Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова, О матрицах с суммируемыми диагоналями, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 194, 23–37

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-194-23-37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 02:54:34

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 194 (2021). С. 23–37
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-194-23-37

УДК 517.927

О МАТРИЦАХ С СУММИРУЕМЫМИ ДИАГОНАЛЯМИ

© 2021 г. А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО, Н. Б. УСКОВА

Аннотация. В работе рассматриваются основные понятия и факты, связанные с бесконечными матрицами. Матричный (операторный) подход применен к доказательству теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье. Изучается модификация метода подобных операторов, связанная с уравнением Фридрихса. С помощью метода подобных операторов осуществляется приведение строго нижнетреугольной матрицы с суммируемыми диагоналями к диагональному (блочно-диагональному) виду, что позволяет найти ее спектр.

Ключевые слова: матрица с суммируемыми диагоналями, метод подобных операторов, спектр.

ON MATRICES WITH SUMMABLE DIAGONALS

© 2021 A. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO, N. B. USKOVA

ABSTRACT. In this paper, basic concepts and facts related to infinite matrices are considered. The matrix (operator) approach is applied to the proof of Wiener's theorem on absolutely convergent Fourier series. A modification of the method of similar operators related to the Friedrichs equation is studied. Using the method of similar operators, we reduce a strictly lower triangular matrix with summable diagonals to the diagonal (block diagonal) form; this allows one to find the spectrum.

Keywords and phrases: matrix with summable diagonals, method of similar operators, spectrum.

AMS Subject Classification: 47B38

1. Введение. Пусть $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Всюду далее через $\mathbb{J}$ и $\mathbb{J}'$ обозначено любое из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ или их конечные подмножества вида $\{m \in \mathbb{N}, m \leq N_0\}$, $\{m \in \mathbb{Z}_+, m \leq N_0\}$, $\{m \in \mathbb{Z}, |m| \leq N_0\}$, $\{m \in \mathbb{Z}, |m| \leq N_0, m \leq 0\}$, где $N_0 \in \mathbb{N}$.

Определение 1. Отображение $\mathcal{A}: \mathbb{J} \times \mathbb{J}' \rightarrow \mathbb{C}$ называется матрицей с комплексными элементами. Элементы матрицы будем обозначать через $\mathcal{A}(n, m)$, $n \in \mathbb{J}$, $m \in \mathbb{J}'$.

Отметим, что используются и другие определения матрицы (см. например, [8, 15]) (даже в случае бесконечных матриц). Но в некоторых прикладных вопросах, например, в теории игр, также удобно представление матрицы как отображения из декартова произведения некоторого подмножества индексов во множество рациональных чисел (см. [12]).

Определение 2. Если множества $\mathbb{J}$ и $\mathbb{J}'$ совпадают, то матрицу будем называть квадратной. Если же оба множества $\mathbb{J}$ и $\mathbb{J}'$ конечны, то матрицу будем называть конечной матрицей размерности $n \times m$, где n — количество элементов в $\mathbb{J}$ и m — количество элементов в $\mathbb{J}'$.

Далее нас будут интересовать бесконечные матрицы. Множество матриц образует линейное пространство, обозначаемое далее символом $\text{Matr}(\mathbb{J} \times \mathbb{J}', \mathbb{C})$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732а).

В работе рассматриваются вопросы диагонализации (блочной диагонализации) специальных классов бесконечных матриц, а именно, бесконечных матриц с суммируемыми диагоналями (см. определение 15) с помощью преобразования подобия. Отметим работы [9, 20], в которых рассматривался вопрос диагонализации некоторых классов линейных операторов. Методом приведения матриц к диагональному (блочно-диагональному) виду служит метод подобных операторов (см. [1–4, 9]). Однако при рассмотрении строго нижнетреугольных матриц с суммируемыми диагоналями (см. определение 15) используется отличная от традиционной модификация метода подобных операторов, использующая уравнение Фридрихса (см. [2]). Это позволяет доказать теорему о подобии возмущенной матрицы и невозмущенной диагональной матрицы. Ранее уравнение Фридрихса применялось только в [17]. Поэтому сначала разрабатывается соответствующая модификация метода подобных операторов, выводятся условия ее применимости, доказываются условия разрешимости соответствующих операторных уравнений метода подобных операторов. Потом все это применяется к исследуемому оператору. Отметим работы [10, 11], в которых исследовались спектральные свойства разностных операторов с растущим потенциалом, заданных своими трехдиагональными матрицами. Там тоже не применялась модификация метода подобных операторов, связанная с уравнением Фридрихса.

Статья построена следующим образом. Вначале вводятся основные понятия и определения, используемые далее в работе. При этом также получается доказательство классической теоремы Винера с использованием рядов Фурье операторов с суммируемыми диагоналями. Затем излагается с доказательством используемая далее модификация метода подобных операторов, опирающаяся на уравнение Фридрихса. И, наконец, стандартная схема метода подобных операторов применяется для приведения к диагональному или блочно-диагональному виду изучаемой строго нижнетреугольной матрицы с суммируемыми диагоналями, что позволяет найти ее спектр.

2. Основные определения, леммы и теоремы.

2.1. Основные понятия. Введем специальные классы матриц, как и в случае матриц конечной размерности.

Определение 3. Матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J} \times \mathbb{J}', \mathbb{C})$ называется верхнетреугольной, если $\mathcal{A}(i, j) = 0$ для всех $i > j$, $i \in \mathbb{J}$, $j \in \mathbb{J}'$. Матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J} \times \mathbb{J}', \mathbb{C})$ называется нижнетреугольной, если $\mathcal{A}(i, j) = 0$ для всех $i < j$, $i \in \mathbb{J}$, $j \in \mathbb{J}'$. Матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J} \times \mathbb{J}', \mathbb{C})$ называется диагональной, если $\mathcal{A}(i, j) = 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{J}$ (т.е. $\mathbb{J} = \mathbb{J}'$).

Матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J} \times \mathbb{J}', \mathbb{C})$ называется строго верхнетреугольной, если $\mathcal{A}(i, j) = 0$ для всех $i \geq j$, $i \in \mathbb{J}$, $j \in \mathbb{J}'$. Матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J} \times \mathbb{J}', \mathbb{C})$ называется строго нижнетреугольной, если $\mathcal{A}(i, j) = 0$ для всех $i \leq j$, $i \in \mathbb{J}$, $j \in \mathbb{J}'$.

Определение 4. Матрица $\mathcal{A}^T \in \text{Matr}(\mathbb{J}' \times \mathbb{J}, \mathbb{C})$ называется транспонированной для матрицы $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J} \times \mathbb{J}', \mathbb{C})$, если $\mathcal{A}^T(i, j) = \mathcal{A}(j, i)$, $j \in \mathbb{J}$, $i \in \mathbb{J}'$.

Определение 5. Подматрицей $\mathcal{A}_0 \in \text{Matr}(\mathbb{J}_0 \times \mathbb{J}'_0, \mathbb{C})$ матрицы $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J} \times \mathbb{J}', \mathbb{C})$ называется сужение матрицы $\mathcal{A}$ на декартово произведение двух конечных множеств $\mathbb{J}_0$ и $\mathbb{J}'_0$.

Минором k -го порядка матрицы $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J} \times \mathbb{J}', \mathbb{C})$ называется квадратная подматрица $M_{\mathcal{A}}: \mathbb{J}_k \times \mathbb{J}_k \rightarrow \mathbb{C}$, где множество $\mathbb{J}_k$ состоит из k элементов.

Как и в случае конечных матриц, рангом матрицы называется наибольший порядок ее отличного от нуля минора. Заметим, что в рассматриваемом случае ранг матрицы может быть равен бесконечности.

Пример 1. Матрица $\mathcal{J} \in \text{Matr}(\mathbb{N}^2, \mathbb{C})$, где $\mathcal{J}(i, j) = 1$ для всех $i, j \in \mathbb{J}$ имеет ранг 1, т.е. $\text{Rg } \mathcal{J} = 1$.

Определение 6. Последовательность $c_k: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{C}$, элементы которой определяются формулой $c_k(n) = \mathcal{A}(n, k)$, $n \in \mathbb{J}$, $k \in \mathbb{J}'$ называется k -ым столбцом матрицы $\mathcal{A}$. Последовательность $b_k: \mathbb{J}' \rightarrow \mathbb{C}$, где $b_k(n) = \mathcal{A}(k, n)$, $n \in \mathbb{J}$, $k \in \mathbb{J}'$ называется k -й строкой матрицы $\mathcal{A}$. Последовательность $a_k: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, где $a_k(n) = \mathcal{A}(n, m)$, $n - m = k$, $n \in \mathbb{J}$, $m \in \mathbb{J}'$, $k \in \mathbb{Z}$ называется k -й диагональю матрицы $\mathcal{A}$. При $k = 0$ диагональ называется главной.

Введем в рассмотрение банахово пространство $l_p(\mathbb{J})$, $1 \leq p < \infty$ последовательностей комплексных чисел $x: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{C}$, суммируемых со степенью $1 \leq p < \infty$ с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{J}} |x(n)|^p \right)^{1/p}.$$

При $p = \infty$ норма задается формулой

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{J}} |x(n)|, \quad x: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \in l_\infty.$$

Отметим, что при $p = 2$ пространство $l_2(\mathbb{J})$ является гильбертовым, со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{J}} x(n) \overline{y(n)}, \quad x, y: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x, y \in l_2(\mathbb{J}).$$

В каждом из пространств $l_p(\mathbb{J})$, $1 \leq p < \infty$ последовательности e_k , $k \in \mathbb{J}$, такие, что $e_k(n) = 1$ при $n = k$ и $e_k(n) = 0$ при $n \neq k$, $k, n \in \mathbb{J}$, образуют безусловный базис. В пространстве $l_2(\mathbb{J})$ введенный базис является ортонормированным.

Определение 7. Последовательность $x \in l_p(\mathbb{J})$, $1 \leq p < \infty$, называется финитной, если множество индексов $n \in \mathbb{J}$, для которых $x(n) \neq 0$, конечно.

Через $l_{p,0}$ обозначим подпространство финитных последовательностей из $l_p(\mathbb{J})$. Финитные последовательности плотны в $l_p(\mathbb{J})$, при $p \neq \infty$, $\bar{l}_{p,0} = l_p(\mathbb{J})$.

Пусть $\mathcal{X}$ — абстрактное банахово пространство. Символом $\text{End } \mathcal{X}$ обозначена банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ с нормой

$$\|X\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|, \quad X \in \text{End } \mathcal{X}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Далее будем рассматривать бесконечные матрицы, для которых $\mathbb{J} = \mathbb{J}'$. Каждой матрице $A \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ сопоставим линейный оператор $A: l_{p,0} \rightarrow l_{p,0}$, $1 \leq p \leq \infty$, положив

$$(Ax)(k) = \sum_{j \in \mathbb{J}} A(k, j)x(j), \quad x \in l_{p,0}, \quad k \in \mathbb{J}.$$

Определение 8. Матрицу $A \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ назовем p -правильной для некоторого $1 \leq p \leq \infty$, если соответствующий оператор A допускает замкнутое расширение на пространство $l_p(\mathbb{J})$ до некоторого оператора. Обозначим это расширение тем же символом $A: D(A) \subset l_p(\mathbb{J}) \rightarrow l_p(\mathbb{J})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Если матрица является p -правильной для любого $1 \leq p \leq \infty$, то будем просто называть ее правильной.

Пример 2. Матрица $\mathcal{J}$ из примера 1 не является ∞ -правильной. Покажем это.

В пространстве l_∞ зададим семейство последовательностей $x_n: l_\infty \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 1$, формулой

$$x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, 0, 0, \dots \right).$$

Тогда

$$(Ax_n)(k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Но последовательность последовательностей $(x_n, n \geq 1)$ сходится к нулевой последовательности, а $A0 = 0$.

Определение 9. Правильная матрица $A \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ называется обратимой, если обратим соответствующий линейный оператор $A: D(A) \subset l_p(\mathbb{J}) \rightarrow l_p(\mathbb{J})$.

Определение 10. Матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ называется матрицей с равномерно ограниченными элементами, если

$$\sup_{i,j \in \mathbb{J}} |A(i,j)| = c_{\mathcal{A}} < \infty. \quad (1)$$

Определение 11. Матрицу $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ назовем ограниченной, если соответствующий оператор $A: l_p(\mathbb{J}) \rightarrow l_p(\mathbb{J})$ ограничен для некоторого $1 \leq p \leq \infty$.

Имеют место следующие очевидные утверждения.

Лемма 1. Каждая ограниченная матрица является p -правильной.

Лемма 2. Каждая диагональная матрица с $\inf_{i \in \mathbb{J}} |\mathcal{A}(i,i)| > 0$ является обратимой правильной матрицей.

Пусть $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ — диагональная матрица. Тогда соответствующий линейный оператор $A: D(A) \subset l_p(\mathbb{J}) \rightarrow l_p(\mathbb{J})$ действует по формуле $(Ax)(k) = \mathcal{A}(k,k)x(k)$, $k \in \mathbb{J}$, и имеет область определения

$$D(A) = \left\{ x \in l_p(\mathbb{J}), \sum_{k \in \mathbb{J}} |A(k,k)x(k)|^p < \infty \right\} \text{ для } 1 \leq p < \infty$$

или

$$D(A) = \left\{ x \in l_{\infty}, \sup_{k \in \mathbb{J}} |A(k,k)x(k)| < \infty \right\}.$$

Лемма 3. Область определения $D(A)$ оператора A плотна в $l_p(\mathbb{J})$, $1 \leq p < \infty$.

Утверждение леммы 3 следует из плотности финитных последовательностей в $l_p(\mathbb{J})$. Напомним некоторые определения из теории операторов (см. [2, 16]).

Определение 12. Графиком линейного оператора $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ называется подмножество векторов из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ вида (x, Ax) , $x \in D(A)$.

Определение 13. Оператор $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ называется замкнутым, если его график является замкнутым подмножеством в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

В качестве нормы в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ можно, например, взять норму графика $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Понятие замкнутости для оператора $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ означает, что из условий

$$x_n \in D(A), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y_0$$

следует, что $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$. Поэтому понятие правильной матрицы очень тесно связано с понятием замкнутости соответствующего оператора.

Теперь сделаем обратный шаг. Пусть $A: D(A) \subset l_p(\mathbb{J}) \rightarrow l_p(\mathbb{J})$, $1 \leq p < \infty$ — замкнутый оператор. Определим его матрицу следующим образом. Пусть его область определения $D(A)$ содержит базис e_k , $k \in \mathbb{J}$. Тогда элементы матрицы $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J} \times \mathbb{J}', \mathbb{C})$ оператора A определяются формулой

$$\mathcal{A}(i,j) = (Ae_j)(i), \quad i \in \mathbb{J}, \quad j \in \mathbb{J}'. \quad (2)$$

Замечание 1. Матрица замкнутого оператора всегда правильная.

Лемма 4. Матрица замкнутого оператора одинакова в любом из пространств $l_p(\mathbb{J})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Если матрица определяет ограниченный оператор, то можно считать, что норма матрицы равна норме соответствующего оператора $A: l_p(\mathbb{J}) \rightarrow l_p(\mathbb{J})$. Так, например, если $A: l_1(\mathbb{J}) \rightarrow l_1(\mathbb{J})$, то

$$\|A\|_{l_1} = \sup_{j \in \mathbb{J}} \sum_{i \in \mathbb{J}} |\mathcal{A}(i,j)|.$$

Определение 14. Матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ называется матрицей Гильберта — Шмидта, если $\sum_{i,j \in \mathbb{J}} |A(i,j)|^2 < \infty$.

Замечание 2. Не всякая матрица конечного ранга является матрицей Гильберта—Шмидта. Например, матрица из примера 1 не является таковой.

Пусть $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ — правильная матрица. Так как соответствующий оператор A в этом случае имеет плотную в $l_2(\mathbb{J})$ область определения $D(A)$, то по определению сопряженный к нему оператор $A^*: D(A^*) \subset l_2(\mathbb{J}) \rightarrow l_2(\mathbb{J})$ имеет матрицу $\mathcal{A}^T$.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$. Определим произведение $\mathcal{AB}$ двух замкнутых матриц следующим образом. Рассмотрим расширения $A: D(A) \subset l_p(\mathbb{J}) \rightarrow l_p(\mathbb{J})$, $B: D(B) \subset l_p(\mathbb{J}) \rightarrow l_p(\mathbb{J})$ операторов, определяемых матрицами $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ соответственно. Определим $\mathcal{AB}$ как матрицу оператора C произведения операторов A и B .

Следует отметить, что обычное произведение двух бесконечных матриц может не существовать.

Лемма 5. Если матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ является правильной, а матрица $\mathcal{B} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ ограниченная, то $\mathcal{AB}$ — правильная матрица. Если же $\mathcal{B}$ — обратимая матрица, то $\mathcal{BA}$ — правильная матрица.

Лемма 6. Матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ правильная, если все ее строки суммируемы и нет нулевых строк.

Доказательство. Построим по матрице $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ последовательность $f: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$ следующим образом. Положим $f(k) = \sum_{j \in \mathbb{J}} |A(k,j)|$. Введем в рассмотрение диагональную матрицу

$\mathcal{F} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ с элементами $\mathcal{F}(i,i) = f(i)$, $i \in \mathbb{J}$, $\mathcal{F}(i,j) = 0$, $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{J}$. Очевидно, что диагональная матрица $\mathcal{F}$ правильная и обратимая. Представим матрицу $\mathcal{A}$ в виде $\mathcal{A} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{F}\mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}$ — ограниченная матрица и $\mathcal{F}$ — правильная. Тогда по лемме 3 матрица $\mathcal{A}$ правильная. $\square$

Введем в рассмотрение последовательность $d_{\mathcal{A}}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$, положив $d_{\mathcal{A}}(k) = \sup_{i-j=k} |\mathcal{A}(i,j)|$, $i, j \in \mathbb{J}$, $k \in \mathbb{Z}$. Отметим, что последовательность $d_{\mathcal{A}}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ определена и для прямоугольных матриц, т.е. когда $\mathbb{J} \neq \mathbb{J}'$.

Определение 15. Матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ называется матрицей с суммируемыми диагоналями, если конечна величина $d(\mathcal{A}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{\mathcal{A}}(n)$.

Пусть оператор $A \in \text{End } \mathcal{X}$, и его матрица $\mathcal{A}$ является матрицей с суммируемыми диагоналями. Тогда оператор A принадлежит пространству $\text{End}_1 \mathcal{X} \subset \text{End } \mathcal{X}$ операторов, имеющих матрицы с суммируемыми диагоналями.

Лемма 7. Любая матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ с единственной ненулевой k -й диагональю ($k \in \mathbb{Z}$), элементы которой равномерно ограничены, определяет ограниченный оператор в любом из пространств $l_p(\mathbb{J})$, $1 \leq p \leq \infty$, с нормой, не превосходящей $d_{\mathcal{A}}(k)$.

Доказательство. Пусть матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ имеет ненулевую k -ю диагональ,

$$\mathcal{A}x(n) = \mathcal{A}(k+n, n)x(n), \quad n \in \mathbb{J}; \quad \|Ax\|_p = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}(k+n, n)x(n) \right\|_p \leq d_{\mathcal{A}}(k) \|x\|_p,$$

где $x \in l_p(\mathbb{J})$, $1 \leq p \leq \infty$; отсюда и следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 8. Матрица $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ с суммируемыми диагоналями в любом из пространств l_p , $1 \leq p \leq \infty$, является матрицей ограниченного оператора $A \in \text{End } l_p(\mathbb{J})$ с нормой, удовлетворяющей оценке $\|A\| \leq \|A\|_1 = d(\mathcal{A})$.

Доказательство. Матрицу $\mathcal{A}$ представим в виде $\mathcal{A} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_k$, где каждая из матриц $\mathcal{A}_k$ имеет только одну ненулевую k -ю диагональ, совпадающую с k -й диагональю матрицы $\mathcal{A}$, а все остальные диагонали нулевые. Тогда из равенств

$$\|Ax\|_p = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_k x \right\|_p \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{\mathcal{A}}(k) \|x\|_p = d(\mathcal{A}) \|x\|_p$$

вытекает утверждение леммы. $\square$

Лемма 9. *Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ матрицы $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ совпадает со спектром $\sigma(A)$ оператора $A: D(A) \subset l_p(\mathbb{J}) \rightarrow l_p(\mathbb{J})$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Приведем без доказательства используемый далее важный для нас результат (см. [3, 4]).

Теорема 1 (см. [4, следствие 3]). *Если оператор $A \in \text{End}_1 l_q(\mathbb{J})$ обратим при некотором $1 \leq q \leq \infty$, то он обратим во всех остальных пространствах $l_p(\mathbb{J})$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Из теоремы 1 и леммы 9 вытекает следующее утверждение.

Лемма 10. *Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ матрицы $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ не зависит от p , $1 \leq p \leq \infty$.*

2.2. Ряды Фурье. Пусть $\mathcal{X}$ — абстрактное банахово пространство. Введем в рассмотрение периодическую периода 2π группу $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, действующую по формуле $(S(t)x)(k) = x(k)e^{ikt}$, $k \in \mathbb{J}$. Каждому ограниченному оператору $A \in \text{End } \mathcal{X}$ поставим в соответствие функцию $\tilde{A}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$, имеющую вид

$$\Phi_A(t) = \tilde{A}(t) = S(t)AS(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть функция $\tilde{A}(t)$ имеет ряд Фурье вида

$$\tilde{A}(t)x \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k x e^{ikt}, \quad x \in \mathcal{X}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где коэффициенты Фурье имеют вид

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{A}(t)x e^{-ikt} dt. \quad (3)$$

Определение 16 (см. [3, 4]). Ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ называется рядом Фурье оператора $A \in \text{End } \mathcal{X}$, а операторы $A_k \in \text{End } \mathcal{X}$, $k \in \mathbb{Z}$ — коэффициентами Фурье оператора A .

Следующая лемма аналогична [4, лемма 1].

Лемма 11. *Каждый коэффициент Фурье A_k , $k \in \mathbb{Z}$ имеет матрицу $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{Z}$ с единственной ненулевой k -й диагональю, совпадающей с k -й диагональю матрицы $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{J}^2, \mathbb{C})$ оператора $A \in \text{End } \mathcal{X}$.*

Доказательство. Найдем элементы матрицы оператора A_k , $k \in \mathbb{Z}$. Согласно (2), (3)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k(l, j) &= (Ae_j)(l), \quad l, j \in \mathbb{J}, \quad \mathcal{A}_k(l, j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S(t)AS(-t)e_j)(l) e^{-ikt} dt, \\ (S(-t)e_j) &= \sum_{m \in \mathbb{J}} e_j(m) e^{-imt} = e_j e^{-ijt}, \quad Ae_j e^{ijt} = \sum_{m \in \mathbb{J}} \mathcal{A}(m, j) e_m e^{-ijt}, \\ (S(t)Ae_j e^{ijt})(l) &= \mathcal{A}(l, j) e^{ilt} e^{-ijt}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{A}_k(l, j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{A} e^{ilt} e^{-ijt} e^{-ikt} dt = \begin{cases} \mathcal{A}(l, j) & \text{при } l - j = k; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad \square$$

Важно отметить, что принадлежность матрицы оператора алгебре $\text{End}_1 \mathcal{X}$ означает суммируемость коэффициентов Фурье этого оператора. Важным является тот факт, что $\text{End}_1 \mathcal{X}$ является банаховой алгеброй. Действительно (см. [4]), пусть $A \in \text{End}_1 \mathcal{X}$, $B \in \text{End}_1 \mathcal{X}$,

$$\Phi_A(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k e^{ikt}, \quad \Phi_B(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k e^{ikt},$$

$C = BA$, то $C \in \text{End} \mathcal{X}$. Тогда $\Phi_C = \Phi_B \Phi_A$. По теореме об умножении рядов Фурье векторных функций получаем, что функция Φ_C имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье,

$$\Phi_C(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{где} \quad C_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} B_{n-j} A_j.$$

Поэтому оператор $C \in \text{End} \mathcal{X}$ имеет ряд Фурье вида

$$C = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n, \quad \|C_n\| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|B_{n-j}\| \|A_j\|;$$

следовательно, $C \in \text{End}_1 \mathcal{X}$.

2.3. Метод подобных операторов. Начнем с определения подобных операторов.

Определение 17 (см. [2]). Два линейных оператора

$$A_1: D(A_1) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad A_2: D(A_2) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

называются подобными, если существует такой непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End} \mathcal{X}$, что $U(D(A_2)) = D(A_1)$ и

$$A_1 Ux = U A_2 x, \quad x \in D(A_2). \quad (4)$$

Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в оператор A_2 .

Обычно преобразование подобия оператор A_1 приводят к оператору A_2 , более просто устроенному. Например, оператор A_2 имеет матрицу диагонального или блочно-диагонального вида относительно некоторого базиса. У оператора A_2 в этом случае легко считаются спектральные характеристики. А так как спектры подобных операторов совпадают, то известен становится и спектр оператора A_1 .

Соотношение (4) иногда называют сплетающим свойством (см. [13]), оператор преобразования U называется также transmutation и говорят, что он сплетает операторы A_1 и A_2 (interwining operator). Историю и современное состояние теории операторов преобразования можно найти в [13]. Отметим, что операторы преобразования — более широкое понятие, чем то, которое дано в определении 17, так как обратный к оператору в общем случае не обязан существовать и быть ограниченным.

Далее мы рассматриваем подобные операторы в смысле определения 17.

Пусть в абстрактном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ рассматривается линейный замкнутый оператор $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, имеющий спектр $\sigma(A)$ и непустое резольвентное множество $\rho(A)$. Оператор A будем называть невозмущенным оператором. Возмутим оператор A оператором B из $\text{End} \mathcal{X}$ и будем рассматривать возмущенный оператор $A + B: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$.

Перейдем к формулировке основных определений метода подобных операторов, и в первую очередь определим пространство допустимых возмущений, а также операторы, осуществляющие преобразование подобия. Все это образует для невозмущенного оператора A так называемую допустимую тройку.

Определение 18 (см. [2]). Пусть $\mathfrak{A} \subset \text{End} \mathcal{X}$ — банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_*$ и $J, \Gamma \in \text{End} \mathfrak{A}$ — трансформаторы (т.е. линейные операторы, действующие в пространстве операторов). Тройку $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ назовем допустимой тройкой для невозмущенного оператора $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, а $\mathfrak{A}$ — пространством допустимых возмущений, если выполнены следующие условия:

- (i) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор, $J^2 = J$;

(ii) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и имеет место равенство

$$A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX,$$

для любого $X \in \mathfrak{A}$, выполняемое на векторах из $D(A)$, причем $Y = \Gamma X$ — единственное решение уравнения $AY - YA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;

(iii) $X(\Gamma Y), (\Gamma X)Y \in \mathfrak{A}$ для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$, и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| \leq \gamma$ и $\max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leq \gamma\|X\|_*\|Y\|_*$ для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$;

(iv) $J((\Gamma X)JY) = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{A}$;

(v) для любого $X \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$, где I — тождественный оператор.

Отметим, что для одного невозмущенного оператора A можно построить несколько разных допустимых троек.

Зафиксируем некоторую допустимую тройку $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ для невозмущенного оператора A и выведем основное уравнение метода.

Будем искать оператор преобразования оператора $A - B$ в более просто устроенный оператор $A - JX$ в виде $U = I + \Gamma X$, тогда с учетом пункта ii определения 18 имеем

$$\begin{aligned} (A - B)(I + \Gamma X) - (I + \Gamma X)(A - JX) = \\ = A - B + A\Gamma X - B\Gamma X - A - \Gamma XA + JX + \Gamma XJX = X - B - B\Gamma X + \Gamma XJX. \end{aligned}$$

Из этого следует, что операторы $A - B$ и $A - JX$ подобны и $U = I + \Gamma X$ — оператор преобразования, если $X \in \mathfrak{A}$ есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - \Gamma XJX + B. \quad (5)$$

3. Основные результаты.

3.1. Матричный и операторный подход в доказательстве теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье. Пусть $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ — гильбертово пространство измеримых по Лебегу на $[0, 2\pi]$ со значениями в $\mathbb{C}$ суммируемых с квадратом модуля (классов эквивалентности) функций. Скалярное произведение и порожденная им норма в $\mathcal{L}^2$ задаются соответственно формулами

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)}dt, \quad \|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt, \quad x, y \in \mathcal{L}^2.$$

Введенное пространство $\mathcal{L}^2$ изометрически изоморфно гильбертову пространству $\mathcal{L}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ периодических периода 2π , определенных на всей оси $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{C}$ комплексных функций, суммируемых с квадратом модуля на $[0, 2\pi]$.

В силу равенства Парсеваля пространство $\mathcal{L}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ изометрически изоморфно также пространству $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$. Изоморфизм задается формулой

$$x \mapsto \{\hat{x}(n), n \in \mathbb{Z}\}, \quad \hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)e^{-int}dt; \quad (6)$$

здесь $\hat{x}(n)$ — коэффициенты Фурье функции $x \in \mathcal{L}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$x(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n)e^{int}.$$

Отметим, что последовательность функций $\{e^{int}, n \in \mathbb{Z}\}$, $t \in [0, 2\pi]$ является ортонормированным базисом в пространстве $\mathcal{L}^2$, а изоморфизм (6), опять же в силу равенства Парсеваля, переводит этот базис в стандартный базис e_j , $j \in \mathbb{Z}$, $e_j(i) = \delta_{ij}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, δ_{ij} — символ Кронекера, пространства l_2 .

Символом $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ обозначим банахово пространство непрерывных на $\mathbb{R}$, 2π -периодических функций со значениями в $\mathbb{C}$ и нормой

$$\|x\|_{\infty} = \max_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|, x \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Итак, задача состоит в следующем. Пусть функция f из $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ имеет ряд Фурье $f(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}$, где $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$, ее коэффициенты Фурье, причем $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$. Пусть также f не обращается в нуль на отрезке $[0, 2\pi]$. Обозначим $f^{-1} = 1/f$, необходимо оценить коэффициенты Фурье функции $f^{-1} \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Теорема 2 (теорема Винера; см. [14]). *Пусть ряд Фурье функции $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ абсолютно сходится и $f(x) \neq 0$ для всех $x \in [0, 2\pi]$. Тогда ряд Фурье для функции f^{-1} также абсолютно сходится.*

Доказательство. В гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ рассмотрим оператор A_f умножения на функцию $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, действующий по формуле $(A_f x)(t) = f(t)x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Непосредственный подсчет показывает, что оператор A имеет матрицу Лорана вида

$$\begin{pmatrix} c_0(f) & c_{-1}(f) & c_{-2}(f) & \dots \\ c_1(f) & c_0(f) & c_{-1}(f) & \dots \\ 0 & c_1(f) & c_0(f) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

где $c_i(f)$, $i \in \mathbb{Z}$ — коэффициенты Фурье функции $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Иными словами, у матрицы A оператора A элементы, стоящие на k -й диагонали, одинаковы и равны k -му коэффициенту Фурье функции f . Так как ряд Фурье функции f абсолютно сходится, то матрица A является матрицей с суммируемыми диагоналями.

По условию функция f не обращается в нуль, поэтому оператор A_f обратим, обратным является оператор $A_{f^{-1}}$. Оператор $A_{f^{-1}}$ также имеет матрицу Лорана, у этой матрицы элементы, стоящие на k -й диагонали, одинаковы и также равны k -му коэффициенту Фурье функции f^{-1} . Тогда в силу [4, теорема 4] матрица оператора $A_{f^{-1}}$ является матрицей с суммируемыми диагоналями, а, следовательно, функция f^{-1} имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье. $\square$

3.2. Уравнение Фридрихса. В этом разделе нас будет интересовать случай, когда $JX = 0$ для любого $X \in \mathfrak{A}$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$X = B\Gamma X + B. \quad (7)$$

Уравнение (7) называется уравнением Фридрихса (см. [3]). Заметим, что ранее в методе подобных операторов, который широко используется профессором А. Г. Баскаковым и его учениками для исследования различных классов дифференциальных и разностных операторов (см. [5, 6, 10, 11, 18]) не применялась модификация метода подобных операторов, связанная с уравнением Фридрихса (7).

Сформулируем и докажем соответствующую теорему.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие*

$$2\gamma\|B\| < 1. \quad (8)$$

Тогда операторы $A - B$ и A подобны, имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)A, \quad (9)$$

где $X_* \in \mathfrak{A}$ — решение уравнения (7). Решение X_* можно найти методом простых итераций, положив $X_1 = B, \dots$. Отображение $\Phi(X) = B\Gamma X + B$, $\Phi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ является сжимающим в шаре

$$\mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{A}: \|X - B\|_* \leq \|B\|_*\}. \quad (10)$$

Доказательство. Вначале заметим, что $\|X\| = \|X - B + B\| \leq 2\|B\|$ для любого $X \in \mathfrak{A}$. Далее используется принцип сжимающих отображений и теорема Банаха о неподвижной точке для доказательства существования решения уравнения (7). Таким образом, надо показать, что $\Phi(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}$ и $\|\Phi(X) - \Phi(Y)\|_* \leq q\|X - Y\|_*$, где $q < 1$ для всех $X, Y \in \mathfrak{B}$. Действительно, с учетом неравенства (8):

$$\begin{aligned} \|\Phi(X) - B\|_* &\leq \|B\Gamma X\|_* \leq 2\|B\|_*^2\gamma \leq \|B\|_*, \\ \|\Phi(X) - \Phi(Y)\|_* &= \|B\Gamma(X - Y)\|_* \leq \|B\|_*\gamma\|X - Y\|_* \leq \frac{1}{2}\|X - Y\|_*. \end{aligned}$$

Итак, решение уравнения (7) при выполнении условия (8) существует в шаре (10).

Для доказательства (9) необходимо показать, что оператор $I + \Gamma X_*$ непрерывно обратим. Так как $\|\Gamma X_*\| \leq \gamma\|X_*\|_* \leq 2\gamma\|B\|_*$, то при выполнении условия (8) $\|\Gamma X_*\| < 1$ и

$$(I + \Gamma X_*)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\Gamma X_*)^n.$$

Для полноты доказательства теоремы 3 осталось установить равенство $(I + \Gamma X_*)(D(A)) = D(A)$. Из свойства ii определения 18 вытекает включение $(I + \Gamma X_*)(D(A)) \subseteq D(A)$. Осталось показать, что $(I + \Gamma X_*)^{-1}(D(A)) \subseteq D(A)$. Опять же используя свойство ii имеем для $\lambda \in \rho(A)$

$$\begin{aligned} \Gamma X_*(A - \lambda I)^{-1} &= (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)\Gamma X_*(A - \lambda I)^{-1} = \\ &= (A - \lambda I)^{-1}(X_* + \Gamma X_*A - \lambda \Gamma X_*)(A - \lambda I)^{-1} = \\ &= (A - \lambda I)^{-1}(X_*(A - \lambda I)^{-1} + \Gamma X_*). \end{aligned}$$

Так как $\|\Gamma X_*\| < 1$, то, используя свойство iv, можно выбрать такое $\lambda \in \rho(A)$, что

$$\|X_*(A - \lambda I)^{-1} + \Gamma X_*\| < 1,$$

тогда

$$(I + \Gamma X_*)^{-1}(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}(I + X_*(A - \lambda I)^{-1} + \Gamma X_*)^{-1},$$

это и означает выполнение включения $(I + \Gamma X_*)^{-1}(D(A)) \subseteq D(A)$. Теорема 3 доказана. $\square$

Далее для полноты изложения приведем также стандартный вариант метода подобных операторов (см. [10]).

Вернемся к уравнению (7), заметим, что

$$JX = J(B\Gamma X) + JB, \quad (11)$$

т. к. $J(\Gamma X JX) = 0$, $X, Y \in \mathfrak{A}$. Подставим (11) в (7), получим следующее нелинейное уравнение для нахождения неизвестного оператора $X_* \in \mathfrak{A}$:

$$X = B\Gamma X - \Gamma X JB - \Gamma X J(B\Gamma X) + B = \Phi_1(X). \quad (12)$$

Теорема 4 (см. [10]). Пусть $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка и B — некоторый оператор из пространства возмущений $\mathfrak{A}$. Тогда, если

$$4\gamma\|J\|\|B\|_* < 1, \quad (13)$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathfrak{A}$ — решение уравнения (12), и оно может быть найдено методом простых итераций, если положить $X_0 = 0, X_1 = B, \dots$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in \text{End } \mathcal{X}$. Отображение $\Phi_1: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ является сжимающим в шаре $\mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{A}: \|X - B\|_* \leq 3\|B\|_*\}$.

3.3. Диагонализация. В этом разделе рассматривается приведение к диагональному виду возмущенных диагональных матриц, где в качестве возмущения берутся строго нижнетреугольные матрицы с суммируемыми диагоналями.

Пусть теперь $\mathbb{J} = \mathbb{N}$, и все рассматриваемые далее в статье нижнетреугольные матрицы принадлежат пространству $\text{Matr}(\mathbb{N}^2, \mathbb{C})$.

Лемма 12. Каждая нижнетреугольная матрица $A \in \text{Matr}(\mathbb{N}^2, \mathbb{C})$ с равномерно ограниченными элементами правильная, если у нее нет нулевых строк.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — нижнетреугольная матрица, тогда

$$(Ax)(n) = \sum_{i=1}^n A(i, j)x(j), \quad x \in l_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, ее строки суммируемы, и по лемме 6 она правильная. $\square$

Будем рассматривать операторы, построенные по этим матрицам.

Определение 19. Оператор, у которого матрица нижнетреугольная, называется каузальным или причинным.

Другое определение каузальных операторов можно посмотреть в [7]. Применение каузальных операторов рассматривалось в [19]. Отметим также работу [17], в которой к исследованию операторов с нижнетреугольными матрицами применялся метод Фридрихса. Подчеркнем, что в этой работе на возмущение не ставилось условие суммируемости диагоналей и только доказано подобие возмущенного оператора $A - B$ невозмущенному оператору A при выполнении определенного набора условий.

Отметим еще интересный факт, касающийся строго нижнетреугольных матриц. При умножении двух строго нижнетреугольных матриц с ненулевыми первыми диагоналями получается матрица строго нижнетреугольная с нулевой первой диагональю и ненулевыми остальными диагоналями. Таким образом, с каждой следующей операцией умножения в матрице-результате ненулевые диагонали будут спускаться все ниже.

Так как спектр оператора из $\text{End}_1 l_p(\mathbb{N})$ не зависит от p (см. лемму 10), то удобнее всего все выкладки проводить для случая $p = 2$ (таким образом, в качестве $\mathcal{X}$ выступает гильбертово пространство $H = l_2(\mathbb{N})$).

Итак, пусть $A: D(A) \subset l_2(\mathbb{N}) \rightarrow l_2(\mathbb{N})$ — линейный замкнутый оператор с дискретным спектром, действующий по формуле

$$(Ax)(n) = \mathcal{A}(n, n)x(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_2(\mathbb{N}),$$

где $\mathcal{A}(n, n)$, $n \in \mathbb{N}$ — элементы диагональной (невозмущенной) матрицы $\mathcal{A} \in \text{Matr}(\mathbb{N}^2, \mathbb{C})$ и $\mathcal{A}(i, i) \neq \mathcal{A}(j, j)$ при $i \neq j$. Область определения $D(A)$ задается условием

$$D(A) = \left\{ x \in l_2(\mathbb{N}), \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{A}(n, n)x(n)|^2 < \infty \right\}.$$

Определение 20 (см. [16]). Оператор $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, называется нормальным, если $D(A^*) = D(A)$ и $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для всех $x \in D(A)$.

В рассматриваемом случае оператор A является нормальным.

Возмущением является строго нижнетреугольная матрица $\mathcal{B}$ с равномерно ограниченными элементами $\mathcal{B}(i, j)$, $i, j \in \mathbb{N}$, диагонали которой являются суммируемыми, т.е. $B \in \text{End}_1 l_2(\mathbb{N})$.

Тогда спектр оператора A состоит из простых собственных значений

$$\sigma(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\mathcal{A}(n, n)\}, \quad \sigma_n = \{\lambda_n\} = \{\mathcal{A}(n, n)\}.$$

Обозначим через d величину

$$d = \text{dist}(\sigma(A) \setminus \sigma_n, \sigma_n) > 0, \quad (14)$$

очевидно, что $d > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $\mathfrak{A} = \text{End}_1^0 l_2(\mathbb{N})$, где

$$\text{End}_1^0 l_2(\mathbb{N}) = \{X \in \text{End}_1 l_2(\mathbb{N}) : \mathfrak{X}(i, j) = 0, \quad i \leq j\}.$$

Другими словами, в качестве пространства допустимых возмущений выступает пространство операторов, имеющих строго нижнетреугольную матрицу с суммируемыми диагоналями. Норма в $\text{End}_1^0 l_2(\mathbb{N})$ задается формулой

$$\|B\|_* = \sum_{l \geq 1} d_B(l).$$

Отметим, что последовательность $d_B: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ненулевые элементы только при $l \in \mathbb{N}$.

Построим трансформатор $\Gamma \in \text{End End}_1^0 l_2(\mathbb{N})$. Для любого оператора $X \in \text{End}_1^0 l_2(\mathbb{N})$, имеющего матрицу $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}(i, j))$, $i, j \in \mathbb{N}$, определим элементы матрицы оператора ΓX формулой

$$\Gamma X(i, j) = \frac{\mathfrak{X}(i, j)}{\mathcal{A}(i, i) - \mathcal{A}(j, j)}, \quad i > j, \quad i, j \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Элементы $\Gamma X(i, j)$ определены корректно ввиду формулы (14). Пусть также $JX = 0$ для всех $X \in \text{End}_1^0 l_2(\mathbb{N})$. Оператор ΓX также имеет строго нижнетреугольную матрицу с суммируемыми диагоналями, и имеет место оценка $\|\Gamma X\|_* = d^{-1}\|X\|_*$.

Теорема 5. *Тройка $(\text{End}_1^0 l_2(\mathbb{N}), J, \Gamma)$ является допустимой тройкой для оператора A , имеющего диагональную матрицу, для которой выполняется условие (14).*

Доказательство. Для доказательства теоремы осталось доказать выполнение условия v из определения допустимой тройки и включение $(\Gamma X)(D(A)) \subset D(A)$. Условие v выполняется ввиду того, что величина $\|X\|$ конечна, а величину $\|(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}\|$ можно сделать малой за счет подходящего выбора числа $\lambda_\epsilon \in \rho(A)$. Например, если A — самосопряженный оператор, то в качестве λ_ϵ можно брать число $\lambda_\epsilon = iN$, где $N \in \mathbb{N}$ — достаточно большое.

Представим оператор $\Gamma X(A - \lambda I)^{-1}$ в виде

$$\begin{aligned} \Gamma X(A - \lambda I)^{-1} &= (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)\Gamma X(A - \lambda I)^{-1} = \\ &= (A - \lambda I)^{-1}(A\Gamma X - \lambda\Gamma X)(A - \lambda I)^{-1} = \\ &= (A - \lambda I)^{-1}(X - JX + \Gamma X A - \lambda\Gamma X)(A - \lambda I)^{-1} = \\ &= (A - \lambda I)^{-1}((X - JX)(A - \lambda I)^{-1} + \Gamma X). \end{aligned}$$

Отсюда немедленно следует, что $y = (A - \lambda I)^{-1}x \in D(A)$ и $\Gamma X(A - \lambda I)^{-1}x \in D(A)$ для $x \in l_2(\mathbb{N})$. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 3 и теоремы 5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие*

$$\|B\|_* < 2d. \quad (16)$$

Тогда оператор $A - B$ подобен невозмущенному оператору A .

Следствие 1. *При выполнении условия (16) собственные значения операторов $A - B$ и A , определяемых матрицами $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$, совпадают.*

Следствие 2. *Собственные векторы $\tilde{e}_k$, $k \in \mathbb{N}$ оператора $A - B$ задаются формулой*

$$\tilde{e}_k = e_k + \Gamma X_* e_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

где $(e_k, k \in \mathbb{N})$ — векторы стандартного ортонормированного базиса в $l_2(\mathbb{N})$.

Из теоремы 6 и леммы 10 получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Спектр матрицы $\mathcal{A}$ при выполнении условия (16) в любом из пространств $l_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$, состоит из простых изолированных собственных значений $\mathcal{A}(n, n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Отметим, что условие строгой нижнетреугольности матрицы $\mathcal{B}$ не является ограничительным. Пусть $\mathcal{B}$ — нижнетреугольная матрица с ненулевой главной диагональю. Тогда отнесем главную диагональ к невозмущенному оператору A , т.е. оператор A теперь действует по формуле

$$(Ax)(n) = \mathcal{A}(n, n)x(n) - \mathcal{B}(n, n)x(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $\mathcal{B} \in \text{End}_1 l_2(\mathbb{N})$ и элементы матрицы $\mathcal{B}$ равномерно ограничены, то такая замена невозмущенного оператора корректна. В этом случае надо требовать выполнения условия (14) для нового, полученного невозмущенного оператора.

3.4. *Блочная диагонализация.* В этом разделе рассматривается приведение оператора $A - B$ к блочно-диагональному виду. Пусть нормальный оператор A имеет простые изолированные собственные значения $\lambda_n = \mathcal{A}(n, n)$, $n \in \mathbb{N}$, но при этом выполняется более сильное условие

$$\text{dist}(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \setminus \{\lambda_n\}) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (18)$$

вместо условия (14). Условие (18) означает, что собственные значения оператора A (диагональные элементы матрицы $\mathcal{A}$) «разбегаются». В этом случае для построения преобразования подобия оператора $A - B$ в оператор, имеющий матрицу блочно-диагонального вида, будем строить другую допустимую тройку с ненулевым трансформатором $J \in \text{End}(\text{End}_1^0 l_2(\mathbb{N}))$ и потом использовать теорему 3. Уравнение Фридрихса в этом случае применяться не будет. Важно отметить, что оператор, к которому будем преобразованием подобия приводить оператор A , будет иметь матрицу, отличающуюся от матрицы $\mathcal{A}$ оператора A на оператор конечного ранга. Условия на матрицу $\mathcal{B}$ оператора-возмущения B остаются неизменными, а именно, $\mathcal{B} \in \text{End}_1^0 l_2(\mathbb{N})$.

Перейдем к построению допустимой тройки. Как и в прошлый раз, $\mathfrak{A} = \text{End}_1^0 l_2(\mathbb{N})$. Пусть $P_n = P(\{\mathcal{A}(n, n)\}, A)$, $n \in \mathbb{N}$ — спектральный проектор оператора A , построенный по спектральному множеству $\sigma_n = \{\mathcal{A}(n, n)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Введем обозначение

$$P_{(n)} = \sum_{i=1}^n P_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим семейство трансформаторов $J_n, \Gamma_n \in \text{End}_1^0(l_2(\mathbb{N}))$, $n \geq 1$, действующих на оператор $X \in \text{End}_1^0(l_2(\mathbb{N}))$ по формулам

$$J_n X = P_{(n)} X P_{(n)} + \sum_{i>n} P_i X P_i,$$

$$\Gamma_n X = \Gamma X - \Gamma(P_{(n)} X P_{(n)}) = \Gamma(X - P_{(n)} X P_{(n)}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad X \in \text{End}_1^0(l_2(\mathbb{N})).$$

В предыдущем разделе показано, что $\Gamma X \in \text{End}_1^0(l_2(\mathbb{N}))$ и $\|\Gamma\| = d^{-1}$, где d определяется формулой (15).

Трансформаторы JX и ΓX отличаются от трансформаторов $J_n X$ и $\Gamma_n X$ на оператор конечного ранга. Поэтому все свойства трансформатора $\Gamma_n X$, отмеченные ранее, остаются в силе. Трансформаторы семейства $J_n X$ имеют ненулевые элементы только в правом верхнем квадрате порядка n , а все остальные их матричные элементы равны нулю. Элементы матрицы трансформаторов $J_n X$ и $\Gamma_n X$ определяются формулами

$$(J_n X)(i, j) = \begin{cases} \mathfrak{X}(i, j), & \max\{i, j\} \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (19)$$

$$(\Gamma_n X)(i, j) = \begin{cases} \frac{\mathfrak{X}(i, j)}{\mathcal{A}(i, i) - \mathcal{A}(j, j)}, & \max\{i, j\} > n, \quad i \neq j, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (20)$$

Отсюда получаем оценку

$$\|\Gamma_n X\|_* \leq |\mathcal{A}(n, n) - \mathcal{A}(n+1, n+1)|^{-1} \|X\|_*.$$

Таким образом, величина $\gamma = \gamma_n$ из определения 18 равна $\gamma_n = |\mathcal{A}(n, n) - \mathcal{A}(n+1, n+1)|^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, и ее можно сделать малой при подходящем выборе числа $n \in \mathbb{N}$ за счет выполнения условия (18).

Следующее утверждение аналогично теореме 5.

Теорема 8. *Тройка $(\text{End}_1^0(l_2(\mathbb{N})), J_n, \Gamma_n)$ является допустимой тройкой для оператора A при любом $n \in \mathbb{N}$.*

Так как $J_n X \neq 0$ для $X \in \text{End}_1^0(l_2(\mathbb{N}))$ и, в частности, $J_n B \neq 0$, то мы далее воспользуемся теоремой 3.

Из теорем 3 и 7 получаем следующий факт.

Теорема 9. Существует такое натуральное число $n \in \mathbb{N}$, что оператор $A - B$ подобен блочно-диагональному оператору $A - J_n X_*$, где $X_* \in \text{End}_1^0(l_2(\mathbb{N}))$ есть решение нелинейного операторного уравнения (12) с трансформаторами J_n и Γ_n такими, что матрицы операторов $J_n X$ и $\Gamma_n X$ определяются формулами (19) и (20). Имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_n X_*) = (I + \Gamma_n X_*)(A - J_n X_*).$$

Оператор $X_* \in \text{End}_1^0(l_2(\mathbb{N}))$ можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B$.

Отметим, что выполнение условия теоремы 3, гарантирующего разрешимость нелинейного операторного уравнения (13), очевидно за счет малости нормы оператора Γ_n — величины γ_n .

Теорема 10. Собственные значения $\tilde{\lambda}_k$, $k \in \mathbb{N}$, оператора $A - B$ совпадают с собственными значениями λ_k , $k \in \mathbb{N}$, оператора A . Соответствующие собственные векторы $\tilde{e}_k$, $k \in \mathbb{N}$, при $k > n$ определяются формулой (17). Имеет место оценка

$$\|\tilde{e}_k - e_k - \Gamma_n B e_k\| \leq O(\gamma_n), \quad k > n. \quad (21)$$

Для доказательства формулы (21) заметим, что из (17) следует равенство

$$\tilde{e}_k = e_k + \Gamma_n B e_k + \Gamma(X - B)e_k,$$

и последнее слагаемое имеет порядок $O(\gamma_n)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. мат. ж. — 1983. — 24, № 1. — С. 21–39.
2. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж, 1986.
3. Баскаков А. Г. Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 17–26.
4. Баскаков А. Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. ж. — 1997. — 38, № 1. — С. 14–28.
5. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Обобщенный метод Фурье для системы дифференциальных уравнений первого порядка и группы операторов // Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 2. — С. 276–280.
6. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Спектральный анализ дифференциальных операторов с инволюцией и группы операторов // Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 9. — С. 1287–1291.
7. Баскаков А. Г., Криштал И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — 69, № 3. — С. 3–54.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
9. Гаркавенко Г. В. О диагонализации некоторых классов линейных операторов // Изв. вузов. Мат. — 1994. — 11. — С. 14–19.
10. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностного оператора с растущим потенциалом // Сиб. электрон. мат. известия. — 2017. — 14. — С. 673–689.
11. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 4. — С. 395–402.
12. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. — М.: ГИФМЛ, 1960.
13. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. мат. Фундам. направл. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
14. Казан Ж. П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. — М.: Мир, 1976.
15. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: ГИФМЛ, 1960.
16. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
17. Скрынников А. В. О квазинильпотентном варианте метода Фридрихса в теории подобия линейных операторов // Функци. анал. прилож. — 1983. — 17, № 3. — С. 89–90.
18. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group // J. Oper. Matr. — 2018. — 12, № 3. — P. 723–756.

19. *Feintuch A., Saks R.* System theory. A Hilbert Space Approach. — New York–London: Academic Press, 1982.
20. *Hinkkannen A.* On the diagonalization of a certain class of operators// Michigan Math. J. — 1985. — 32, № 3. — P. 349–359.

Баскаков Анатолий Григорьевич
Воронежский государственный университет
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валериевна
Воронежский государственный педагогический университет
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Ускова Наталья Борисовна
Воронежский государственный технический университет
E-mail: nat-uskova@mail.ru