Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Шабров, М. В. Шаброва, Е. А. Шайна, Об уточнении скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 158–162

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-193-158-162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 06:57:42

ОБ УТОЧНЕНИИ СКОРОСТИ РОСТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

© 2021 г. С. А. ШАБРОВ, М. В. ШАБРОВА, Е. А. ШАЙНА

Аннотация. В статье уточнена скорость роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с негладкими решениями. Анализ задачи опирается на предложенный Ю. В. Покорным поточечный подход, показавший свою эффективность при изучении линейных граничных задач второго и четвертого порядков с непрерывными решениями.

Ключевые слова: граничная задача, математическая модель, спектральная задача, собственное значение, скорость роста.

ON THE RATE OF GROWTH OF EIGENVALUES OF A FOURTH-ORDER SPECTRAL PROBLEM WITH DERIVATIVES WITH RESPECT TO MEASURE

© 2021 S. A. SHABROV, M. V. SHABROVA, E. A. SHAINA

ABSTRACT. In this paper, we clarify the rate of growth of eigenvalues of one fourth-order spectral problem with nonsmooth solutions. The analysis is based on the pointwise approach proposed by Yu. V. Pokornyi, which has shown its effectiveness in studying linear second- and fourth-order boundary-value problems with continuous solutions.

Keywords and phrases: boundary-value problem, mathematical model, spectral problem, eigenvalue, growth rate.

AMS Subject Classification: 34A36, 34A34

1. **Введение.** В [20] получена скорость роста собственных значений спектральной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = \lambda M'_{\sigma}; \\ u(0) = u'(0) = 0; \\ u(\ell) = u'(\ell) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где λ — спектральный параметр, которая возникает при применении метода Фурье для нахождения решения математической модели свободных колебаний стержневой системы, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями, которые приводят к потере гладкости у решения.

Коэффициент $p(x)$ характеризует материал, из которого изготовлен стержень; положителен на отрезке $[0, \ell]$; $\mu(x)$ — строго возрастающая функция, соизмеримая с наблюдаемым процессом; функция $r(x)$ — сила натяжения струны в точке x ; $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней

среды, $F(x)$ — внешнюю силу, а $M(x)$ — масса участка $[0, x)$, σ — мера, порождаемая функцией $\sigma(x)$, содержит все особенности системы — это точки, в которых имеются локализованные особенности. Через $S(\sigma)$ обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$.

Решение задачи (1) мы ищем в классе E абсолютно непрерывных на $[0, \ell]$ функций $u(x)$, первая производная которых μ -абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$; квазипроизводная pu''_{xx} абсолютна непрерывна на $[0, \ell]$; $(pu''_{xx})'_x - \sigma$ -абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$.

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0, \ell]$ вариации, $Q(x)$ — неубывающая на $[0, \ell]$ функция, $\inf_{x \in [0, \ell]} p(x) > 0$, $r(x) \geq 0$.

Уравнение в (1) определено на специальном расширении $\overline{[0, \ell]}_\sigma$ отрезка $[0, \ell]$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$, при этом в точках $\xi \in S(\sigma) (= S(\mu))$ выполнены четыре условия:

$$\begin{aligned} u(\xi - 0) &= u(\xi + 0); \\ p(\xi - 0)u''_{x\mu}(\xi - 0) &= p(\xi)\frac{\Delta u'(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} = p(\xi + 0)u''_{x\mu}(\xi + 0); \\ \Delta(pu''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) &= \Delta F(\xi), \end{aligned}$$

где $\Delta v(\xi)$ — скачок функции $v(x)$ в точке ξ , т. е. $\Delta v(\xi) = v(\xi + 0) - v(\xi - 0)$.

Множество $\overline{[0, \ell]}_\sigma$ строится следующим образом. Введем метрику $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ на $[0, \ell]$. Если $S(\sigma) \neq \emptyset$, то $([0, \ell], \rho)$ является неполным метрическим пространством. Стандартное пополнение и приводит к $\overline{[0, \ell]}_\sigma$.

Отметим, что качественная теория с негладкими решениями начала бурно развиваться после выхода в 1999 г. работы Ю. В. Покорного [11]. Так, в [12–14, 16, 21, 22] изучены линейные краевые задачи второго порядка с производными по мере. Поточечный подход, используемый в линейных задачах, показал свою эффективность и в нелинейных задачах (см. [5, 6]), и в задачах с разрывными решениями (см. [7, 15]), и в граничных задачах четвертого порядка (см. [1, 18, 19]), а также в краевых задачах гиперболического типа (см. [2, 3]).

Эта эффективность объясняется достаточно просто: при использовании производных по мере уравнение становится поточечно заданным, то есть обыкновенным, что дает возможность применения качественных методов анализа решений, в отличие от теорий обобщенных функций. Так, при использовании теории распределений по Шварцу—Соболеву, проявляются трудно разрешимые проблемы. Во-первых, удастся установить лишь слабую разрешимость уравнения, что для приложений мало пригодно, во-вторых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную, которую не удастся решить до сих пор, и, в-третьих, уравнения в обобщенных функциях — это равенство двух функционалов, определенных над пространством основных функций, и применение качественных методов анализа к таким уравнениям крайне затруднительно. Здесь можно вспомнить работу [10] Мышкиса, в которой для уравнений с обобщенными коэффициентами удалось установить аналог теорем Штурма о перемежаемости нулей.

2. Основной результат. Через $K(x, s)$ мы обозначим функцию влияния граничной задачи

$$\begin{cases} Lu = F'_\sigma; \\ u(0) = u'(0) = 0; \\ u(\ell) = u'(\ell) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $F(x)$ — σ -абсолютно непрерывная на $[0; \ell]$ функция. Существование и единственность $K(x, s)$ в классе непрерывных на квадрате $[0; \ell] \times [0; \ell]$ доказаны в [1].

Собственные значения спектральной задачи (1) определяются как нули оператора Фредгольма, который в нашем случае определяется следующим образом (см, например, [4, 9]):

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n,$$

где

$$A_n = \int_0^l \dots \int_0^l \left| \begin{array}{cccc} K(s_1, s_1) & \dots & K(s_1, s_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(s_n, s_1) & \dots & K(s_n, s_n) \end{array} \right| dM(s_1) \dots dM(s_n).$$

Сходимость ряда при всех λ доказывается, как и в [4, 9]. Однако схему, использованную в [9], в нашем случае применить нельзя, так как $K(x, s)$ не имеет непрерывной производной по x .

Однако разности $K(s_{i+1}, s_j) - K(s_i, s_j)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 1, 2, \dots, n$) при некоторых κ_{ij} , заключенных между $\inf_{x, s \in [0; \ell]} K'_x(x, s)$ и $\sup_{x, s \in [0; \ell]} K'_x(x, s)$, можно записать в следующем виде:

$$K(s_{i+1}, s_j) - K(s_i, s_j) = \kappa_{ij}(s_{i+1} - s_i).$$

Так как $K(x, s)$ — решение уравнения $Lu = \theta(x - s)$, то $K'_x(x, s)$ ограничена на всем квадрате $[0, \ell] \times [0, \ell]$. Поэтому величины $\kappa_{i,j}$ ограничены в совокупности некоторой постоянной C . Тогда при $n \geq 4$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cccc} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_n) \\ K(s_2, s_1) & K(s_2, s_2) & \dots & K(s_2, s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_{n-1}, s_1) & K(s_{n-1}, s_2) & \dots & K(s_{n-1}, s_n) \\ K(s_n, s_1) & K(s_n, s_2) & \dots & K(s_n, s_n) \end{array} \right| = \\ & = \left| \begin{array}{cccc} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_n) \\ K(s_2, s_1) & K(s_2, s_2) & \dots & K(s_2, s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_{n-1}, s_1) & K(s_{n-1}, s_2) & \dots & K(s_{n-1}, s_n) \\ \kappa_{n-1,1} & \kappa_{n-1,2} & \dots & \kappa_{n-1,n} \end{array} \right| \cdot (s_n - s_{n-1}) = \dots = \\ & = \left| \begin{array}{cccc} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_n) \\ \kappa_{1,1} & \kappa_{1,2} & \dots & \kappa_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{n-2,1} & \kappa_{n-2,2} & \dots & \kappa_{n-2,n} \\ \kappa_{n-1,1} & \kappa_{n-1,2} & \dots & \kappa_{n-1,n} \end{array} \right| \cdot (s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}) = \\ & = \left| \begin{array}{cccc} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_n) \\ \kappa_{1,1} & \kappa_{1,2} & \dots & \kappa_{1,n} \\ \varkappa_{1,1} & \varkappa_{1,2} & \dots & \varkappa_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa_{n-3,1} & \varkappa_{n-3,2} & \dots & \varkappa_{n-3,n} \\ \varkappa_{n-2,1} & \varkappa_{n-2,2} & \dots & \varkappa_{n-2,n} \end{array} \right| \cdot (s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}) \times \\ & \quad \times (\mu(s_3) - \mu(s_1))(\mu(s_4) - \mu(s_2)) \dots (\mu(s_n) - \mu(s_{n-2})), \end{aligned}$$

где

$$\varkappa_{m,j} = \frac{k_{m+1,j} - k_{m,j}}{\mu(s_{m+2}) - \mu(s_m)}$$

($m = 1, 2, \dots, n-2$, $j = 1, 2, \dots, n$). Нетрудно видеть, что величины $\varkappa_{m,j}$ ограничены в совокупности.

Применяя неравенство Адамара и оценки

$$|(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1})| \leq \left(\frac{\ell}{n-1} \right)^{n-1},$$

$$|(\mu(s_3) - \mu(s_1))(\mu(s_4) - \mu(s_2)) \dots (\mu(s_n) - \mu(s_{n-2}))| \leq \left(\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{n-2} \right)^{n-2},$$

для A_n (при $n \geq 4$) будем иметь

$$\begin{aligned} |A_n| &\leq C^n \cdot n^{n/2} (M(\ell) - M(0))^n \left(\frac{\ell}{n-1} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{n-2} \right)^{n-2} = \\ &= \frac{1}{\ell} (C(M(\ell) - M(0))\ell(\mu(\ell) - \mu(0)))^n \frac{n^{n/2}}{(n-1)^{n-1}(n-2)^{n-2}}. \end{aligned}$$

Так как для любого фиксированного положительного ε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^{\varepsilon n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n^{\varepsilon n}} = 0,$$

то при достаточно большом n (зависящем от ε), справедливо неравенство

$$|A_n| \leq \frac{1}{\ell} (C(M(\ell) - M(0))\ell)^n n^{-3n/2 + \varepsilon n}.$$

Доказанное неравенство, согласно общей теории целых функций [8, 17], показывает, что порядок роста функции $D(\lambda)$ не выше $2/5 - \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$. Поэтому $D(\lambda)$ имеет порядок роста не выше $2/5$, следовательно, для произвольного $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2/5+\delta}} \quad (3)$$

сходится. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — σ -абсолютно непрерывные функции на $[0, \ell]$, $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$ и

$$\inf_{x \in [0, \ell]} p(x) > 0, \quad \inf_{x \in [0, \ell]} r(x) \geq 0.$$

Пусть $\{\lambda_n\}$ — собственные значения задачи (1). Тогда ряд (3) сходится при любом $\delta > 0$.

Доказанная теорема позволяет получить достаточные условия применимости метода Фурье к математической модели четвертого порядка с негладкими решениями, описывающей малые свободные колебания стержня, помещенного во внешнюю среду с локализованными особенностями, оба конца которого зацементированы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баев А. Д., Шабров С. А., Голованева Ф. В., Меач Мон. Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка // Вестн. Воронеж. ин-та ГПС МЧС. — 2014. — 3, № 12. — С. 65–73.
2. Баев А. Д., Шабров С. А., Голованева Ф. В., Меач Мон. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2014. — 2. — С. 74–80.
3. Баев А. Д., Шабров С. А., Меач Мон. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2014. — № 1. — С. 50–55.
4. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. — М.: Гос. изд. тех-теор. лит-ры, 1950.
5. Давыдова М. Б., Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. Дифференциал Стильеса в импульсных задачах с разрывными решениями // Докл. РАН. — 2009. — 428, № 5. — С. 595–597.
6. Давыдова М. Б., Шабров С. А. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стильеса // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2011. — 11, № 4. — С. 13–17.
7. Зверева М. Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями: качественная теория. — Saarbrücken, 2012.
8. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
9. Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения. — М.: ГИТТЛ, 1957.
10. Мышкис А. Д. О решениях линейного однородного двумерного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенными коэффициентами // Диффер. уравн. — 1996. — 32, № 5. — С. 615–619.

11. *Покорный Ю. В.* Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 2. — С. 167–169.
12. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач. — М.: Физматлит, 2009.
13. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Ищенко А. С., Шабров С. А.* О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма—Лиувилля// Мат. заметки. — 2007. — 82, № 4. — С. 578–582.
14. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционная теория Штурма—Лиувилля для импульсных задач// Усп. мат. наук. — 2008. — 63, № 1 (379). — С. 111–154.
15. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* О задаче Штурма—Лиувилля для разрывной струны// Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Сер. Евстеств. науки. — 2004. — № 5. — С. 186–190.
16. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004.
17. *Титчмарш Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1980.
18. *Шабров С. А.* О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стильтьеса// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2012. — 12, № 1. — С. 52–55.
19. *Шабров С. А.* Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2013. — № 1. — С. 232–250.
20. *Шабров С. А., Бугакова Н. И., Шайна Е. А.* О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — 4. — С. 207–216.
21. *Pokornyi Yu. V., Shabrov S. A.* Toward a Sturm–Liouville theory for an equation with generalized coefficients// J. Math. Sci. — 2004. — 119, № 6. — P. 769–787.
22. *Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A.* On extension of the Sturm–Liouville oscillation theory to problems with pulse parameters// Ukrain. Math. J. — 2008. — 60, № 1. — P. 108–113.

Шабров Сергей Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: shaspoteha@mail.ru

Шаброва Марина Вячеславовна
Воронежский государственный университет
E-mail: koshka445@mail.ru

Шайна Екатерина Александровна
Воронежский государственный университет
E-mail: katerinashaina@mail.ru