Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Бабенко, А. В. Бадьин, Математическая модель поступления токсичных веществ в организм человека на предприятии атомной промышленности в повседневных производственных условиях, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 194, 8–22

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-194-8-22>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:17:45

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 194 (2021). С. 8–22
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-194-8-22

УДК 517.928.2; 614.87

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОСТУПЛЕНИЯ ТОКСИЧНЫХ ВЕЩЕСТВ В ОРГАНИЗМ ЧЕЛОВЕКА НА ПРЕДПРИЯТИИ АТОМНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ В ПОВСЕДНЕВНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ УСЛОВИЯХ

© 2021 г. С. П. БАБЕНКО, А. В. БАДЫН

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель, описывающая загрязнение рабочего помещения на предприятии атомной промышленности продуктами гидролиза гексафторида урана. В основе модели лежат краевые задачи для уравнений непрерывности, записанных для концентраций молекул газообразных веществ и для удельной (по радиусам аэрозольных частиц) концентрации молекул аэрозольного вещества. Указанные краевые задачи рассматриваются в рамках теории возмущений. При этом предполагается, что диффузия газов протекает много медленнее гидролиза, нуклеации и воздухообмена, а диффузия аэрозолей протекает много медленнее макроскопического движения аэрозолей и воздухообмена. Строятся приближенные решения основных краевых задач упомянутой математической модели, проводится оценка погрешности.

Ключевые слова: гексафторид урана, математическая модель, краевая задача, теория возмущений, метод пограничных функций.

MATHEMATICAL MODEL OF HUMAN INTOXICATION AT NUCLEAR ENTERPRISES IN ORDINARY PRODUCTION CONDITIONS

© 2021 S. P. BABENKO, A. V. BADIN

ABSTRACT. In this paper, we discuss a mathematical model describing the contamination of a working room at an enterprise of the nuclear industry with products of hydrolysis of uranium hexafluoride. The model is based on boundary-value problems for the continuity equations written for the concentrations of molecules of gaseous substances and for the specific (with respect to the radii of aerosol particles) concentration of molecules of aerosol substances. These boundary-value problems are considered within the framework of the perturbation theory. We assume that the diffusion of gases proceeds much slower than hydrolysis, nucleation, and air exchange, and the diffusion of aerosols proceeds much slower than the macroscopic motion of aerosols and air exchange. We construct approximate solutions of the basic boundary-value problems of the mathematical model considered and estimate the errors.

Keywords and phrases: uranium hexafluoride, mathematical model, boundary-value problem, perturbation theory, method of boundary functions.

AMS Subject Classification: 35K67, 35B25

Введение Известно, что на предприятиях атомной промышленности в процессе обогащения природного урана изотопом ^{235}U используется газообразное химическое соединение UF_6 (гексафторид урана, ГФУ). В производственных условиях обычно имеет место небольшое, но постоянное подтекание гексафторида урана в воздух рабочего помещения. В воздухе, взаимодействуя с парами воды, газообразный ГФУ порождает серию газообразных и аэрозольных продуктов гидролиза

(см. [7]): UF_6 (газ), UOF_4 (газ), UO_2F_2 (газ), HF (газ), UO_2F_2 (аэрозоль), HF (аэрозоль). Молекулы этих веществ содержат атомы урана и фтора, которые, попадая в организм человека, могут причинить вред как за счет химического, так и за счет радиационного воздействия (уран α -активен).

В [2] построены три математические модели, описывающие (в совокупности) воздействие ГФУ на организм человека. Первая модель описывает загрязнение рабочего помещения продуктами гидролиза ГФУ. В основе этой модели лежат начально-краевые задачи, поставленные для уравнений непрерывности, записанных для концентраций молекул газообразных веществ и для удельных (по радиусам аэрозольных частиц) концентраций молекул аэрозольных веществ. Учитываются следующие физические и химические процессы: оседание продуктов гидролиза ГФУ на пол, потолок и стены рабочего помещения за счет диффузии; оседание аэрозольных продуктов гидролиза ГФУ на пол рабочего помещения за счет движения под действием силы тяжести и силы сопротивления среды; гидролиз веществ UF_6 (газ), UOF_4 (газ); участие молекул веществ UO_2F_2 (газ), HF (газ) в процессе нуклеации (т.е. в процессе образования аэрозольных частиц); вывод продуктов гидролиза ГФУ из рабочего помещения за счет воздухообмена; поступление вещества UF_6 (газ) в рабочее помещение. В общем случае первая модель сложна и плохо поддается исследованию, однако в некоторых конкретных ситуациях она заметно упрощается. В настоящей работе рассматривается частный случай первой модели, который мы далее будем упоминать как модель ПСПВ (плоский слой, постоянный выброс). Вторая и третья модель описывают прохождение токсичных веществ (урана и фтора) через организм человека при перкутанном и ингаляционном поступлении.

В [1, 3, 4] уже рассматривалась модель ПСПВ. В [4] построено точное решение основной краевой задачи модели ПСПВ. Как и следовало ожидать, это решение оказалось довольно громоздким и неудобным для интегрирования по радиусам аэрозольных частиц. В частности поэтому в указанной работе рассматривалась исключительно монодисперсная система аэрозолей. В [1] основные краевые задачи модели ПСПВ рассмотрены в рамках теории возмущений. При этом предполагается, что диффузия газов протекает много медленнее гидролиза, нуклеации и воздухообмена, а диффузия аэрозолей протекает много медленнее макроскопического движения аэрозолей и воздухообмена. В [1] построены также формальные приближенные решения основных краевых задач модели ПСПВ. При этом использован метод пограничных функций (метод А. Б. Васильевой; см. [5]). В [3] упомянутое приближенное решение используется для решения прикладных задач.

Далее мы предполагаем, что теория строится для последовательности веществ, включающей в себя все газообразные продукты гидролиза ГФУ и один из аэрозольных продуктов гидролиза ГФУ. К сожалению, применение теории возмущений к краевой задаче для аэрозолей затруднено тем, что при малых значениях радиусов аэрозольных частиц роль малого параметра играет не только коэффициент диффузии, но и скорость макроскопического движения аэрозольных частиц. Уже в [1] из-за этого пришлось несколько отклониться от классической схемы метода пограничных функций. В настоящей статье строится приближенное решение краевой задачи для аэрозолей, позволяющее более точно описать поведение аэрозольных частиц малого размера, и проводится оценка погрешности. Результаты, полученные с помощью нового решения, хорошо согласуются с экспериментальными данными, обсуждавшимися в [3].

1. Краевая задача для газов. Введем несколько вспомогательных обозначений.

Пусть A, B — множества. Для отображения F будем писать $F: A \rightarrow B$, если $D(F) \subseteq A$, $R(F) \subseteq B$ и $F: A \Rightarrow B$, если F — отображение, $D(F) = A$, $R(F) \subseteq B$.

Пусть A, B — множества, F — отображение, $D(F) = A \times B$. Для $x \in A$ обозначим через $[F]_x^1$ такое отображение, что $D([F]_x^1) = B$, $[F]_x^1(y) = F(x, y)$ при $y \in B$. Иными словами, $[F]_x^1$ — отображение, которое каждому объекту $y \in B$ ставит в соответствие объект $F(x, y)$.

Аналогично, для $y \in B$ обозначим через $[F]_y^2$ такое отображение, что $D([F]_y^2) = A$, $[F]_y^2(x) = F(x, y)$ при $x \in A$. Иными словами, $[F]_y^2$ — отображение, которое каждому объекту $x \in A$ ставит в соответствие объект $F(x, y)$.

Пусть $N \in \mathbb{N}$. Пространство столбцов $\mathbb{R}^N$ будем рассматривать как линейное евклидово пространство (см. [6]).

Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Обозначим через $\text{diag}(x)$ диагональную матрицу размера $N \times N$, на главной диагонали которой стоят числа $x^1, \dots, x^N$.

Пусть $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Обозначим через $\hat{Q}$ отображение, $D(\hat{Q}) = \mathbb{R}^N$, $\hat{Q}(x) = Qx$ при $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $\hat{Q}: \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbb{R}^N$, $\hat{Q}$ — линейный оператор.

В рамках модели ПСПВ для концентраций молекул интересующих нас газообразных продуктов гидролиза ГФУ может быть записана следующая краевая задача (см. [1, 2]):

$$D^m \frac{\partial^2}{\partial z^2} n^m(z) + \sum_{k=1}^N a_k^m n^k(z) = -F^m, \quad z \in [0, h], \quad m = \overline{1, N}; \quad (1)$$

$$n(0) = \theta, \quad n(h) = \theta. \quad (2)$$

Здесь h — высота рабочего помещения, $h \in (0, +\infty)$; N — число интересующих нас газообразных продуктов гидролиза ГФУ, $N \in \mathbb{N}$; $n^m(z)$ — концентрация молекул газообразного вещества с номером m на высоте z , $n: [0, h] \Rightarrow \mathbb{R}^N$, n — C^2 -гладкая функция; D^m — коэффициент диффузии молекул газообразного вещества с номером m , $D^m \in (0, +\infty)$; a — матрица коэффициентов, описывающих гидролиз, нуклеацию, воздухообмен, $a = a_0 - KI$, a_0 — матрица коэффициентов, описывающих гидролиз, нуклеацию, $a_0 \in \mathbb{R}^{N \times N}$, K — кратность воздухообмена в рабочем помещении, $K \in [0, +\infty)$; F^m — плотность мощности внешних источников молекул газообразного вещества с номером m , $F^m \in [0, +\infty)$.

Обозначим через $j^m(z)$ плотность потока числа молекул газообразного вещества с номером m через плоскость, заданную уравнением $\tilde{z} = z$, в направлении нормали $\nu = (0, 0, -1)^T$. Согласно закону Фика

$$j^m(z) = D^m \frac{\partial}{\partial z} n^m(z).$$

Для дальнейшего удобно ввести следующую вспомогательную краевую задачу:

$$D^m \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{n}^m(z) + \sum_{k=1}^N a_k^m \tilde{n}^k(z) = \tilde{F}^m, \quad z \in [0, h], \quad m = \overline{1, N}; \quad (3)$$

$$\tilde{n}(0) = \tilde{\alpha}, \quad \tilde{n}(h) = \tilde{\beta}. \quad (4)$$

Здесь $\tilde{n}: [0, h] \Rightarrow \mathbb{R}^N$, $\tilde{n}$ — C^2 -гладкая функция; $\tilde{F}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}^N$ ($\tilde{F}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ — вспомогательные параметры, которые мы будем выбирать различными способами). Очевидно, что краевая задача (1, 2) эквивалентна краевой задаче (3, 4; $\tilde{F} = -F$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} = \theta$), т.е. краевой задаче, которая получится, если в краевой задаче (3, 4) положить $\tilde{F} = -F$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} = \theta$.

Замечание 1.1. Обсудим дополнительные условия на величины D , a_0 , K .

Так как $D^1, \dots, D^N \neq 0$, то $\det(\text{diag}(D)) \neq 0$. Введем обозначение $A = \text{diag}(D)^{-1}a$. Предположим, что существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и столбцы $\chi_1, \dots, \chi_N$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (1) для любого числа $k = \overline{1, N}$ справедливы утверждения: $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $\chi_k \in \mathbb{R}^N$, $(A - \lambda_k I)\chi_k = \theta$;
- (2) $\chi_1, \dots, \chi_N$ — линейно независимые столбцы;
- (3) $\lambda_1, \dots, \lambda_N < 0$.

Нетрудно доказать следующие утверждения:

- (1) для любого $k = \overline{1, N}$ число λ_k — собственное значение оператора $\hat{A}$, χ_k — собственный вектор оператора $\hat{A}$, соответствующий собственному значению λ_k ;
- (2) $\chi_1, \dots, \chi_N$ — базис пространства $\mathbb{R}^N$;
- (3) любое собственное значение λ_* оператора $\hat{A}$ встречается в последовательности $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ столько раз, какова его геометрическая кратность;
- (4) $\lambda_1, \dots, \lambda_N < 0$.

Иными словами, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — полный набор собственных значений оператора $\hat{A}$, $\chi_1, \dots, \chi_N$ — полный набор собственных векторов оператора $\hat{A}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N < 0$.

Так как все собственные значения оператора $\hat{A}$ отличны от нуля, то $\det(A) \neq 0$. Тогда $\det(a) \neq 0$.

Введем обозначение $\delta_k = \sqrt{-\lambda_k}$. Тогда $\delta_k \in (0, +\infty)$, $\lambda_k = -(\delta_k)^2$. Введем обозначения

$$n_{1,k}(z) = e^{-\delta_k z} \chi_k, \quad n_{2,k}(z) = e^{\delta_k z} \chi_k.$$

Тогда $n_{1,1}, \dots, n_{1,N}, n_{2,1}, \dots, n_{2,N}$ — фундаментальная совокупность решений (ФСР) системы уравнений (3; $\tilde{F} = \theta$) (см. [9]). Используя функции $n_{1,1}, \dots, n_{1,N}, n_{2,1}, \dots, n_{2,N}$, нетрудно доказать, что краевая задача (3, 4; $\tilde{F}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} = \theta$) имеет только тривиальное решение. Тогда существует единственное решение краевой задачи (3, 4) (для любых $\tilde{F}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$) (см. [8]).

Замечание 1.2. Обсудим более жесткие дополнительные условия на величины D, a_0, K , выполнение которых гарантирует выполнение условий из замечания 1.1.

Предположим, что $A_k^m = 0$ при $m < k$ (т.е. A — нижнетреугольная матрица); $A_k^k \neq A_m^m$ при $k \neq m$; $A_k^k < 0$. Введем обозначение $\lambda_k = A_k^k$. Построим последовательность столбцов $\chi_1, \dots, \chi_N$ следующим образом:

$$\chi_k \in \mathbb{R}^N; \quad \chi_k^m = \begin{cases} 0, & m < k, \\ 1, & m = k; \end{cases}$$

$$\chi_k^m = -\frac{1}{A_m^m - A_k^k} \sum_{i=k}^{m-1} A_i^m \chi_k^i, \quad m > k.$$

Тогда последовательность чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и последовательность столбцов $\chi_1, \dots, \chi_N$ удовлетворяют условиям из замечания 1.1.

2. Краевая задача для аэрозолей. В рамках модели ПСПВ для удельной (по радиусам аэрозольных частиц) концентрации молекул интересующего нас аэрозольного продукта гидролиза ГФУ может быть записана следующая краевая задача (см. [1, 2]):

$$D_a \frac{\partial^2}{\partial z^2} n'(r, z) + v_a(r) \frac{\partial}{\partial z} n'(r, z) - K n'(r, z) = -g_0(r) F_0(z), \quad r \in (0, +\infty), \quad z \in [0, h]; \quad (5)$$

$$n'(r, 0) = 0, \quad r \in (0, +\infty); \quad n'(r, h) = 0, \quad r \in (0, +\infty). \quad (6)$$

Здесь $n'(r, z)$ — удельная (по радиусам аэрозольных частиц) концентрация молекул аэрозольного вещества в составе аэрозольных частиц радиуса r на высоте z , $n': (0, +\infty) \times [0, h] \Rightarrow \mathbb{R}$, $[n']_r^1 - C^2$ -гладкая функция; D_a — коэффициент диффузии молекул аэрозольного вещества, $D_a \in (0, +\infty)$; $v_a(r)$ — скорость движения аэрозольной частицы радиуса r под действием силы тяжести и силы сопротивления среды; $g_0(r)$ — плотность вероятности того, что в процессе нуклеации молекула газообразного вещества попадет в состав аэрозольной частицы радиуса r , иными словами, g_0 — дифференциальная функция распределения радиусов аэрозольных частиц, образующихся в процессе нуклеации; $F_0(z)$ — плотность мощности источников молекул аэрозольного вещества на высоте z ,

$$F_0(z) = \sum_{m=1}^N b_m n^m(z),$$

$b_1, \dots, b_N$ — коэффициенты, описывающие нуклеацию, $b_1, \dots, b_N \in [0, +\infty)$.

Введем обозначения

$$n_a(r, z) = \int_0^r d\tilde{r} \cdot n'(\tilde{r}, z), \quad n_\infty(z) = \int_0^{+\infty} d\tilde{r} \cdot n'(\tilde{r}, z)$$

для концентрации молекул аэрозольного вещества в составе аэрозольных частиц радиусов не больше r на высоте z и концентрации молекул аэрозольного вещества на высоте z соответственно. Обозначим через $j'(r, z)$ удельную (по радиусам аэрозольных частиц) плотность потока числа молекул аэрозольного вещества в составе аэрозольных частиц радиуса r через плоскость, заданную уравнением $\tilde{z} = z$, в направлении нормали $\nu = (0, 0, -1)^T$. Согласно закону Фика

$$j'(r, z) = D_a \frac{\partial}{\partial z} n'(r, z) + v_a(r) n'(r, z).$$

Обозначим через

$$j_a(r, z) = \int_0^r d\tilde{r} \cdot j'(\tilde{r}, z)$$

плотность потока числа молекул аэрозольного вещества в составе аэрозольных частиц радиусов $\leq r$ через плоскость, заданную уравнением $\tilde{z} = z$, в направлении нормали $\nu = (0, 0, -1)^T$. Обозначим через

$$j_\infty(z) = \int_0^{+\infty} d\tilde{r} \cdot j'(\tilde{r}, z)$$

плотность потока числа молекул аэрозольного вещества через плоскость, заданную уравнением $\tilde{z} = z$, в направлении нормали $\nu = (0, 0, -1)^T$.

Для дальнейшего удобно ввести следующую вспомогательную краевую задачу:

$$D_a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{n}'(z) + v_a(r) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{n}'(z) - K \tilde{n}'(z) = \tilde{F}_a(z), \quad z \in [0, h]; \quad (7)$$

$$\tilde{n}'(0) = \tilde{\alpha}_a, \quad \tilde{n}'(h) = \tilde{\beta}_a. \quad (8)$$

Здесь $\tilde{n}' : [0, h] \Rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{n}' - C^2$ -гладкая функция; $r \in (0, +\infty)$ (r — параметр, имеющий смысл радиуса аэрозольной частицы), $\tilde{F}_a : [0, h] \Rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{F}_a$ — непрерывная функция, $\tilde{\alpha}_a, \tilde{\beta}_a \in \mathbb{R}$ ($\tilde{F}_a, \tilde{\alpha}_a, \tilde{\beta}_a$ — вспомогательные параметры, которые мы будем выбирать различными способами). Очевидно, что $[\tilde{n}']_r^1$ — решение краевой задачи (7, 8; $\tilde{F}_a = -g_0(r)F_0$, $\tilde{\alpha}_a, \tilde{\beta}_a = 0$).

Замечание. Обсудим построение функций v_a, g_0 . В рассматриваемой модели скорость движения аэрозольной частицы радиуса r под действием силы тяжести и силы сопротивления среды определяется формулой $v_a(r) = \gamma r^2$. Здесь

$$\gamma = \frac{m_1 g}{6\pi\eta(r_1)^3},$$

g — ускорение свободного падения, η — коэффициент вязкости воздуха, r_1 — радиус молекулы аэрозольного вещества, m_1 — масса молекулы аэрозольного вещества.

В [2] показано, что для вещества UO_2F_2 (аэрозоль) распределение радиусов аэрозольных частиц, образующихся в процессе нуклеации, описывается логарифмически нормальным законом. Иными словами, можно записать следующее равенство:

$$g_0(r) = \frac{1}{\ln(\beta_g)\sqrt{2\pi}} \frac{1}{r} \exp\left(-\left(\frac{\ln(r) - \ln(r_g)}{\ln(\beta_g)\sqrt{2}}\right)^2\right).$$

Здесь r_g — геометрическое среднее радиусов аэрозольных частиц, $r_g \in (0, +\infty)$; β_g — геометрическое стандартное отклонение радиусов аэрозольных частиц, $\beta_g \in (1, +\infty)$.

Мы предполагаем, что для вещества HF (аэрозоль) распределение радиусов аэрозольных частиц, образующихся в процессе нуклеации, также описывается логарифмически нормальным законом.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \delta_{a,1}(r) &= \sqrt{\left(\frac{v_a(r)}{2D_a}\right)^2 + \frac{K}{D_a}} + \frac{v_a(r)}{2D_a}, & \delta_{a,2}(r) &= \sqrt{\left(\frac{v_a(r)}{2D_a}\right)^2 + \frac{K}{D_a}} - \frac{v_a(r)}{2D_a}, \\ \mu_1(r) &= \sqrt{\left(\frac{v_a(r)}{2D_a}\right)^2 + \frac{K}{D_a}}, & \mu_2(r) &= \sqrt{(v_a(r))^2 + 4D_a K}. \end{aligned}$$

Тогда

$$0 \leq \delta_{a,2}(r) < \mu_1(r) < \delta_{a,1}(r), \quad \delta_{a,1}(r) + \delta_{a,2}(r) = 2\mu_1(r), \quad 2D_a\mu_1(r) = \mu_2(r).$$

Введем обозначения

$$n'_1(r, z) = e^{-\delta_{a,1}(r)z}, \quad n'_2(r, z) = e^{\delta_{a,2}(r)z}.$$

Тогда $[n'_1]_r^1, [n'_2]_r^1$ — ФСР уравнения (7); $\tilde{F}_a = \Theta$ (см. [9]). Используя функции n'_1, n'_2 , нетрудно доказать, что краевая задача (7, 8; $\tilde{F}_a = \Theta$, $\tilde{\alpha}_a, \tilde{\beta}_a = 0$) имеет только тривиальное решение (для

любого r). Тогда существует единственное решение краевой задачи (7, 8) (для любых $r, \tilde{F}_a, \tilde{\alpha}_a, \tilde{\beta}_a$) (см. [8]).

3. «Приближенное решение» краевой задачи для газов. Далее построим «приближенное решение» краевой задачи (1, 2). Мы предполагаем, что «приближенное решение» «мало отличается» от «точного решения», если выполнено следующее условие:

$$\sum_{k=1}^N e^{-\delta_k h} \ll 1. \quad (9)$$

Физический смысл условия (9) состоит в допущении, что в масштабах рабочего помещения диффузия газов протекает много медленнее, чем гидролиз, нуклеация, воздухообмен.

«Приближенное решение» будем строить по следующей схеме. Сначала построим некоторое частное решение системы уравнений (3; $\tilde{F} = -F$) (не обращая внимания на краевые условия). Затем прибавим к этому частному решению некоторую линейную комбинацию фундаментальных решений системы уравнений (3; $\tilde{F} = \theta$) и получим функцию, которая удовлетворяет системе уравнений (3; $\tilde{F} = -F$) и краевым условиям, которые «мало отличаются» от краевых условий (4; $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} = \theta$).

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$ax = -F, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (10)$$

Так как $\det(a) \neq 0$, то существует единственное решение Rn системы уравнений (10); тогда $Rn = -a^{-1}F$. Очевидно, Rn — решение системы уравнений (3; $\tilde{F} = -F$) (мы отождествляем константы и соответствующие им постоянные функции). Будем говорить, что Rn — регулярная часть «приближенного решения» краевой задачи (1, 2).

Замечание. Предположим, что выполнены условия на величины D, a_0, K из замечания 1.2. Тогда можно записать следующие равенства:

$$(Rn)^1 = -\frac{1}{a_1^1}F^1, \quad (Rn)^m = -\frac{1}{a_m^m}F^m - \frac{1}{a_m^m} \sum_{k=1}^{m-1} a_k^m (Rn)^k, \quad m = \overline{2, N}.$$

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\chi x = -Rn, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (11)$$

Так как $\det(\chi) \neq 0$, то существует единственное решение C_* системы. Тогда

$$C_* = \chi^{-1}(-Rn) = \chi^{-1}a^{-1}F = (a\chi)^{-1}F = (\text{diag}(D)A\chi)^{-1}F = (\text{diag}(D)\chi \text{diag}(\lambda^T))^{-1}F.$$

Замечание. Предположим, что выполнены условия на величины D, a_0, K из замечания 1.2, причем последовательность чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и последовательность столбцов $\chi_1, \dots, \chi_N$ построены так, как указано в этом замечании. Тогда можно записать следующие равенства:

$$C_*^1 = -(Rn)^1; \quad C_*^m = -(Rn)^m - \sum_{k=1}^{m-1} \chi_k^m C_*^k, \quad m = \overline{2, N}.$$

Введем обозначение

$$P_1 n(z) = \sum_{k=1}^N e^{-\delta_k z} C_*^k \chi_k.$$

Очевидно, $P_1 n$ — решение системы уравнений (3; $\tilde{F} = \theta$), $P_1 n(0) = -Rn$. Будем говорить, что $P_1 n$ — нижняя погранслоиная часть «приближенного решения» краевой задачи (1, 2).

Введем обозначение

$$P_2 n(z) = \sum_{k=1}^N e^{\delta_k(z-h)} C_*^k \chi_k.$$

Очевидно, P_2n — решение системы уравнений (3; $\tilde{F} = \theta$), $P_2n(h) = -Rn$. Будем говорить, что P_2n — верхняя погранслоинная часть «приближенного решения» краевой задачи (1, 2).

Введем обозначение

$$An = Rn + P_1n + P_2n.$$

Очевидно, An — решение краевой задачи (3, 4; $\tilde{F} = -F$, $\tilde{\alpha} = P_2n(0)$, $\tilde{\beta} = P_1n(h)$). Будем говорить, что An — «приближенное решение» краевой задачи (1, 2).

Введем обозначение

$$Qn = n - An.$$

Очевидно, Qn — решение краевой задачи (3, 4; $\tilde{F} = \theta$, $\tilde{\alpha} = -P_2n(0)$, $\tilde{\beta} = -P_1n(h)$). Будем говорить, что Qn — погрешность «приближенного решения» краевой задачи (1, 2).

Используя функцию An вместо функции n , естественным образом определяем функции Aj , AF_0 . Введем обозначения $Qj = j - Aj$, $QF_0 = F_0 - AF_0$. Далее мы получим выражения для величин $(An)^m(z)$, $(Aj)^m(0)$, $AF_0(z)$. Очевидно,

$$(An)^m(z) = (Rn)^m + (P_1n)^m(z) + (P_2n)^m(z) = (Rn)^m + \sum_{k=1}^N (e^{-\delta_k z} + e^{\delta_k(z-h)}) C_*^k \chi_k^m.$$

Тогда

$$(Aj)^m(0) = D^m \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (An)^m(\tilde{z}) \Big|_{\tilde{z}=0} = D^m \sum_{k=1}^N \delta_k (-1 + e^{-\delta_k h}) C_*^k \chi_k^m.$$

Введем обозначения

$$RB = \sum_{m=1}^N b_m (Rn)^m, \quad (PB)_k = \sum_{m=1}^N b_m C_*^k \chi_k^m.$$

Тогда

$$AF_0(z) = \sum_{m=1}^N b_m (An)^m(z) = RB + \sum_{k=1}^N (e^{-\delta_k z} + e^{\delta_k(z-h)}) (PB)_k.$$

Наконец, получим конструктивно вычислимую оценку погрешности «приближенного решения» задачи (1, 2).

Утверждение. *Справедливы следующие формулы:*

$$\begin{aligned} Qn(z) &= - \sum_{k=1}^N (e^{-\delta_k z} + e^{\delta_k(z-h)}) \frac{e^{-\delta_k h}}{1 + e^{-\delta_k h}} C_*^k \chi_k, & z \in [0, h]; \\ \frac{\partial}{\partial z} Qn(z) &= - \sum_{k=1}^N \delta_k (-e^{-\delta_k z} + e^{\delta_k(z-h)}) \frac{e^{-\delta_k h}}{1 + e^{-\delta_k h}} C_*^k \chi_k, & z \in [0, h]; \\ |(Qn)^m(z)| &\leq 2 \sum_{k=1}^N e^{-\delta_k h} |C_*^k \chi_k^m|, & z \in [0, h], \quad m = \overline{1, N}; \\ \left| \frac{\partial}{\partial z} (Qn)^m(z) \right| &\leq 2 \sum_{k=1}^N \delta_k e^{-\delta_k h} |C_*^k \chi_k^m|, & z \in [0, h], \quad m = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как Qn — решение системы уравнений (3; $\tilde{F} = \theta$), то существуют числа $C_1^1, \dots, C_1^N, C_2^1, \dots, C_2^N \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям

$$Qn(z) = \sum_{k=1}^N (e^{-\delta_k z} C_1^k + e^{\delta_k(z-h)} C_2^k) \chi_k, \quad z \in [0, h].$$

Так как $Qn(0) = -P_2n(0)$, $Qn(h) = -P_1n(h)$, то

$$\sum_{k=1}^N (C_1^k + e^{-\delta_k h} C_2^k) \chi_k = - \sum_{k=1}^N C_*^k \chi_k, \quad \sum_{k=1}^N (e^{-\delta_k h} C_1^k + C_2^k) \chi_k = - \sum_{k=1}^N C_*^k \chi_k.$$

Так как $\chi_1, \dots, \chi_N$ — линейно независимые столбцы, то для любого числа $k = \overline{1, N}$ имеем

$$C_1^k + e^{-\delta_k h} C_2^k = -C_*^k, \quad e^{-\delta_k h} C_1^k + C_2^k = -C_*^k.$$

Тогда

$$C_1^k = -\frac{e^{-\delta_k h}}{1 + e^{-\delta_k h}} C_*^k, \quad C_2^k = -\frac{e^{-\delta_k h}}{1 + e^{-\delta_k h}} C_*^k.$$

Следовательно,

$$Qn(z) = - \sum_{k=1}^N (e^{-\delta_k z} + e^{\delta_k(z-h)}) \frac{e^{-\delta_k h}}{1 + e^{-\delta_k h}} C_*^k \chi_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Qn(z) = - \sum_{k=1}^N \delta_k (-e^{-\delta_k z} + e^{\delta_k(z-h)}) \frac{e^{-\delta_k h}}{1 + e^{-\delta_k h}} C_*^k \chi_k.$$

Тогда

$$|(Qn)^m(z)| \leq 2 \sum_{k=1}^N e^{-\delta_k h} |C_*^k \chi_k^m|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} (Qn)^m(z) \right| \leq 2 \sum_{k=1}^N \delta_k e^{-\delta_k h} |C_*^k \chi_k^m|. \quad \square$$

4. «Приближенное решение» краевой задачи для аэрозолей. Далее мы построим «приближенное решение» краевой задачи (5, 6). Мы предполагаем, что «приближенное решение» «мало отличается» от «точного решения», если выполнено условие (9) и следующее условие:

$$\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \ll 1. \quad (12)$$

Физический смысл условия (12) состоит в допущении, что в масштабах рабочего помещения диффузия аэрозолей протекает много медленнее, чем макроскопическое движение аэрозолей и воздухообмен.

«Приближенное решение» будем строить по следующей схеме. Сначала построим некоторое частное решение уравнения (7; $\tilde{F}_a = -g_0(r)AF_0$) (не обращая внимания на краевые условия). Затем прибавим к этому частному решению некоторую линейную комбинацию фундаментальных решений уравнения (7; $\tilde{F}_a = \Theta$) и получим функцию, которая удовлетворяет уравнению (7; $\tilde{F}_a = -g_0(r)AF_0$) и краевым условиям, которые «мало отличаются» от краевых условий (8; $\tilde{\alpha}_a, \tilde{\beta}_a = 0$).

Введем следующие обозначения:

$$Q_1(h) = \{(r, z, \xi)^T : r \in (0, +\infty) \wedge z \in [0, h] \wedge \xi \in [0, h] \wedge \xi \leq z\},$$

$$Q_2(h) = \{(r, z, \xi)^T : r \in (0, +\infty) \wedge z \in [0, h] \wedge \xi \in [0, h] \wedge \xi \geq z\}.$$

Тогда

$$Q_1(h) \cup Q_2(h) = (0, +\infty) \times [0, h] \times [0, h];$$

$$Q_1(h) \cap Q_2(h) = \{(r, z, \xi)^T : r \in (0, +\infty) \wedge z \in [0, h] \wedge \xi \in [0, h] \wedge \xi = z\};$$

$$Q_1(h) \setminus Q_2(h) = \{(r, z, \xi)^T : r \in (0, +\infty) \wedge z \in [0, h] \wedge \xi \in [0, h] \wedge \xi < z\};$$

$$Q_2(h) \setminus Q_1(h) = \{(r, z, \xi)^T : r \in (0, +\infty) \wedge z \in [0, h] \wedge \xi \in [0, h] \wedge \xi > z\}.$$

Введем также обозначения

$$RG(r, z, \xi) = -\frac{1}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)(z-\xi)}, \quad (r, z, \xi)^T \in Q_1(h) \setminus Q_2(h);$$

$$RG(r, z, \xi) = -\frac{1}{\mu_2(r)} e^{\delta_{a,2}(r)(z-\xi)}, \quad (r, z, \xi)^T \in Q_2(h) \setminus Q_1(h);$$

$$RG(r, z, \xi) = -\frac{1}{\mu_2(r)}, \quad (r, z, \xi)^T \in Q_1(h) \cap Q_2(h).$$

Функция RG представляет собой некоторое обобщение функции Грина (обобщение, не учитывающее краевые условия; см. [8]).

Договоримся использовать следующие сокращения: $p = (r, z, \xi)^T$, $\tilde{p} = (\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{\xi})^T$, $\tilde{\tilde{p}} = (\tilde{\tilde{r}}, \tilde{\tilde{z}}, \tilde{\tilde{\xi}})^T$ при $(r, z, \xi)^T, (\tilde{r}, \tilde{z}, \tilde{\xi})^T, (\tilde{\tilde{r}}, \tilde{\tilde{z}}, \tilde{\tilde{\xi}})^T \in \mathbb{R}^3$. Производные в граничных точках множеств $Q_1(h)$, $Q_2(h)$ далее понимаются в смысле предельного перехода изнутри указанных множеств, например,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} RG(\tilde{p}) \Big|_{\tilde{p}=p}^{Q_1(h)} = \lim_{\substack{\tilde{p} \rightarrow p, \\ \tilde{p} \in \text{int}(Q_1(h))}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} RG(\tilde{\tilde{p}}) \Big|_{\tilde{\tilde{p}}=\tilde{p}}, \quad p \in Q_1(h) \cap Q_2(h).$$

Нетрудно доказать, что справедливы следующие утверждения: $RG: Q_1(h) \cup Q_2(h) \Rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $RG|_{Q_1(h)}$ и $RG|_{Q_2(h)}$ — C^∞ -гладкие функции;

$$RG(p) = -\frac{1}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)(z-\xi)}, \quad p \in Q_1(h);$$

$$RG(p) = -\frac{1}{\mu_2(r)} e^{\delta_{a,2}(r)(z-\xi)}, \quad p \in Q_2(h);$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} RG(\tilde{p}) \Big|_{\tilde{p}=p}^{Q_1(h)} - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} RG(\tilde{p}) \Big|_{\tilde{p}=p}^{Q_2(h)} = \frac{1}{D_a}, \quad p \in Q_1(h) \cap Q_2(h);$$

$$D_a \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} RG(\tilde{p}) \Big|_{\tilde{p}=p}^{Q_1(h)} + v_a(r) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} RG(\tilde{p}) \Big|_{\tilde{p}=p}^{Q_1(h)} - K(RG)(p) = 0, \quad p \in Q_1(h);$$

$$D_a \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} RG(\tilde{p}) \Big|_{\tilde{p}=p}^{Q_2(h)} + v_a(r) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} RG(\tilde{p}) \Big|_{\tilde{p}=p}^{Q_2(h)} - K(RG)(p) = 0, \quad p \in Q_2(h).$$

Введем обозначение

$$Rn'(r, z) = \int_0^h d\xi \cdot RG(r, z, \xi) (-g_0(r) A F_0(\xi)).$$

Нетрудно доказать, что $[Rn']_r^1$ — решение уравнения (7; $\tilde{F}_a = -g_0(r) A F_0$). Будем говорить, что Rn' — регулярная часть «приближенного решения» задачи (5, 6).

Введем обозначение

$$P_2 n'(r, z) = -Rn'(r, h) e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)}.$$

Очевидно, $[P_2 n']_r^1$ — решение уравнения (7; $\tilde{F}_a = \Theta$), $P_2 n'(r, h) = -Rn'(r, h)$. Будем говорить, что $P_2 n'$ — верхняя погранслоная часть «приближенного решения» краевой задачи (5, 6).

Введем обозначение

$$P_1 n'(r, z) = -(Rn'(r, 0) + P_2 n'(r, 0)) e^{-\delta_{a,1}(r)z}.$$

Очевидно, $[P_1 n']_r^1$ — решение уравнения (7; $\tilde{F}_a = \Theta$),

$$P_1 n'(r, 0) = -(Rn'(r, 0) + P_2 n'(r, 0)).$$

Будем говорить, что $P_1 n'$ — нижняя погранслоная часть «приближенного решения» краевой задачи (5, 6).

Введем обозначение

$$An' = Rn' + P_1 n' + P_2 n'.$$

Очевидно, $[An']_r^1$ — решение краевой задачи (7, 8; $\tilde{F}_a = -g_0(r) A F_0$, $\tilde{\alpha}_a = 0$, $\tilde{\beta}_a = P_1 n'(r, h)$). Будем говорить, что An' — «приближенное решение» краевой задачи (5, 6).

Введем обозначение

$$Qn' = n' - An'.$$

Очевидно, $[Qn']_r^1$ — решение краевой задачи (7, 8; $\tilde{F}_a = -g_0(r)QF_0$, $\tilde{\alpha}_a = 0$, $\tilde{\beta}_a = -P_1n'(r, h)$). Будем говорить, что Qn' — погрешность «приближенного решения» краевой задачи (5, 6).

Используя функцию An' вместо функции n' , естественным образом определяем функции An_a , An_∞ , Aj' , Aj_a , Aj_∞ . Введем обозначения

$$Qn_a = n_a - An_a, \quad Qn_\infty = n_\infty - An_\infty, \quad Qj' = j' - Aj', \\ Qj_a = j_a - Aj_a, \quad Qj_\infty = j_\infty - Aj_\infty.$$

Далее мы получим выражения для величин $An'(r, z)$, $Aj'(r, 0)$ и обсудим возможность получения выражений для величин $An_\infty(z)$, $Aj_\infty(0)$.

Введем обозначения

$$\varphi_1(r, z) = \int_0^z d\xi \cdot e^{-\delta_{a,1}(r)(z-\xi)} AF_0(\xi), \quad \varphi_2(r, z) = \int_z^h d\xi \cdot e^{\delta_{a,2}(r)(z-\xi)} AF_0(\xi).$$

Тогда

$$Rn'(r, z) = \int_0^h d\xi \cdot RG(r, z, \xi) (-g_0(r)AF_0(\xi)) = \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} (\varphi_1(r, z) + \varphi_2(r, z)).$$

Следовательно,

$$P_2n'(r, z) = -Rn'(r, h)e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)} = -\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \varphi_1(r, h)e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)}, \\ P_1n'(r, z) = -(Rn'(r, 0) + P_2n'(r, 0))e^{-\delta_{a,1}(r)z} = \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} (\varphi_1(r, h)e^{-\delta_{a,2}(r)h} - \varphi_2(r, 0))e^{-\delta_{a,1}(r)z},$$

$$An'(r, z) = Rn'(r, z) + P_1n'(r, z) + P_2n'(r, z) = \\ = \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} (\varphi_1(r, z) + \varphi_2(r, z) + (\varphi_1(r, h)e^{-\delta_{a,2}(r)h} - \varphi_2(r, 0))e^{-\delta_{a,1}(r)z} - \varphi_1(r, h)e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)}).$$

Тогда

$$Aj'(r, 0) = D_a \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} An'(r, \tilde{z}) \Big|_{\tilde{z}=0} + v_a(r)An'(r, 0) = g_0(r)(\varphi_2(r, 0) - \varphi_1(r, h)e^{-\delta_{a,2}(r)h}).$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_{1,0}(r, z) = \int_0^z d\xi \cdot e^{-\delta_{1,a}(r)(z-\xi)}, \quad \varphi_{1,1,k}(r, z) = \int_0^z d\xi \cdot e^{-\delta_{1,a}(r)(z-\xi) - \delta_k \xi}, \\ \varphi_{1,2,k}(r, z) = \int_0^z d\xi \cdot e^{-\delta_{1,a}(r)(z-\xi) + \delta_k(\xi-h)}, \quad \varphi_{2,0}(r, z) = \int_z^h d\xi \cdot e^{\delta_{2,a}(r)(z-\xi)}, \\ \varphi_{2,1,k}(r, z) = \int_z^h d\xi \cdot e^{\delta_{2,a}(r)(z-\xi) - \delta_k \xi}, \quad \varphi_{2,2,k}(r, z) = \int_z^h d\xi \cdot e^{\delta_{2,a}(r)(z-\xi) + \delta_k(\xi-h)}.$$

Тогда

$$\varphi_1(r, z) = \int_0^z d\xi \cdot e^{-\delta_{a,1}(r)(z-\xi)} AF_0(\xi) = (RB)\varphi_{1,0}(r, z) + \sum_{k=1}^N (PB)_k (\varphi_{1,1,k}(r, z) + \varphi_{1,2,k}(r, z)), \\ \varphi_2(r, z) = \int_z^h d\xi \cdot e^{\delta_{a,2}(r)(z-\xi)} AF_0(\xi) = (RB)\varphi_{2,0}(r, z) + \sum_{k=1}^N (PB)_k (\varphi_{2,1,k}(r, z) + \varphi_{2,2,k}(r, z)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
An'(r, z) = & \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)}(RB) \left(\varphi_{1,0}(r, z) + \varphi_{2,0}(r, z) + (\varphi_{1,0}(r, h)e^{-\delta_{a,2}(r)h} - \right. \\
& \left. - \varphi_{2,0}(r, 0))e^{-\delta_{a,1}(r)z} - \varphi_{1,0}(r, h)e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)} \right) + \\
& + \sum_{k=1}^N \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)}(PB)_k \left(\varphi_{1,1,k}(r, z) + \varphi_{1,2,k}(r, z) + \varphi_{2,1,k}(r, z) + \varphi_{2,2,k}(r, z) + \right. \\
& + (\varphi_{1,1,k}(r, h)e^{-\delta_{a,2}(r)h} + \varphi_{1,2,k}(r, h)e^{-\delta_{a,2}(r)h} - \varphi_{2,1,k}(r, 0) - \varphi_{2,2,k}(r, 0))e^{-\delta_{a,1}(r)z} - \\
& \left. - (\varphi_{1,1,k}(r, h) + \varphi_{1,2,k}(r, h))e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Aj'(r, 0) = & g_0(r)(RB) (\varphi_{2,0}(r, 0) - \varphi_{1,0}(r, h)e^{-\delta_{a,2}(r)h}) + \\
& + \sum_{k=1}^N g_0(r)(PB)_k (\varphi_{2,1,k}(r, 0) + \varphi_{2,2,k}(r, 0) - \varphi_{1,1,k}(r, h)e^{-\delta_{a,2}(r)h} - \varphi_{1,2,k}(r, h)e^{-\delta_{a,2}(r)h}).
\end{aligned}$$

Вычисляя интегралы, входящие в определения функций $\varphi_{1,0}$, $\varphi_{1,1,k}$, $\varphi_{1,2,k}$, $\varphi_{2,0}$, $\varphi_{2,1,k}$, $\varphi_{2,2,k}$, нетрудно получить выражения для величин $An'(r, z)$, $Aj'(r, 0)$. К сожалению, упомянутые выражения оказываются довольно громоздкими. Чтобы сделать ответ обозримым (и приспособить его для дальнейшего интегрирования по радиусам аэрозольных частиц), введем большое количество вспомогательных функций.

Рассмотрим функцию

$$DE(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^1 x^3 + x^4} - e^{x^2 x^3 + x^4}}{x^1 - x^2}, & x \in \mathbb{R}^4, \quad x^1 \neq x^2, \\ x^3 e^{x^2 x^3 + x^4}, & x \in \mathbb{R}^4, \quad x^1 = x^2; \end{cases}$$

$DE: \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}$ — вещественно аналитическая функция. Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
(Fn')_{1,1}(r, z) &= -\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)\delta_{a,1}(r)}e^{-\delta_{a,1}(r)z} + \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)\delta_{a,1}(r)}e^{-\delta_{a,1}(r)z - \delta_{a,2}(r)h}, \\
(Fn')_{1,2}(r, z) &= -\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)\delta_{a,1}(r)}e^{-\delta_{a,1}(r)(h+z) - \delta_{a,2}(r)h}, \\
(Fn')_{1,3}(r, z) &= -\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)}DE(0, -\delta_{a,2}(r), h, -\delta_{a,1}(r)z); \\
(Fn')_{1,4}(r, z) &= \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)\delta_{a,1}(r)} - \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)\delta_{a,1}(r)}e^{-\delta_{a,2}(r)(h-z)}, \\
(Fn')_{1,5}(r, z) &= \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)\delta_{a,1}(r)}e^{-\delta_{a,1}(r)h - \delta_{a,2}(r)(h-z)}, \\
(Fn')_{1,6}(r, z) &= \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)}DE(0, -\delta_{a,2}(r), h - z, 0); \\
(Fn')_{2,1,k}(r, z) &= \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,2}(r)}e^{-\delta_k z}; \\
(Fn')_{2,2,k}(r, z) &= -\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,1}(r)}e^{-\delta_k h - \delta_{a,1}(r)z}; \\
(Fn')_{2,3,k}(r, z) &= \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)}DE(-\delta_k, -\delta_{a,1}(r), h, -\delta_{a,1}(r)z - \delta_{a,2}(r)h); \\
(Fn')_{2,4,k}(r, z) &= \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,1}(r)}e^{-\delta_{a,1}(r)z - \delta_{a,2}(r)h}; \\
(Fn')_{2,5,k}(r, z) &= -\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,1}(r)}e^{-\delta_k h - \delta_{a,1}(r)(h+z) - \delta_{a,2}(r)h};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Fn')_{2,6,k}(r, z) &= -\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,2}(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)z} + \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,2}(r)} e^{-\delta_k h - \delta_{a,1}(r)z - \delta_{a,2}(r)h} - \\
&\quad - \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \text{DE}(-\delta_k, -\delta_{a,2}(r), h, -\delta_{a,1}(r)z); \\
(Fn')_{2,7,k}(r, z) &= \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \text{DE}(-\delta_k, -\delta_{a,1}(r), z, 0); \\
(Fn')_{2,8,k}(r, z) &= \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,1}(r)} e^{-\delta_k(h-z)}; \\
(Fn')_{2,9,k}(r, z) &= -\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,2}(r)} e^{-\delta_k h - \delta_{a,2}(r)(h-z)}; \\
(Fn')_{2,10,k}(r, z) &= -\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \text{DE}(-\delta_k, -\delta_{a,1}(r), h, -\delta_{a,2}(r)(h-z)); \\
(Fn')_{2,11,k}(r, z) &= -\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,1}(r)} e^{-\delta_{a,2}(r)(h-z)}; \\
(Fn')_{2,12,k}(r, z) &= \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,1}(r)} e^{-\delta_k h - \delta_{a,1}(r)h - \delta_{a,2}(r)(h-z)}; \\
(Fn')_{2,13,k}(r, z) &= \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \text{DE}(-\delta_k, -\delta_{a,2}(r), h-z, 0).
\end{aligned}$$

Тогда

$$An'(r, z) = (RB) \sum_{m=1}^6 (Fn')_{1,m}(r, z) + \sum_{k=1}^N (PB)_k \sum_{m=1}^{13} (Fn')_{2,m,k}(r, z).$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
(Fj')_{1,1}(r) &= g_0(r) \text{DE}(0, -\delta_{a,2}(r), h, 0), \\
(Fj')_{1,2}(r) &= -\frac{g_0(r)}{\delta_{a,1}(r)} e^{-\delta_{a,2}(r)h}, \\
(Fj')_{1,3}(r) &= \frac{g_0(r)}{\delta_{a,1}(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h - \delta_{a,2}(r)h}, \\
(Fj')_{2,1,k}(r) &= g_0(r) \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,2}(r)} - g_0(r) \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,2}(r)} e^{-\delta_k h - \delta_{a,2}(r)h} \\
&\quad + g_0(r) \text{DE}(-\delta_k, -\delta_{a,2}(r), h, 0); \\
(Fj')_{2,2,k}(r) &= -g_0(r) \text{DE}(-\delta_k, -\delta_{a,1}(r), h, -\delta_{a,2}(r)h); \\
(Fj')_{2,3,k}(r) &= -g_0(r) \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,1}(r)} e^{-\delta_{a,2}(r)h}; \\
(Fj')_{2,4,k}(r) &= g_0(r) \frac{1}{\delta_k + \delta_{a,1}(r)} e^{-\delta_k h - \delta_{a,1}(r)h - \delta_{a,2}(r)h}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$Aj'(r, 0) = (RB) \sum_{m=1}^3 (Fj')_{1,m}(r) + \sum_{k=1}^N (PB)_k \sum_{m=1}^4 (Fj')_{2,m,k}(r).$$

Используя выражения для величин $An'(r, z)$, $Aj'(r, 0)$, нетрудно выразить величины $An_\infty(z)$, $Aj_\infty(0)$ через некоторые несобственные интегралы по радиусам аэрозольных частиц. Значения упомянутых интегралов можно вычислить приближенно с помощью стандартных численных методов в рамках программного продукта Wolfram Mathematica 6. Окончательно получаем, что для величин $An_\infty(z)$, $Aj_\infty(0)$ можно получить выражения, допускающие приближенное вычисление. Следует заметить, что при отсутствии воздухообмена (т.е. в случае $K = 0$) выражения для величин $An'(r, z)$, $Aj'(r, 0)$, $An_\infty(z)$, $Aj_\infty(0)$ значительно упрощаются. Используя выражения

для величин $An(z)$, $An_\infty(z)$, $Aj(0)$, $Aj_\infty(0)$, можно получить выражения для целого ряда наблюдаемых величин, которые характеризуют воздействие токсичных веществ на организм человека (см. [2, 3]).

Наконец, получим конструктивно вычислимую оценку погрешности «приближенного решения» задачи (5, 6). Введем обозначения

$$F_{0,1} = 2 \sum_{k=1}^N e^{-\delta_k h} |(PB)_k|, \quad F_{0,2} = |RB| + 2 \sum_{k=1}^N |(PB)_k|.$$

Утверждение. При $r \in (0, +\infty)$, $z \in [0, h]$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |Qn'(r, z)| &\leq \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \cdot 4F_{0,1}h + \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot 2F_{0,2}h, \\ \left| \frac{\partial}{\partial z} Qn'(r, z) \right| &\leq g_0(r) \frac{4F_{0,1}h}{D_a} + \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot 2F_{0,2} + g_0(r) e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot \frac{2F_{0,2}h}{D_a}. \end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно,

$$|QF_0(z)| = \left| \sum_{m=1}^N b_m (Qn)^m(z) \right| = \left| - \sum_{k=1}^N (e^{-\delta_k z} + e^{\delta_k(z-h)}) \frac{e^{-\delta_k h}}{1 + e^{-\delta_k h}} (PB)_k \right| \leq F_{0,1}.$$

Используя функцию QF_0 вместо функции AF_0 , естественным образом определяем функции $\bar{R}n'$, $\bar{P}_1 n'$, $\bar{P}_2 n'$, $\bar{A}n'$, $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$. Имеем

$$\begin{aligned} |\bar{\varphi}_1(r, z)| &= \left| \int_0^z d\xi \cdot e^{-\delta_{a,1}(r)(z-\xi)} QF_0(\xi) \right| \leq F_{0,1}z, \\ |\bar{\varphi}_2(r, z)| &= \left| \int_z^h d\xi \cdot e^{\delta_{a,2}(r)(z-\xi)} QF_0(\xi) \right| \leq F_{0,1} \cdot (h - z). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\bar{A}n'(r, z)| &= \left| \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \left(\bar{\varphi}_1(r, z) + \bar{\varphi}_2(r, z) + (\bar{\varphi}_1(r, h) e^{-\delta_{a,2}(r)h} - \bar{\varphi}_2(r, 0)) e^{-\delta_{a,1}(r)z} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{\varphi}_1(r, h) e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)} \right) \right| \leq \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \cdot 4F_{0,1}h; \\ \left| \frac{\partial}{\partial z} \bar{A}n'(r, z) \right| &= \left| \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \left(-\delta_{a,1}(r) \bar{\varphi}_1(r, z) + \delta_{a,2}(r) \bar{\varphi}_2(r, z) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \delta_{a,1}(r) (\bar{\varphi}_1(r, h) e^{-\delta_{a,2}(r)h} - \bar{\varphi}_2(r, 0)) e^{-\delta_{a,1}(r)z} - \delta_{a,2}(r) \bar{\varphi}_1(r, h) e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)} \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \cdot \delta_{a,1}(r) 4F_{0,1}h = g_0(r) \frac{\delta_{a,1}(r) 4F_{0,1}h}{D_a (\delta_{a,1}(r) + \delta_{a,2}(r))} \leq g_0(r) \frac{4F_{0,1}h}{D_a}. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$n(z) = An(z) + Qn(z) = Rn + \sum_{k=1}^N (e^{-\delta_k z} + e^{\delta_k(z-h)}) \frac{1}{1 + e^{-\delta_k h}} C_*^k \chi_k.$$

Тогда

$$|F_0(z)| = \left| \sum_{m=1}^N b_m n^m(z) \right| = \left| RB + \sum_{k=1}^N (e^{-\delta_k z} + e^{\delta_k(z-h)}) \frac{1}{1 + e^{-\delta_k h}} (PB)_k \right| \leq F_{0,2}.$$

Используя функцию F_0 вместо функции AF_0 , естественным образом определяем функции $\bar{R}n'$, $\bar{P}_1n'$, $\bar{P}_2n'$, $\bar{A}n'$, $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$. Очевидно,

$$|\bar{\varphi}_1(r, z)| = \left| \int_0^z d\xi \cdot e^{-\delta_{a,1}(r)(z-\xi)} F_0(\xi) \right| \leq F_{0,2}z;$$

$$|\bar{\varphi}_2(r, z)| = \left| \int_z^h d\xi \cdot e^{\delta_{a,2}(r)(z-\xi)} F_0(\xi) \right| \leq F_{0,2} \cdot (h - z).$$

Введем обозначение $\beta_*(r) = -\bar{P}_1(r, h)$. Тогда

$$|\beta_*(r)| = |-\bar{P}_1(r, h)| = \left| -\frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} (\bar{\varphi}_1(r, h)e^{-\delta_{a,2}(r)h} - \bar{\varphi}_2(r, 0))e^{-\delta_{a,1}(r)h} \right| \leq$$

$$\leq \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \cdot 2F_{0,2}h \cdot e^{-\delta_{a,1}(r)h} = \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot 2F_{0,2}h.$$

Введем обозначение $\bar{Q}n' = n' - \bar{A}n'$. Тогда

$$\bar{Q}n' = n' - \bar{A}n' = n' - (An' + \bar{A}n') = Qn' - \bar{A}n'.$$

Очевидно, $Qn' = \bar{A}n' + \bar{Q}n'$, $[\bar{Q}n']_r^1$ — решение краевой задачи (7, 8; $\tilde{F}_a = \Theta$, $\tilde{\alpha}_a = 0$, $\tilde{\beta}_a = -\bar{P}_1n'(r, h)$).

Так как $[\bar{Q}n']_r^1$ — решение уравнения (7; $\tilde{F}_a = \Theta$), то существуют числа $C^1(r)$, $C^2(r) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям

$$\bar{Q}n'(r, z) = e^{-\delta_{a,1}(r)z} C^1(r) + e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)} C^2(r), \quad z \in [0, h].$$

Так как $\bar{Q}n'(r, 0) = 0$, $\bar{Q}n'(r, h) = -\bar{P}_1n'(r, h)$, то

$$C^1(r) + e^{-\delta_{a,2}(r)h} C^2(r) = 0, \quad e^{-\delta_{a,1}(r)h} C^1(r) + C^2(r) = \beta_*(r).$$

Тогда

$$C^1(r) = -\frac{\beta_*(r)}{1 - e^{-2\mu_1(r)h}} e^{-\delta_{a,2}(r)h}, \quad C^2(r) = \frac{\beta_*(r)}{1 - e^{-2\mu_1(r)h}}.$$

Следовательно,

$$\bar{Q}n'(r, z) = \frac{\beta_*(r)}{1 - e^{-2\mu_1(r)h}} \left(-e^{-\delta_{a,1}(r)z - \delta_{a,2}(r)h} + e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)} \right);$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{Q}n'(r, z) = \frac{\beta_*(r)}{1 - e^{-2\mu_1(r)h}} \left(\delta_{a,1}(r) e^{-\delta_{a,1}(r)z - \delta_{a,2}(r)h} + \delta_{a,2}(r) e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)} \right).$$

Тогда

$$|\bar{Q}n'(r, z)| = \left| \frac{\beta_*(r)}{1 - e^{-2\mu_1(r)h}} \left(-e^{-\delta_{a,1}(r)z - \delta_{a,2}(r)h} + e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)} \right) \right| =$$

$$= \left| \beta_*(r) e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)} \frac{1 - e^{-2\mu_1(r)z}}{1 - e^{-2\mu_1(r)h}} \right| \leq \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot 2F_{0,2}h;$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \bar{Q}n'(r, z) \right| = \left| \frac{\beta_*(r)}{1 - e^{-2\mu_1(r)h}} (\delta_{a,1}(r) e^{-\delta_{a,1}(r)z - \delta_{a,2}(r)h} + \delta_{a,2}(r) e^{\delta_{a,2}(r)(z-h)}) \right| \leq$$

$$\leq \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot 2F_{0,2}h \cdot \frac{2\mu_1(r)}{1 - e^{-2\mu_1(r)h}} = \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot 2F_{0,2} \cdot \frac{2\mu_1(r)h}{1 - e^{-2\mu_1(r)h}} \leq$$

$$\leq \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot 2F_{0,2} \cdot (1 + 2\mu_1(r)h) = \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot 2F_{0,2} +$$

$$+ g_0(r) e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot \frac{2F_{0,2} \cdot 2\mu_1(r)h}{2D_a\mu_1(r)} = \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot 2F_{0,2} + g_0(r) e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot \frac{2F_{0,2}h}{D_a}.$$

Здесь использовано неравенство

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} < 1 + x, \quad x \in (0, +\infty),$$

которое нетрудно доказать. Итак,

$$\begin{aligned} |Qn'(r, z)| &= |\overline{A}n'(r, z) + \overline{\overline{Q}}n'(r, z)| \leq \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} \cdot 4F_{0,1}h + \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot 2F_{0,2}h; \\ \left| \frac{\partial}{\partial z} Qn'(r, z) \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial z} \overline{A}n'(r, z) + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\overline{Q}}n'(r, z) \right| \leq \\ &\leq g_0(r) \frac{4F_{0,1}h}{D_a} + \frac{g_0(r)}{\mu_2(r)} e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot 2F_{0,2} + g_0(r) e^{-\delta_{a,1}(r)h} \cdot \frac{2F_{0,2}h}{D_a}. \quad \square \end{aligned}$$

Заключение В статье рассмотрена математическая модель, описывающая загрязнение рабочего помещения на предприятии атомной промышленности продуктами гидролиза гексафторида урана. Поставлены краевые задачи для концентраций молекул газообразных веществ и для удельной (по радиусам аэрозольных частиц) концентрации молекул аэрозольного вещества. Проведено исследование упомянутых краевых задач в рамках теории возмущений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко С. П., Бадьин А. В. Ингаляционное и перкутанное поступление в организм человека токсичных веществ в условиях повседневной производственной деятельности на предприятиях атомной промышленности // Мат. модел. — 2006. — 18, № 3. — С. 13–22.
2. Бабенко С. П., Бадьин А. В. Верификация математической модели, описывающей воздействие на организм человека гексафторида урана на предприятии атомной промышленности // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2014. — № 2. — С. 22–30.
3. Бабенко С. П., Бадьин А. В. О расчете детерминированного эффекта протеинурии у сотрудников обогатительных заводов атомной промышленности // Гигиена и санитария. — 2018. — 97, № 4. — С. 322–328.
4. Бабенко С. П., Бадьин А. В., Бадьин В. И. Оценка загрязненности токсичными веществами рабочих помещений на производствах, использующих гексафторид урана // Изв. Акад. пром. экологии. — 2004. — № 1. — С. 79–88.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
6. Винберг Э. Б. Курс алгебры. — М.: МЦНМО, 2011.
7. Надеждинский А. И., Набиев Ш. Ш., Григорьев Г. Ю., Вязов И. Е., Малюгин С. Л., Пономарев Ю. Н., Понуровский Я. Я., Ставровский Д. Б., Болясов Д. А. Экспресс-методы измерения степени обогащения гексафторида урана и следовых количеств UF_6 и HF в атмосфере на основе диодных лазеров ближнего и среднего ИК-диапазона // Оптика атмосф. океана. — 2005. — 18, № 9. — С. 785–794.
8. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
9. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Изд-во МГУ, 1984.

Бабенко Светлана Петровна

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)

E-mail: babenkosvetlana@mail.ru

Бадьин Андрей Валентинович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: badyin@phys.msu.ru