$$

где положительная постоянная c не зависит от m . Так как по условию теоремы имеем $l > \gamma/\delta$, то $\gamma - \delta l < 0$ и из (13) получаем $J_l(\Gamma_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$. Но тогда из (7) следует, что для любого натурального числа $l > \gamma/(q - \beta - \gamma)$ выполняется предельное соотношение (5), при $0 \leq \gamma < (q - \beta)/2$ и $l = 1$ равносильное (4).

Для завершения доказательства теоремы остается доказать неравенство (10) в случае $1/2 \leq \gamma < 1$. Из приведенного для случая $0 \leq \gamma < 1/2$ в [9] доказательства неравенства (10) следует, что оно справедливо для любого $\gamma \in [0, 1)$, для которого выполняется неравенство

$$\|B_\lambda\| \leq \frac{cr_m^{\gamma-1}}{\psi_m(\theta)}, \quad (14)$$

где $m \geq N$, $\lambda = r_m e^{i\theta} \in \Gamma_m$, $|\theta| \leq \pi$, c — положительная постоянная, зависящая только от γ , $\psi_m(\theta) = \max\{|\sin \theta|, v_m\}$ при $|\theta| < \pi/2$ и $\psi_m(\theta) = 1$ при $\pi/2 \leq |\theta| \leq \pi$; $v_m = \Delta \lambda'_m / (2r_m) \in [0, 5C_1 r_m^{q-1}, 1)$. Мы приведем здесь доказательство неравенства (14) в общем случае $0 \leq \gamma < 1$. Даже в случае $0 \leq \gamma < 1/2$ это доказательство отличается от изложенного в [9].

Пусть $0 \leq \gamma < 1$, $m \geq N$, $\lambda = r_m e^{i\theta} \in \Gamma_m$, $|\theta| \leq \pi$. Тогда

$$\|B_\lambda\| = \max_{n \geq 1} \frac{(\lambda'_n)^\gamma}{|\lambda'_n - \lambda|} \leq \max_{u \in F_m} \varphi(u), \quad (15)$$

где функция $\varphi(u) = u^\gamma / |u - \lambda| = u^\gamma / \sqrt{(u - r_m \cos \theta)^2 + r_m^2 \sin^2 \theta}$ определена и непрерывна на множестве $F \supset F_m \equiv [0, \lambda'_m] \cup [\lambda'_{m+1}, +\infty)$, где $F = [0, +\infty)$ при $0 < |\theta| \leq \pi$ и $F = [0, r_m) \cup (r_m, +\infty)$ при $\theta = 0$.

Функция $\varphi(u)$ непрерывна на ограниченном замкнутом промежутке $[0, \lambda'_m]$ и на неограниченном замкнутом промежутке $[\lambda'_{m+1}, +\infty)$, причем в силу неравенства $0 \leq \gamma < 1$ выполняется предельное соотношение $\varphi(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow +\infty$. Поэтому функция $\varphi(u)$ ограничена и достигает своего наибольшего значения на каждом из этих промежутков, а следовательно, и на их объединении, то есть на множестве F_m . С учетом дифференцируемости функции $\varphi(u)$ при всех $u \in F_m \setminus \{0\}$, равенства $\varphi(0) = 0$, а также справедливого всюду на $F_m \setminus \{0\}$ неравенства $\varphi(u) > 0$ и предельного соотношения $\varphi(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow +\infty$, получаем, что наибольшее значение функции $\varphi(u)$ на множестве F_m может достигаться лишь в граничных точках λ'_m , λ'_{m+1} множества F_m и в нулях функции $\varphi'(u)$, лежащих внутри множества F_m , то есть принадлежащих множеству $F_m^0 = (0, \lambda'_m) \cup (\lambda'_{m+1}, +\infty)$. Для любых $u \in F \setminus \{0\}$, в частности, для любых $u \in F_m^0$, справедливо равенство $\varphi'(u) = u^{\gamma-1} p(u) / |u - \lambda|^3$, где $p(u) = (\gamma - 1)u^2 + (1 - 2\gamma)ur_m \cos \theta + \gamma r_m^2$. Следовательно, принадлежащие F_m^0 нули функции $\varphi'(u)$ совпадают с входящими в множество F_m^0 положительными корнями квадратного трехчлена $p(u)$.

Так как $0 \leq \gamma < 1$, то старший коэффициент $\gamma - 1$ квадратного трехчлена $p(u)$ отрицателен, а $p(0) = \gamma r_m^2 \geq 0$, поэтому $p(u)$ не может иметь более одного положительного корня, и если такой корень существует, то он является большим корнем для $p(u)$, то есть равен

$$u_\theta = \frac{\sqrt{1 - (2\gamma - 1)^2 \sin^2 \theta} - (2\gamma - 1) \cos \theta}{2(1 - \gamma)} \cdot r_m \quad (16)$$

и, следовательно, удовлетворяет неравенству

$$u_\theta \leq \frac{1 + |2\gamma - 1|}{2(1 - \gamma)} \cdot r_m = \max \left\{ 1, \frac{\gamma}{1 - \gamma} \right\} \cdot r_m. \quad (17)$$

Ввиду (15) получаем, что если $0 \leq \gamma < 1$, $m \geq N$, $\lambda = r_m e^{i\theta} \in \Gamma_m$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ и u_θ находится по формуле (16), то справедливо неравенство

$$\|B_\lambda\| \leq \max_{u \in W} \varphi(u), \quad (18)$$

где $W = \{\lambda'_m, \lambda'_{m+1}\}$, если $u_\theta \notin F_m^0$ и $W = \{\lambda'_m, \lambda'_{m+1}, u_\theta\}$, если $u_\theta \in F_m^0$.

Так как $\lambda'_m < r_m$, $\lambda'_{m+1} < 2r_m$ и для $u_\theta \in F_m^0$ справедливо неравенство (17), то для любого $u \in W$ находим $\varphi(u) \leq C_0(\gamma)r_m^\gamma/|u - \lambda|$, где $C_0(\gamma) = \max\{2^\gamma, (\gamma/(1 - \gamma))^\gamma\}$.

Нетрудно проверить, что при любых $u \in F_m$ и $\lambda = r_m e^{i\theta} \in \Gamma_m$, $|\theta| \leq \pi$, выполняется использовавшееся ранее в [9] неравенство $|u - \lambda| \geq r_m \psi_m(\theta)$. Так как $W \subset F_m$, то, применяя это неравенство, получаем, что при всех $u \in W$ справедливо неравенство $\varphi(u) \leq C_0(\gamma)r_m^\gamma/(r_m \psi_m(\theta))$. Ввиду (18) это означает, что неравенство (14) справедливо при $c = C_0(\gamma) = \max\{2^\gamma, (\gamma/(1 - \gamma))^\gamma\}$. Тем самым неравенство (14) доказано при всех $\gamma \in [0, 1)$, причем при $0 \leq \gamma < 1/2$ с тем же числовым множителем $c = 2^\gamma$, который был получен в [9].

Дальнейший вывод неравенства (10) на основе (14) при $0 \leq \gamma < 1$ повторяет ее вывод в [9] при $0 \leq \gamma < 1/2$ с учетом соответствующего значения числового множителя c в (14).

Теорема доказана.

2. Приложения. Теорема 3 удобна для получения конкретных формул регуляризованных следов, так как выполнение ее условий во многих важных для приложений случаях нетрудно проверить. Приведем здесь лишь одно из таких применений этой теоремы, а именно, выведем конкретные формулы регуляризованных следов для некоторого обобщения оператора Грибова в пространстве Бергмана аналитических функций на комплексной плоскости.

2.1. Обозначения и предварительные сведения. Пусть B — гильбертово пространство Бергмана [11], состоящее из аналитических на $\mathbb{C}$ функций $f(z)$ с конечной нормой $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$, где

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g(z)} e^{-|z|^2} dx dy —$$

скалярное произведение в B . Функции $e_n(z) = z^n/\sqrt{n!}$ при $n \geq 0$ образуют полную ортонормированную систему в B . При любых целых неотрицательных n и k полагаем

$$\lambda_{n,k} = \begin{cases} n(n-1) \cdots (n-k+1), & \text{если } n \geq 0 \text{ и } k \geq 1, \\ 1, & \text{если } n \geq 0 \text{ и } k = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Из (19) следует равенство

$$\Delta \lambda_{n,k} \equiv \lambda_{n+1,k} - \lambda_{n,k} = k \lambda_{n,k-1} \quad (1 \leq k \leq n). \quad (20)$$

Пусть a и a^* — стандартные операторы Бозе уничтожения и рождения в пространстве Бергмана B , определенные формулами $(af)(z) = f'(z)$, $(a^*f)(z) = zf(z)$ и заданные на максимальных областях определения $D(a) = \{f \in B : af \in B\}$ и $D(a^*) = \{f \in B : a^*f \in B\}$ соответственно. Отметим, что $D(a) = D(a^*)$, операторы a , a^* неперестановочны и удовлетворяют стандартному коммутационному соотношению

$$aa^* - a^*a = E, \quad (21)$$

где E — единичный оператор в H .

При $k \in \mathbb{N}$ вводим в B оператор $G_k = a^{*k}a^k$ и для всех $\alpha > 0$ его положительные степени

$$G_k^\alpha = (a^{*k}a^k)^\alpha = \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda_{n,k}^\alpha(\cdot, e_n) e_n$$

при

$$D(G_k^\alpha) = \left\{ f \in B : \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda_{n,k}^{2\alpha} |(f, e_n)|^2 < +\infty \right\}.$$

При $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$ G_k^α является дискретным самосопряженным неотрицательным в B оператором с собственными числами $\lambda_{n,k}^\alpha$ и соответствующими им собственными функциями $e_n(z)$ ($n \geq 0$). При любом $\alpha > 0$ число 0 является k -кратным собственным числом оператора G_k^α , все его остальные собственные числа $\lambda_{n,k}^\alpha$ — простые и при $n \geq k$ образуют строго возрастающую неограниченную последовательность положительных вещественных чисел.

Всюду далее для применения теоремы 3 к операторам в пространстве Бергмана в качестве невозмущенного самосопряженного дискретного оператора T в B будем рассматривать оператор G_k^α при натуральном k и положительном вещественном α , а в качестве возмущения — в общем случае несамосопряженный действующий в пространстве B оператор вида

$$P = \sum_{n=0}^r \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \{a, a^*\}^n} c_{b_1, b_2, \dots, b_n} b_1 b_2 \dots b_n, \quad (22)$$

где r — целое неотрицательное число, коэффициенты $c_{b_1, b_2, \dots, b_n}$ являются комплексными числами, а при $n = 0$ имеется единственное слагаемое $c_0 E$ с $c_0 \in \mathbb{C}$ (полагаем $a^{*0} = a^0 = E$). Применяя коммутационное соотношение (21), любой оператор (22) можно записать в виде

$$P = \sum_{i+j \leq m} c_{i,j} a^{*i} a^j, \quad (23)$$

где m — целое неотрицательное число, а коэффициенты $c_{i,j}$ являются комплексными числами. Всюду далее мы будем представлять возмущающий оператор (22) в виде (23).

Теорема 4. Пусть k — натуральное число, m — целое неотрицательное число, α — положительное вещественное число, $w = 2k\alpha - m - 2 > 0$ и пусть $\widetilde{G}_k^\alpha = G_k^\alpha + P$, где оператор P определен согласно (23). Тогда оператор $\widetilde{G}_k^\alpha$ имеет ядерную резольвенту, и для его собственных чисел μ_n , $n \geq 0$, занумерованных в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей, при любом натуральном $l > m/w$ справедлива формула следов

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^s (\mu_n - \lambda_{n,k}^\alpha) + \oint_{\Gamma_s} \sum_{j=1}^l \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \text{Tr}((PR_\lambda)^j) d\lambda \right) = 0, \quad (24)$$

где $R_\lambda = (G_k^\alpha - \lambda E)^{-1}$, $\Gamma_s = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_s\}$ при $r_s = (\lambda_{s,k}^\alpha + \lambda_{s+1,k}^\alpha)/2$ и $s \geq k$.

В случае $\alpha = 1$ теорема 4 была анонсирована в [12], однако нам неизвестно, опубликовано ли где-нибудь доказательство. Ниже мы приведем наше доказательство теоремы 4 в общем случае, то есть при всех $\alpha > 0$, основываясь на доказанной выше теореме 3.

Главным исследуемым объектом в работе [12] является оператор Грибова

$$H_{\lambda'', \lambda', \mu, \lambda} = \lambda'' a^{*3} a^3 + \lambda' a^{*2} a^2 + \mu a^* a + i\lambda a^*(a + a^*)a,$$

где λ'' , λ' , λ , μ — вещественные параметры, $i^2 = -1$, играющий важную роль в качестве несамосопряженного гамильтониана в реджеонной теории поля при описании мягких процессов адронных взаимодействий с высокой энергией (см. [1, 3]). Основной результат статьи [12] в эквивалентной формулировке состоит в том, что при $\lambda'' \neq 0$, $\lambda' = 0$ для оператора

$$\frac{1}{\lambda''} H_{\lambda'', 0, \mu, \lambda} = a^{*3} a^3 + \frac{\mu}{\lambda''} a^* a + i \frac{\lambda}{\lambda''} a^*(a + a^*)a \equiv G_3 + P_3,$$

отличающегося от оператора $H_{\lambda'', 0, \mu, \lambda} = \lambda'' a^{*3} a^3 + \mu a^* a + i\lambda a^*(a + a^*)a$ лишь ненулевым вещественным множителем, справедлива формула регуляризованных следов

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^s (\mu_n - \lambda_{n,3}) + \oint_{\Gamma_s} \sum_{j=1}^4 \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i j} \text{Tr}((P_3 R_\lambda)^j) d\lambda \right) = 0. \quad (25)$$

Здесь μ_n , $n \geq 0$, — собственные числа оператора $H_{\lambda'',0,\mu,\lambda}/\lambda''$, занумерованные в порядке возрастания вещественных частей с учетом алгебраических кратностей, $R_\lambda = (G_3 - \lambda E)^{-1}$, $\Gamma_s = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = (\lambda_{s,3} + \lambda_{s+1,3})/2\}$ при $s \geq 3$.

Для вывода формулы регуляризованных следов (25) общая схема приведенного в [7] доказательства теоремы 1 применяется в статье [12] к рассматриваемой конкретной ситуации при $n_s = s$ ($s \geq 3$). Эта схема не очень удобна для вывода формул регуляризованного следа вида (3), и ее применение с такой целью может быть достаточно трудоемким. В частности, вывод формулы следов (25) этим способом занял большую часть статьи [12].

В то же время формулу следов (25) нетрудно получить простым применением теоремы 4 к оператору $\widetilde{G}_3 = G_3 + P_3$, где $P_3 = (\mu/\lambda'')a^*a + i(\lambda/\lambda'')a^*(a + a^*)a$. Действительно, в этом случае мы находим $k = 3$, $\alpha = 1$, $m = 3$, $w = 1 > 0$. Согласно теореме 4 формула следов (24) для оператора $H_{\lambda'',0,\mu,\lambda}/\lambda''$ имеет место при любом целом $l > m/w = 3$, в частности, при $l = 4$, то есть справедлива формула следов (25).

В [12] отмечено, что существование конечной формулы регуляризованных следов для оператора Грибова $H_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}$ при $\lambda' \neq 0$, $\lambda \neq 0$ является открытой проблемой. В этом случае условия теоремы 4 для оператора $H_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}/\lambda''$ при $\lambda'' \neq 0$ или для оператора $H_{0,\lambda',\mu,\lambda}/\lambda'$ при $\lambda'' = 0$ не выполняются. Однако, например, применяя ее к оператору $H_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}^{(\alpha)}/\lambda''$, где $H_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}^{(\alpha)} = \lambda''(a^*a^3)^\alpha + \lambda'a^*a^2 + \mu a^*a + i\lambda a^*(a + a^*)a$, находим, что при любом $\alpha > 1$ для оператора $H_{\lambda'',\lambda',\mu,\lambda}^{(\alpha)}/\lambda'' = G_3^\alpha + P_4$ при $\lambda'' \neq 0$, $\lambda' \neq 0$ выполняются соотношения $k = 3$, $\alpha > 1$, $m = 4$, $w = 6(\alpha - 1) > 0$, поэтому в силу теоремы 4 для него справедлива конечная формула регуляризованных следов (24), в которой число поправок теории возмущений равно $l = [2/(3\alpha - 3)] + 1$, где $[x]$ — целая часть вещественного числа x .

Теорема 4 и все изложенные выше следствия из нее были анонсированы в [10].

Для доказательства теоремы 4 нам понадобятся некоторые дополнительные сведения, которые мы сейчас изложим.

Если $a_n > 0$ и $b_n > 0$ при всех $n \geq n_0$, где $n_0 \in \mathbb{Z}$, то запись $a_n \asymp b_n$ означает, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2 , для которых при всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $c_1 \leq a_n/b_n \leq c_2$. Приведем некоторые непосредственно вытекающие из этого определения свойства отношения $\asymp$ на множестве всех последовательностей $\{a_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ с положительными членами:

- (а) отношение $\asymp$ есть отношение эквивалентности;
- (б) если $a_n \asymp b_n$ и $c_n \asymp b_n$ при $n \geq n_0$, то $a_n + c_n \asymp b_n$ при $n \geq n_0$; если $a_n \asymp b_n$ и $c_n \asymp d_n$ при $n \geq n_0$, то $a_n c_n \asymp b_n d_n$ и $a_n/c_n \asymp b_n/d_n$ при $n \geq n_0$;
- (в) если $a_n \asymp b_n$ при $n \geq n_0$, то при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $a_n^\alpha \asymp b_n^\alpha$ при $n \geq n_0$;
- (г) если $a_n > 0$, $b_n > 0$ при всех $n \geq n_0$ и, кроме того, выполняется предельное соотношение $a_n/b_n \rightarrow L$ при $n \rightarrow +\infty$, где L — отличное от нуля число (в частности, при $L = 1$ это означает, что $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow +\infty$), то $a_n \asymp b_n$ при $n \geq n_0$.

Так как для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и целых t, s

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+t)^\alpha}{(n+s)^\alpha} = 1, \quad (26)$$

то по свойству (г) отношения $\asymp$ для таких α, s и t выполняется следующее соотношение, справедливое при всех целых n , удовлетворяющих неравенствам $n+t \geq 1$ и $n+s \geq 1$:

$$(n+t)^\alpha \asymp (n+s)^\alpha \quad (n \geq 1 - \min\{t, s\}). \quad (27)$$

Поскольку для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{n,k}^\alpha}{n^{k\alpha}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \frac{2}{n}\right)^\alpha \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^\alpha = 1, \quad (28)$$

то $\lambda_{n,k}^\alpha \asymp n^{k\alpha}$ ($n \geq k$). С учетом (27) получаем соотношение

$$\lambda_{n,k}^\alpha \asymp (n+1)^{k\alpha} \quad (n \geq k). \quad (29)$$

Так как $\lambda_{n,0} = 1$ при всех $n \geq 0$, то эта формула остается верной и при $k = 0$. Таким образом, соотношение (29) выполняется для любого целого $k \geq 0$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Если $\alpha > 0$, то для любого $k \geq 1$, применяя сначала очевидное предельное соотношение $\lambda_{n,k}^\alpha \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, а затем (28) и (26), получаем $\lambda_{n,k}^\alpha + 1 \sim \lambda_{n,k}^\alpha \sim n^{k\alpha} \sim (n+1)^{k\alpha}$ при $n \rightarrow +\infty$. Поскольку, кроме того, $\lambda_{n,k}^\alpha + 1 > 0$ и $(n+1)^{k\alpha} > 0$ при всех $n \geq 0$, то в силу свойства (d) отношения $\asymp$ при любом $\alpha > 0$ выполняется соотношение

$$\lambda_{n,k}^\alpha + 1 \asymp (n+1)^{k\alpha} \quad (n \geq 0). \quad (30)$$

Это соотношение остается верным и при $k = 0$.

2.2. Вывод основной формулы регуляризованных следов дискретных операторов в пространстве Бергмана. Приведем доказательство теоремы 4.

Пусть $H = B$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $T = G_k^\alpha$, $\widehat{G}_k^\alpha = G_k^\alpha + P$. Собственным числам $\lambda_{n,k}^\alpha$ оператора T соответствуют собственные функции $e_n(z) = z^n/\sqrt{n!}$, образующие при $n \geq 0$ полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве B .

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$. Применяя формулы (20) и (29) с учетом свойства (b) отношения $\asymp$, находим, что для величины $\Delta\lambda_{n,k}^\alpha = \lambda_{n+1,k}^\alpha - \lambda_{n,k}^\alpha$ при всех $n \geq k$ справедливы соотношения

$$\Delta\lambda_{n,k}^\alpha = \alpha \int_{\lambda_{n,k}}^{\lambda_{n+1,k}} \lambda^{\alpha-1} d\lambda \asymp \lambda_{n,k}^{\alpha-1} \Delta\lambda_{n,k} = k\lambda_{n,k}^{\alpha-1} \lambda_{n,k-1} \asymp (n+1)^{k\alpha-1} \asymp (\lambda_{n+1,k}^\alpha)^q,$$

где $q = 1 - 1/(k\alpha) \in (0, 1)$ в том и только том случае, когда $k\alpha > 1$. Отсюда следует, что условие (i) теоремы 3 выполняется для оператора $T = (a^{*k}a^k)^\alpha$ при $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1/k$ и $q = 1 - 1/(k\alpha)$. Так как все собственные числа оператора T , кроме 0, — простые, то при таких значениях параметров k и α условие (ii) теоремы 3 также выполняется для этого оператора при $\beta = 0 < q = 1 - 1/(k\alpha) < 1$.

Нетрудно убедиться, что для любых целых неотрицательных i, j, n справедливы формулы

$$\begin{aligned} a^{*i}e_n &= \sqrt{\lambda_{n+i,i}}e_{n+i} \quad (n, i \geq 0); & a^je_n &= \begin{cases} \sqrt{\lambda_{n,j}}e_{n-j}, & \text{если } 0 \leq j \leq n, \\ 0, & \text{если } 0 \leq n < j, \end{cases} \\ a^{*i}a^je_n &= \begin{cases} d_{n,i,j}e_{n-j+i}, & \text{если } i \geq 0 \text{ и } 0 \leq j \leq n, \\ 0, & \text{если } i \geq 0 \text{ и } 0 \leq n < j, \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

где $d_{n,i,j} = \sqrt{\lambda_{n-j+i,i}\lambda_{n,j}}$ ($i \geq 0$, $0 \leq j \leq n$). Так как при $i \geq 0$ и $0 \leq j \leq n$ в силу (19) имеем $d_{n,i,j} \geq 1 > 0$, то из (29) и (27) при любых неотрицательных целых i и j вытекает соотношение $d_{n,i,j} \asymp (n+1)^{(i+j)/2}$ при $n \geq j$, откуда следует неравенство

$$d_{n,i,j} \leq \xi_{i,j}(n+1)^{\frac{i+j}{2}} \quad (n \geq j), \quad (32)$$

где $\xi_{i,j}$ — положительные постоянные.

Для любых целых $i \geq 0$, $j \geq 0$ и любой функции

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} (f, e_n) e_n,$$

принадлежащей $\mathcal{D}(a^{*i}a^j)$, согласно соотношению (31) получаем в смысле сходимости по норме пространства B :

$$a^{*i}a^j f = \sum_{n=0}^{+\infty} (f, e_n) a^{*i}a^j e_n = \sum_{n=j}^{+\infty} d_{n,i,j} (f, e_n) e_{n-j+i}. \quad (33)$$

Применяя сначала равенство Парсеваля к (33) в B , а затем неравенство (32), находим

$$\|a^{*i}a^j f\|^2 = \sum_{n=j}^{+\infty} d_{n,i,j}^2 |(f, e_n)|^2 \leq \xi_{i,j}^2 \sum_{n=j}^{+\infty} (n+1)^{i+j} |(f, e_n)|^2. \quad (34)$$

Для любой $f \in \mathcal{D}(P)$ согласно (23) имеем

$$Pf = \sum_{i+j \leq m} c_{i,j} a^{*i} a^j f,$$

откуда с учетом (34) находим

$$\begin{aligned} \|Pf\| &\leq \sum_{i+j \leq m} |c_{i,j}| \|a^{*i} a^j f\| \leq \sum_{i+j \leq m} |c_{i,j}| \xi_{i,j} \sqrt{\sum_{n=j}^{+\infty} (n+1)^{i+j} |(f, e_n)|^2} \leq \\ &\leq \eta \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^m |(f, e_n)|^2}, \quad (35) \end{aligned}$$

где

$$\eta = \sum_{i+j \leq m} |c_{i,j}| \xi_{i,j}.$$

Согласно (30) и свойству (с) отношения $\asymp$ находим, что при $\gamma = m/(2k\alpha)$ выполняется соотношение $(n+1)^m \asymp (\lambda_{n,k}^\alpha + 1)^{2\gamma}$ ($n \geq 0$). Отсюда и из (35) следует неравенство

$$\|Pf\| \leq A_0 \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_{n,k}^\alpha + 1)^{2\gamma} |(f, e_n)|^2} = A_0 \|(T + E)^\gamma f\|, \quad (36)$$

где A_0 — некоторая положительная постоянная.

При $\beta = 0$, $q = 1 - 1/(k\alpha) \in (0, 1)$ и $\gamma = m/(2k\alpha)$ неравенство $0 \leq \gamma < q - \beta$ равносильно неравенству $w > 0$, где $w = 2k\alpha - m - 2$. Если $w > 0$, то $0 \leq \gamma < q - \beta < 1$ и из (36) получаем $P \prec (T + E)^\gamma$, то есть выполняется условие (iv) из замечания 1 при $\lambda_0 = -1 < 0$, где 0 — наименьшее собственное число оператора T .

Мы доказали, что в условиях нашей теоремы операторы $T = G_k^\alpha$ и P удовлетворяют всем условиям теоремы 3 (с заменой условия (iii) на условие (iv) из замечания 1 при $\beta = 0$, $q = 1 - 1/(k\alpha)$, $\gamma = m/(2k\alpha)$ и $w = 2k\alpha - m - 2 > 0$). Применяя теорему 3 к оператору $\widetilde{G}_k^\alpha$ в B , получаем, что для любого натурального числа $l > \gamma/(q - \beta - \gamma) = m/w$ справедлива формула следов (5), которая в рассматриваемом нами случае может быть записана в виде (24).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боресков К. Г., Кайдалов А. Б., Канчели О. В. Сильные взаимодействия при высокой энергии в реджеонном подходе // Яд. физ. — 2006. — 69, № 10. — С. 1802–1818.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
3. Грибов В. Н. Техника диаграмм Редже // ЖЭТФ. — 1967. — 53. — С. 654–672.
4. Садовничий В. А., Конягин С. В., Подольский В. Е. Регуляризованный след оператора с ядерной резольвентой, возмущенного ограниченным // Докл. РАН. — 2000. — 373, № 1. — С. 26–28.
5. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Регуляризованный след ограниченного возмущения оператора с ядерной резольвентой // Диффер. уравн. — 1999. — 34, № 4. — С. 556–564.
6. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Следы операторов с относительно ядерным возмущением // Докл. РАН. — 2001. — 378, № 3. — С. 1–2.
7. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Следы операторов с относительно компактным возмущением // Мат. сб. — 2002. — 193, № 2. — С. 129–152.
8. Томин Н. Г. О первом регуляризованном следе дискретного оператора // в кн.: Тез. докл. Междунар. конф., посв. 90-летию со дня рожд. Л. С. Понтрягина. — М.: МГУ, 1998. — С. 165–167.
9. Томин Н. Г. О некоторых формулах первого регуляризованного следа для дискретных операторов // Мат. заметки. — 2001. — 70, № 1. — С. 109–122.

10. *Томин Н. Г., Томина И. В.* Об одной абстрактной формуле регуляризованных следов дискретных операторов и ее применениях// 3–9 мая 2019 г. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 273–274.
11. *Bargmann V.* On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, I// Commun. Pure Appl. Math. — 1961. — 14. — P. 187–214.
12. *Intissar A.* Regularized trace formula of magic Gribov operator on Bargmann space// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — 437, № 1. — P. 59–70.
13. *Tomin N. G.* One regularized trace formula of discrete operators// Мат. Междунар. науч. конф. «Теория приближения функций и родственные задачи анализа», посв. памяти д.ф.-м.н., профессора П. К. Коровкина. — Калуга: Изд-во КГУ им. К. Э. Циолковского, 2015.

Томин Николай Григорьевич

Ивановский государственный энергетический университет

E-mail: nikolay.tomin@gmail.com

Томина Ирина Валентиновна

Ивановский государственный энергетический университет

E-mail: ivtomina@gmail.com