Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Э. Абдурагимов, О существовании и единственности положительно-го решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 194, 3–7

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-194-3-7>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 10:20:50

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 194 (2021). С. 3–7
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-194-3-7

УДК 517.927.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. Г. Э. АБДУРАГИМОВ

Посвящается отцу, доценту Э. И. Абдурагимову

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. С помощью специальных топологических средств доказано существование единственного положительного решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: положительное решение, краевая задача, конус, функция Грина.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR FRACTIONAL-ORDER FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

© 2021 G. E. ABDURAGIMOV

ABSTRACT. In this paper, we consider a boundary-value problem for one nonlinear functional differential equation of fractional order. Using special topological means, we prove the existence of a unique positive solution to the problem considered.

Keywords and phrases: positive solution, boundary-value problem, cone, Green's function.

AMS Subject Classification: 34K10

1. Введение. Вопросам исследования разрешимости функционально-дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ (см. [1, 4–13]). Практически во всех вышеупомянутых работах, в основном, рассматриваются вопросы существования положительных решений, их поведения, асимптотики и т.д., причем естественным орудием исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем методы исследования положительных решений операторных уравнений были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

Работ, посвященных исследованию существования и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений дробного порядка мало. В настоящей работе предпринята попытка устранить данный пробел. На основе методов

функционального анализа с помощью специальных топологических средств доказано существование и единственность положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. Полученные результаты являются продолжением исследований автора, посвященных данной тематике.

2. Постановка задачи и основные результаты. Обозначим через C пространство $C[0, 1]$, через $\mathbb{L}_p$ ($1 < p < \infty$) — пространство $\mathbb{L}_p(0, 1)$ и через $\mathbb{W}^2$ — пространство вещественных функций, определенных на $[0, 1]$ с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$D_{0+}^{\alpha} x(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad (2)$$

где $\alpha \in (1, 2]$ — действительное число, D_{0+}^{α} — дробная производная Римана—Лиувилля (см. [12]), $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$ ($1 < p < \infty$) — линейный положительный непрерывный оператор, здесь функция $f(t, u)$ неотрицательна и удовлетворяет условию Каратеодори.

Под положительным решением задачи (1)–(2) будем понимать функцию $x \in \mathbb{W}^2$, положительную в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(2) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

где

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } 0 \leq s \leq t, \\ \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Предположим, что $f(t, u)$ удовлетворяет условию

$$f(t, u) \leq a_1(t) + b_1 u^{p/q}, \quad t \in [0, 1], \quad u \geq 0, \quad (4)$$

где $b_1 > 0$, $a_1(t) \in \mathbb{L}_q$ ($1 < q < \infty$) — положительная функция.

В операторной форме уравнение (3) можно переписать в виде

$$x = GNTx,$$

где $N: \mathbb{L}_p \rightarrow \mathbb{L}_q$ — оператор Немыцкого, $G: \mathbb{L}_q \rightarrow C$ — оператор Грина.

Оператор A определяемый равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций, вполне непрерывен (см. [3, с. 161]) и оставляет инвариантным конус $\tilde{K}$ неотрицательных функций $x(t)$ пространства C .

Пусть

$$f(t, u) \geq a_0(t) + \psi(u), \quad t \in [0, 1], \quad u \geq 0, \quad (5)$$

где $a_0 \in \mathbb{L}_q$ — положительная функция, $\psi(u)$ — неотрицательная функция.

Введем обозначения:

$$\Omega_- = \{x \in \tilde{K} : \|x\|_C \leq r_-\}, \quad \Omega_+ = \{x \in \tilde{K} : \|x\|_C \leq r_+\}, \quad \Omega = \overline{\Omega}_+ \setminus \Omega_-,$$

где

$$r_- = \frac{1}{4^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \int_{1/4}^{3/4} a_0(s)(1-s)^{\alpha-1} ds, \quad r_+ = \left(\frac{4^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}{(p/q)\|a_1\|_{\mathbb{L}_q}} \right)^{q/(p-q)}.$$

Здесь τ — норма оператора $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$.

Теорема 1. *Предположим, что $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$ — положительный на конусе $\tilde{K}$ оператор (см. [2, с. 59]), выполнены неравенства (4) и (5), а также условия*

$$p > q > 1, \quad \frac{\|a_1\|_{\mathbb{L}_q} (b_1 \tau^{p/q})^{p/q-1}}{\left(4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)\right)^{p/q}} \leq \frac{(p/q-1)^{p/q-1}}{(p/q)^{p/q}}.$$

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет по крайней мере одно положительное решение $x \in \Omega$.

Доказательство. Покажем существование такого числа $r_+ > 0$, что при $x \in \tilde{K}$ и $x \in \partial\Omega_+$ выполняется неравенство

$$\|Ax\|_C \leq \|x\|_C. \quad (6)$$

В силу (4) имеем

$$\begin{aligned} \|Ax\|_C &= \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds \leq \int_0^1 G(s, s) a_1(s) ds + b_1 \int_0^1 G(s, s) (Tx)^{p/q}(s) ds \leq \\ &\leq \frac{\|a_1\|_{\mathbb{L}_q}}{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} + \frac{b_1}{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{p/q} \leq \frac{\|a_1\|_{\mathbb{L}_q}}{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} + \frac{b_1}{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} \tau^{p/q} \|x\|_{\mathbb{L}_p}^{p/q}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(r) = r - \beta_1 r^{p/q} - \beta_2, \quad \beta_1 = \frac{\|a_1\|_{\mathbb{L}_q}}{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)}, \quad \beta_2 = \frac{b_1}{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} \tau^{p/q}.$$

Несложно убедиться, что наибольшее значений этой функции при $r > 0$ обеспечивается при

$$r = r_{\max} = \left(\frac{1}{(p/q)\beta_1} \right)^{q/(p-q)}.$$

Отсюда, в силу условия (2) теоремы, гарантирующего неотрицательность функции φ в точке $r_{\max}$, при

$$r_+ = r_{\max} = \left(\frac{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)}{(p/q)\|a_1\|_{\mathbb{L}_q}} \right)^{q/(p-q)}$$

следует (6).

Найдем теперь такое число $r_- > 0$, что $\|Ax\|_C \geq \|x\|_C$ при $x \in \tilde{K}$ и $x \in \partial\Omega_-$. В силу (5) и соответствующих свойств (см. [12]) функции Грина имеем

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &= \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds \geq \int_0^1 \gamma(s) G(s, s) f(s, (Tx)(s)) ds \geq \\ &\geq \int_{1/4}^{3/4} a_0(s) \gamma(s) G(s, s) ds + \int_{1/4}^{3/4} \gamma(s) G(s, s) \psi(u) ds \geq \\ &\geq \int_{1/4}^{3/4} a_0(s) \gamma(s) G(s, s) ds = \frac{1}{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} \int_{1/4}^{3/4} a_0(s) (1-s)^{\alpha-1} ds, \end{aligned}$$

где $\gamma(s)$ — положительная непрерывная функция (см. [12]). Положив в последнем неравенстве

$$r_- = \frac{1}{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} \int_{1/4}^{3/4} a_0(s) (1-s)^{\alpha-1} ds,$$

получим требуемое соотношение.

Легко проверить, что $r_- < r_+$. Согласно теореме Го—Красносельского о неподвижной точке (см. [2]) оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в Ω , что равносильно существованию по меньшей мере одного положительного решения $x \in \Omega$ краевой задачи (1)–(2). $\square$

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 краевая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение $x \in \Omega$, если функция $f(t, u)$ дифференцируема по u , производная $f'_u(t, u)$ возрастает по второму аргументу u

$$\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} < \frac{4^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}{\tau}, \quad (7)$$

где $\theta(t) \equiv f'_u(t, r_+(T1)(t))$, $1/p' + 1/p = 1$.

Доказательство. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ произвольные элементы множества Ω , $y(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$. В силу монотонности производной $f'_u(t, u)$ по второму аргументу, применяя соответствующую теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} \|Ax_1 - Ax_2\|_C &= \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) \left| f'_u(s, (T\tilde{x})(s))(Ty)(s) \right| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{4^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left| f'_u(s, r_+(T1)(s)) \right| \left| (Ty)(s) \right| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{4^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} \|Ty\|_{\mathbb{L}_p} \leq \frac{\tau}{4^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} \|y\|_C, \end{aligned}$$

где функция $(T\tilde{x})(t)$ принимает значения промежуточные между значениями $(Tx_1)(t)$ и $(Tx_2)(t)$.

С учетом условия (7) теоремы на основании принципа сжатых отображений заключаем, что краевая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение $x \in \Omega$. $\square$

В качестве примера можно рассмотреть краевую задачу

$$D_{0+}^{3/2} x(t) + \left(\int_0^1 x(s) ds \right)^2 + \beta = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (8)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad (9)$$

где β — некоторое положительное число. Нетрудно проверить, что при выполнении требования

$$1 < \beta < \frac{2\sqrt{6} \cdot \Gamma(3/2)}{\sqrt{3^{3/2} - 1}}$$

на основании вышеприведенных теорем краевая задача (8)–(9) имеет единственное положительное решение $x \in \Omega$, где

$$r_- = \frac{\beta}{24\Gamma(3/2)}(3^{3/2} - 1), \quad r_+ = \frac{\Gamma(3/2)}{\beta}.$$

В частности, при $\beta = 1,01$ задача (8)–(9) на конусе $\tilde{K}$ пространства C имеет единственное положительное решение x , удовлетворяющее условию $0,199 \leq \|x\|_C \leq 0,877$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Симонов П. М. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения // Вестн. Удмурт. гос. ун-та. Мат. — 2009. — 1. — С. 3–23.
2. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962.
3. Крейн С. Г. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972.
4. Agarwal R. P., Stanek S. Positive solutions of singular value problems for delay differential equations // Dynam. Syst. Appl. — 2007. — 16, № 4. — P. 755–770.

5. *Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F.* Existence of positive solutions for functional equations// Comput. Math. Appl. — 2000. — 40. — С. 783–792.
6. *Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F.* Existence of positive solutions for higher-order functional differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 2004. — 297, № 1. — С. 14–23.
7. *Ma R.* Positive solutions for boundary value problems of functional differential equations// Appl. Math. Comput. — 2007. — 193, № 1. — P. 66–72.
8. *Sun Y., Han M., Debnath L.* Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations// Appl. Math. Comput. — 2007. — 190, № 1. — С. 699–704.
9. *Weng P., Jiang D.* Existence of positive solutions for boundary value problem of second-order FDE// Appl. Math. Comput. — 1999. — 37, № 10. — С. 1–9.
10. *Wong F. H., Wang S. P., Chen T. G.* Existence of positive solutions for second order functional differential equations// Comput. Math. Appl. — 2008. — 10, № 10. — P. 2580–2587.
11. *Yin F., Fugì F., Li Y.* The existence of positive solutions for the quasilinear functional delay differential equations// J. Math. Stud. — 2002. — 35, № 4. — С. 364–370.
12. *Zhanbing B., Haishen L.* Positive solutions for boundary value problem on nonlinear fractional differential equation// J. Math. Anal. Appl. — 2005. — 311, № 2. — С. 495–505.
13. *Zima M.* On positive solutions of functional differential equations in Banach spaces// J. Inequalities Appl. — 2000. — 6, № 3. — P. 359–371.

Абдурогимов Гусен Эльдерханович

Дагестанский государственный университет, Махачкала

E-mail: gusen_e@mail.ru