Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Чечин, А. Д. Баев, С. А. Шабров, Об одной граничной задаче с разрывными решениями и сильной нелинейностью, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 153–157

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-153-157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:17:28

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 153–157
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-153-157

УДК 517.927.21

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ И СИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2021 г. Д. А. ЧЕЧИН, А. Д. БАЕВ, С. А. ШАБРОВ

Аннотация. В работе получены достаточные условия существования решения краевой задачи второго порядка с разрывными решениями и сильной нелинейностью. При анализе решений краевой задачи мы используем поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным и показавший свою эффективность при изучении задач второго порядка с негладкими решениями. На основе оценок функции Грина граничной задачи, полученных ранее другими авторами, удалось показать, что оператор, обращающий изучаемую нелинейную задачу, представимый в виде суперпозиции вполне непрерывного и непрерывного операторов, действует из конуса неотрицательных непрерывных функций в более узкое множество. Последнее и позволяет доказать существование решения у нелинейной краевой задачи с привлечением теории пространств с конусом.

Ключевые слова: краевая задача, негладкое решение, сильная нелинейность, разрешимость.

ON A BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH DISCONTINUOUS SOLUTIONS AND STRONG NONLINEARITY

© 2021 D. A. CHECHIN, A. D. BAEV, S. A. SHABROV

ABSTRACT. In this work, sufficient conditions for the existence of a solution to a second-order boundary-value problem with discontinuous solutions and strong nonlinearity are obtained. For the analysis of solutions to the boundary-value problem, we apply the pointwise approach proposed by Yu. V. Pokornyi and which has shown its effectiveness in studying second-order problems with nonsmooth solutions. Based on estimates of the Green function of the boundary-value problem obtained earlier by other authors, we show that the operator, which inverts the nonlinear problem considered, can be represented as the composition of a completely continuous operator and a continuous operator; this operator acts from the cone of nonnegative continuous functions into a narrower set. This fact allows one to prove the existence of a solution to a nonlinear boundary-value problem by using the theory of spaces with a cone.

Keywords and phrases: boundary-value problem, nonsmooth solution, strong nonlinearity, solvability.

AMS Subject Classification: 34A36, 34A34

1. Введение. В последние десятилетия активно ведутся исследования дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля (Шредингера) для случаев разнообразных импульсных возмущений (сингулярных потенциалов). Можно выделить публикации А. А. Шкаликова, А. М. Савчука, Б. С. Митягина, В. А. Михайлеца (см. [5–8, 15, 16]) и др., в которых методами теории обобщенных

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00197).

функций решаются задачи, касающиеся структуры спектра, его асимптотики, спектральной полноты, разнообразных свойств непрерывного спектра, структуры сингулярных компонент спектра (спектральных лакун, зон неустойчивости) и проч.

Следует отметить, что поточечный анализ решения у математической модели очень важен для приложений. Наличие особенностей у изучаемой системы (как внутренних, так и внешних), как правило, приводит не только к потере гладкости решения дифференциальной модели, но и появлению разрывов у решения. Последнее, как следствие, закрывает возможность использования классических производных как при моделировании, так и при анализе. Применение теории обобщенных функций (по Соболеву—Шварцу, Коломбо и др.) ситуацию не спасает: удастся доказать лишь наличие слабого решения. При этом приходится преодолевать ряд трудноразрешимых проблем (например, умножения разрывной функции на обобщенную).

Подход к поточечному анализу решений уравнения

$$-(pu')' + qu = f$$

в случае особенностей типа функции Дирака в потенциале q , когда q может считаться обобщенной производной от функции ограниченной вариации Q , был разработан Ю. В. Покорным в [9, 10], где в развитие идей В. Феллера и М. Г. Крейна (см. комментарии в [1]), уравнение с обобщенными коэффициентами и правой частью

$$-(pu')' + Q'u = F'$$

заменилось поточечно задаваемым уравнением

$$-(pu')'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma.$$

Дальнейшее развитие этот подход для случая непрерывных решений получил в работах [11, 12].

Для случая разрывных решений предыдущее уравнение имеет вид

$$-(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + uQ'_{[\sigma]} = F'_{[\sigma]}.$$

Здесь p , Q , F — функции ограниченной вариации на отрезке $[0, \ell]$; решения $u(x)$ принадлежат классу μ -абсолютно непрерывных функций на $[0, \ell]$, μ -производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, \ell]$; внутреннее дифференцирование ведется по μ -мере, порождаемой строго возрастающей на $[0, \ell]$ функцией $\mu(x)$, соизмеримой с наблюдаемым процессом. Строго возрастающую функцию $\sigma(x)$ можно подобрать таким образом, что она будет нести в себе все особенности рассматриваемой задачи. Точнее, $\sigma(x)$ будет являться разрывной лишь в точках разрыва μ , p , Q , F , так что $[\sigma]$ -мера этих точек оказывается отличной от нуля. При этом $[\sigma]$ -мера точек разрыва $u(x)$ «расщепляется» в силу того, что функция $\sigma(x)$ в этих точках имеет два скачка (левый и правый), равных $\Delta^- \sigma(\xi) = \sigma(\xi) - \sigma(\xi - 0)$ и $\Delta^+ \sigma(\xi) = \sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi)$ соответственно. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о «расщепленной» мере, мы заключаем порождающую меру функции в квадратные скобки. Отметим, что для восстановления функции по ее $[\sigma]$ -производной необходимо использовать π -интеграл, введенный Ю. В. Покорным в [10].

В настоящей работе мы применяем подход Ю. В. Покорного к одной граничной задаче с сильной нелинейностью.

2. Основной результат. Рассмотрим на $[0; \ell]$ нелинейную математическую модель

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + uQ'_{[\sigma]} = f(x, u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

возникающую, например, при моделировании деформаций разрывной струны (цепочки из струн, скрепленных между собой пружинами), натянутой вдоль отрезка $[0, \ell]$, и подпертой (не более чем в счетном количестве точек), как обычными пружинами, деформации которых подчиняются закону Гука, так и пружинами с разными витками, деформации которых закону Гука не подчиняются и задаются некоторой функцией. При этом к отдельным точкам струны могут быть приложены нелинейные импульсные внешние воздействия.

В уравнении из (1) внутренняя производная понимается как производная по обычной мере, внешняя — как производная по «расщепленной» мере, понимаемая в смысле Ю. В. Покорного,

т. е. обращаемая интегрированием с помощью π -интеграла. Последнее означает, что функция $g(x)$ называется $[\sigma]$ -производной от функции $G(x)$, если

$$G(x) - G(0) = \int_0^x g(s) d[\sigma].$$

Таким образом, во всякой точке ξ разрыва функции $\sigma(x)$ у функции $g(x)$ возникает два собственных значения, вообще говоря, отличных от предельных, определяемых равенствами

$$g(\xi^1) = G'_{[\sigma]}(\xi^1) = \frac{\Delta^- G(\xi)}{\Delta^- \sigma(\xi)}, \quad g(\xi^2) = G'_{[\sigma]}(\xi^2) = \frac{\Delta^+ G(\xi)}{\Delta^+ \sigma(\xi)}.$$

Уравнение (1) рассматривается на специальном расширении $\overline{[0; \ell]}_{[\sigma]}$ отрезка $[0; \ell]$, которое строится следующим образом. Обозначим через $S(\mu)$ множество точек разрыва функции $\mu(x)$. На множестве $J_\mu = [0; \ell] \setminus S(\mu)$ введем метрику $\rho(x; y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Метрическое пространство J_μ является неполным. Обозначим через $\overline{[0; \ell]}_\mu$ его стандартное пополнение. Множество $\overline{[0; \ell]}_\mu$ вместо каждой точки ξ разрыва функции $\mu(x)$ содержит элементы $\{\xi^1; \xi^2\}$, появившиеся при пополнении. При этом $x < \xi^1 < \xi^2 < y$ в смысле естественной упорядоченности элементов, если $x < \xi < y$. Определим $u(\xi^1) = u(\xi - 0)$, $u(\xi^2) = u(\xi + 0)$. Пусть S — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, не являющихся точками разрыва $\mu(x)$. Рассмотрим множество $\overline{[0; \ell]}_\mu \setminus S$, пополним его по метрике $\rho(x; y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ и добавим к полученному пополнению элементы из S . Обозначим данное множество через $\overline{[0; \ell]}_{[\sigma]}$. Обозначим $\overline{[0; \ell]}_S = \overline{[0; \ell]}_{[\sigma]} \cup S(\mu)$.

Таким образом, в точках ξ^1 и ξ^2 уравнение (1) имеет вид

$$\begin{aligned} -\Delta^- (pu'_\mu)(\xi) + u(\xi - 0)\Delta^- Q(\xi) &= f(\xi^1, u(\xi - 0))\Delta^- \sigma(\xi), \\ -\Delta^+ (pu'_\mu)(\xi) + u(\xi + 0)\Delta^+ Q(\xi) &= f(\xi^2, u(\xi + 0))\Delta^+ \sigma(\xi). \end{aligned}$$

В точках s разрыва функции $\sigma(x)$, в которых $\mu(x)$ является непрерывной, уравнение (1) имеет вид

$$-\Delta (pu'_\mu)(s) + u(s)\Delta Q(s) = f(s, u(s))\Delta \sigma(s),$$

где $\Delta v(s) = v(s + 0) - v(s - 0)$.

Решение (1) мы будем искать в классе E μ -абсолютно непрерывных на $\overline{[0; \ell]}_\mu$ функций, первая производная которых $[\sigma]$ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_S$. Относительно коэффициентов $p(x)$, $Q(x)$ и функции $f(x, u)$ мы делаем следующие предположения:

- (I) $p(x)$ и $Q(x)$ — $[\sigma]$ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_S$;
- (II) функция $p(x)$ положительна и отделена от нуля;
- (III) функция $Q(x)$ не убывает на $[0; \ell]$;
- (IV) $f(x, u)$ удовлетворяет условию Каратеодери, т. е.
 - (а) при каждом фиксированном u функция $f(x, u)$ является $[\sigma]$ -измеримой;
 - (б) при всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$ $f(x, u)$ — непрерывна по u ;
 - (в) существует $[\sigma]$ -суммируемая с некоторой степенью $p \in [1, \infty)$ функция $m(x)$ такая, что $|f(x, u)| \leq m(x)$ для почти всех x (в смысле $[\sigma]$ -меры) и u .

Нетрудно видеть, при выполнении последних условий оператор суперпозиции $[Fu](x) = f(x, u(x))$ непрерывно действует из C_μ — пространства μ -непрерывных на $\overline{[0; \ell]}_\mu$ функций в $L_{r, [\sigma]}$ — $[\sigma]$ -суммируемых с некоторой степенью r функций.

При выполнении условий (I)–(III) достаточно легко доказать разрешимость в классе E линейной задачи (когда в правой части в (1) стоит $f(x)$ — $[\sigma]$ -суммируемая функция); показать существование и единственность функции влияния $H(x, s)$ линейной граничной задачи $Lu = f$, $u(0) = u(\ell) = 0$. Ключевым моментом для наших результатов является следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия (I)–(III). Тогда существуют такое положительное число κ и такие $[\sigma]$ -суммируемые почти всюду положительные функции $v_1(s)$, $v_2(s)$, что для

всех x, s, τ , принадлежащих $\overline{[0; \ell]}_\mu$, справедливы неравенства

$$H(x, s) \geq \kappa u_0(x) H(\tau, s), \quad (2)$$

$$u_0(x) v_1(s) \leq H(x, s) \leq u_0(x) v_2(s), \quad (3)$$

где $u_0(x) = (\mu(x) - \mu(0))(\mu(\ell) - \mu(x))$.

Основным результатом работы является теорема

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

- (1) $f(x, 0) \equiv 0$;
- (2) однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_{[\sigma]}$;
- (3) $f(x, u) \geq 0$ для всех $x \in [0; \ell]$ и $u \geq 0$;
- (4) оператор суперпозиции, порожденный функцией $f(x, u)$, непрерывно действует из $C_\mu[0; \ell]$ в $L_{p, [\sigma]} \overline{[0; \ell]}_{[\sigma]}$ при некотором $p \in (1; +\infty]$;
- (5) при некоторых $0 < r < R < \infty$ краевая задача $Lu = \lambda f(x, u)$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, при любых $\lambda \in (0; 1)$ не имеет решений, удовлетворяющих неравенствам

$$\tilde{u}_0(x) \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq u(x) \leq r,$$

где $\tilde{u}_0(x) = M \cdot u_0(x)$ при некотором $M > 0$, и для некоторой неотрицательной нетривиальной функции $h(x) \in L_{1, [\sigma]} \overline{[0; 1]}_{[\sigma]}$ и для любого $\lambda > 0$ граничная задача $Lu = \lambda f(x, u) + \lambda h$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, не имеет решений, удовлетворяющих неравенству $u(x) \geq R \tilde{u}_0(x)$.

Тогда задача

$$Lu = f(x, u), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

имеет нетривиальное решение в конусе K неотрицательных μ -непрерывных на $\overline{[0; \ell]}_\mu$ функций.

Доказательство. С помощью оператора A на $K \setminus \{\Theta\}$ (здесь Θ — нулевой элемент в множестве непрерывных на $[0; \ell]$ функций) введем оператор

$$Bu = \|u\|_C^2 A \left(\frac{u}{\|u\|_C^2} \right).$$

Если оператор B имеет неподвижную точку u^* , то элемент $v^* = u^* / \|u\|_C^2$ дает неподвижную точку оператора A . Поэтому достаточно показать наличие в K у оператора B неподвижной точки.

Оператор B переводит $K \setminus \{\Theta\}$ в $K(\tilde{u}_0)$, причем B вполне непрерывен в K вне шара любого радиуса. Нетрудно видеть, что для оператора B на множестве элементов $K(\tilde{u}_0)$ с большой нормой не может выполняться $\lambda Bu = u$ при $\lambda \in (0, 1)$, и на элементах малой нормы из $K(\tilde{u}_0)$ при любом $\lambda > 0$ не может выполняться $u = Bu + \lambda h_0$, где

$$h_0(x) = \int_0^1 G(x, s) h(s) d\sigma(s).$$

Поэтому оператор B имеет в $K(\tilde{u}_0)$ неподвижную точку. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что доказательство теоремы сохраняет силу, если оператор A вполне непрерывен вне любого шара положительного радиуса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1968.
2. Баев А. Д., Шабров С. А., Голованева Ф. В., Меач Мон. Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка // Вестн. Воронеж. ин-та ГПС МЧС. — 2014. — 3, № 12. — С. 65–73.
3. Давыдова М. Б., Шабров С. А. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стильтьеса // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2011. — 11, № 4. — С. 13–17.
4. Давыдова М. Б., Шабров С. А. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона–Никодима // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

5. *Иванов А. С., Савчук А. М.* След порядка минус один для струны с сингулярными весом// Мат. заметки. — 2017. — 102, № 2. — С. 197–215.
6. *Конечная Н. Н., Мирзоев К. А., Шкалик А. А.* Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами// Мат. заметки. — 2018. — 104, № 2. — С. 231–242.
7. *Митягин Б. С., Джаков П. Б.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака// Усп. мат. наук. — 2006. — 61, № 4 (370). — С. 77–182.
8. *Михайлец В. А.* Структура непрерывного спектра одномерного оператора Шредингера с точечными взаимодействиями// Функц. анализ. прилож. — 1996. — 30, № 2. — С. 90–93.
9. *Покорный Ю. В.* Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 2. — С. 167–169.
10. *Покорный Ю. В.* О дифференциалах Стильтьеса в обобщенной задаче Штурма–Лиувилля// Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 1–4.
11. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач. — М.: Физматлит, 2009.
12. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач// Усп. мат. наук. — 2008. — 63, № 1 (379). — С. 111–154.
13. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Ищенко А. С., Шабров С. А.* О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля// Мат. заметки. — 2007. — 82, № 4. — С. 578–582.
14. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004.
15. *Савчук А. М.* О базисности системы собственных и присоединенных функций одномерного оператора Дирака// Изв. РАН. Сер. мат. — 2018. — 82, № 2. — С. 113–139.
16. *Савчук А. М., Шкалик А. А.* Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость// Функц. анализ. прилож. — 2010. — 44, № 4. — С. 34–53.
17. *Шабров С. А.* Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2013. — № 1. — С. 232–250.
18. *Шабров С. А.* Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — 2. — С. 168–179.
19. *Pokornyi Yu. V., Shabrov S. A.* Toward a Sturm–Liouville theory for an equation with generalized coefficients// J. Math. Sci. — 2004. — 119, № 6. — P. 769–787.
20. *Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A.* On extension of the Sturm–Liouville oscillation theory to problems with pulse parameters// Ukrain. Math. J. — 2008. — 60, № 1. — P. 108–113.

Чечин Дмитрий Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Баев Александр Дмитриевич
Воронежский государственный университет
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Шабров Сергей Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: shaspoteha@mail.ru