Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Е. Безмельница, С. В. Корнев, В. В. Обуховский, Метод случайных многолистных направляющих функций в периодической задаче для случайных дифференциальных включений, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 194, 38–45

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-194-38-45>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:06:19

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 194 (2021). С. 38–45
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-194-38-45

УДК 517.911.5

МЕТОД СЛУЧАЙНЫХ МНОГОЛИСТНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© 2021 г. Ю. Е. БЕЗМЕЛЬНИЦЫНА, С. В. КОРНЕВ, В. В. ОБУХОВСКИЙ

Аннотация. В работе вводится понятие случайной многолистной направляющей функции. Новый метод на основе введенного понятия позволяет установить достаточный признак существования периодических решений случайных дифференциальных включений в конечномерных пространствах.

Ключевые слова: случайное дифференциальное включение, случайная многолистная направляющая функция, случайное периодическое решение.

METHOD OF STOCHASTIC MULTIVALENT GUIDING FUNCTIONS IN A PERIODIC PROBLEM FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© 2021 YU. E. BEZMELNITSYNA, S. V. KORNEV, V. V. OBUKHOVSKII

ABSTRACT. In this paper, the concept of a stochastic multivalent guiding function is introduced. The new method based of the concept introduced allows one to establish a sufficient criterion for the existence of periodic solutions of stochastic differential inclusions in finite-dimensional spaces.

Keywords and phrases: stochastic differential inclusion, stochastic multivalent guiding function, stochastic periodic solution.

AMS Subject Classification: 34F05, 34A60, 34C25

1. Введение. Пусть (Ω, Σ, μ) — полное вероятностное пространство (см., например, [13]), $I = [0, T]$. Мы будем рассматривать периодическую задачу для случайных дифференциальных включений следующего вида:

$$z'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega, t, z(\omega, t)) \quad \text{п. в. } t \in I, \quad (1)$$

$$z(\omega, 0) = z(\omega, T), \quad (2)$$

для всех $\omega \in \Omega$, где $\mathcal{F} : \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ — заданное многозначное отображение, или мультиотображение.

Для решения задачи (1), (2) используется новый метод на основе понятия случайной многолистной направляющей функции. Напомним, что метод направляющих функций был впервые представлен М. А. Красносельским и А. И. Перовым (см., например, [7, 8]) для исследования периодических колебаний динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями.

Работа поддержана Минобрнауки РФ в рамках проектной части госзадания (проект № 1.3464.2017/4.6) и Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 17-51-52022).

Понятие направляющей функции было расширено в различных направлениях и использовано для решения целого ряда задач. Среди значительного количества работ по данной теме можно отметить следующие: статьи J. Mawhin'a [21–23], в которых исследуются периодические и ограниченные решения дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений; работа A. Fonda [17], в которой было введено понятие интегральных направляющих функций для функционально-дифференциальных уравнений; статья Д. Рачинского [25], в которой он определил понятие многолистной направляющей функции. Относительно применения метода направляющих функций к периодическим задачам для дифференциальных включений можно отметить работы [2–6, 12, 16]. Основы и приложения метода направляющих функций в нелинейном анализе можно найти также в недавней монографии [24].

J. Andres и L. Górniewicz в [10] ввели понятие случайной топологической степени и распространили метод случайной направляющей функции на задачу исследования периодических решений случайных дифференциальных включений в конечномерных пространствах. В настоящей работе, развивая методы, описанные в [10, 20, 25], мы определяем понятие случайной многолистной направляющей функции и используем его для доказательства существования случайных периодических решений задачи (1), (2).

Работа имеет следующую структуру. Во втором разделе приводятся необходимые основные сведения из теории многозначных отображений (см. [10]). Понятие случайной многолистной направляющей функции вводится в третьем разделе. Основной результат работы представлен теоремой 3.

2. Предварительные сведения. В дальнейшем используются известные понятия и терминология из анализа и теории многозначных отображений (мультиотображений) (см., например, [1, 2, 9, 11, 14, 15, 18, 19]). Напомним некоторые из них.

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства. Символами $P(Y)$, $C(Y)$, $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y . Если Y — нормированное пространство, то символами $Cv(Y)$, $Kv(Y)$ обозначаются совокупности всех непустых выпуклых, соответственно, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y .

Определение 1. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется *полу непрерывным сверху* (пн. св.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $d_X(x_0, x) < \delta$ вытекает включение $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ U_ε обозначает ε -окрестность множества.

Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется *пн. св.*, если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.

Определение 2. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется *замкнутым*, если его график

$$\Gamma_F = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}$$

является замкнутым множеством в пространстве $X \times Y$.

Определение 3. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется *компактным*, если область значений $F(X)$ относительно компактна в Y , т.е. $\overline{F(X)}$ компактно в Y .

В дальнейшем пн. св. и компактное мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ будем называть просто компактным.

Мультиотображение будем называть *мультифункцией*, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

Определение 4. Однозначное отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *сечением* мультиотображения F , если $f(x) \in F(x)$ для каждого $x \in X$.

Пусть I — замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

Определение 5. Мультифункция $F : I \rightarrow K(Y)$ называется *измеримой*, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз

$$F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$$

является измеримым подмножеством в I .

Замечание 1. Всякая измеримая мультифункция $F : I \rightarrow K(Y)$ обладает измеримым сечением, т.е. существует такая измеримая функция $f : I \rightarrow Y$, что $f(t) \in F(t)$ почти для всех (п.в.) $t \in I$.

Определение 6. Пусть $F : X \multimap P(Y)$ — некоторое мультиотображение. Непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$, где $\varepsilon > 0$, называется ε -*аппроксимацией мультиотображения* F , если для каждого $x \in X$ найдется такое $x' \in X$, что $\varrho_X(x, x') < \varepsilon$ и

$$f_\varepsilon(x) \in U_\varepsilon(F(x')).$$

Ясно, что это понятие может быть равносильно выражено условием

$$f_\varepsilon(x) \in U_\varepsilon(F(B_\varepsilon(x))) \quad \forall x \in X.$$

Теорема 1. Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство, Y — нормированное пространство. Для всякого полунепрерывного сверху мультиотображения $F : X \rightarrow Cv(Y)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$, что

- (i) для каждого $x \in X$ найдется такое $x' \in X$, что $\varrho(x, x') < \varepsilon$ и

$$f_\varepsilon(x) \cup F(x) \subset U_\varepsilon(F(x'));$$

- (ii) $f_\varepsilon(X) \subset co F(x)$.

Пусть (Ω, Σ, μ) — полное вероятностное пространство (см., например, [13]) и $I = [0, T]$. Приведем некоторые сведения из теории случайных мультиотображений (см., например, [10]).

Определение 7. Мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times X \rightarrow C(Y)$ называется *случайным мультиоператором*, если оно измеримо относительно $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$, где $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ — наименьшая σ -алгебра на $\Omega \times X$, включающая все множества $A \times B$, где $A \in \Sigma$ и $B \in \mathbb{B}(X)$ и $\mathbb{B}(X)$ обозначена борелевская σ -алгебра на X . Если, кроме того, $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \rightarrow C(Y)$ полунепрерывно сверху для всех $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{F}$ называется *случайным u -мультиоператором*.

Замечание 2. Понятие однозначного случайного оператора $f : \Omega \times X \rightarrow Y$ может быть получено аналогичным образом. Если, к тому же, $f(\omega, \cdot) : X \rightarrow Y$ непрерывно для всех $\omega \in \Omega$, то f называется *случайным c -оператором*.

Определение 8. Пусть $A \subset Y$ — замкнутое подмножество и $\mathcal{F} : \Omega \times A \rightarrow P(Y)$ — случайный мультиоператор. *Случайной неподвижной точкой* ξ мультиоператора $\mathcal{F}$ называется такое отображение $\xi : \Omega \rightarrow A$, что

$$\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega)) \text{ для всех } \omega \in \Omega.$$

Теорема 2. Пусть Y — сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{F} : \Omega \times Y \rightarrow C(Y)$ — случайный мультиоператор. Если для каждого $\omega \in \Omega$ множество

$$\text{Fix } \mathcal{F}_\omega := \{x \in Y : x \in \mathcal{F}(\omega, x)\}$$

неподвижных точек мультиоператора $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}(\omega, \cdot)$ непусто и замкнуто, тогда $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.

Определение 9. Мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times X \rightarrow K(Y)$ называется:

- (i) *случайным компактным u -мультиоператором*, если оно является случайным u -мультиоператором и для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \rightarrow K(Y)$ компактно;
- (ii) *случайным вполне u -мультиоператором*, если оно является случайным u -мультиоператором и для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \rightarrow K(Y)$ вполне полунепрерывно сверху.

3. Основной результат. Пусть, как и прежде, $I = [0, T]$. Будем рассматривать периодическую задачу (1), (2) для случайного дифференциального включения при следующих предположениях:

- ($\mathcal{F}_1$) $\mathcal{F} : \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ — случайный u -мультиоператор;
 ($\mathcal{F}_2$) существует такая функция $c : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$, что $c(\omega, \cdot)$ локально интегрируема на I для каждого $\omega \in \Omega$, а $c(\cdot, t)$ измерима п.в. $t \in I$, и

$$\|\mathcal{F}(\omega, t, y)\| := \sup \{|z| : z \in \mathcal{F}(\omega, t, y)\} \leq c(\omega, t)(1 + |y|).$$

Случайным решением периодической задачи (1), (2) называется такая функция $\xi : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, что

- (i) отображение $\omega \in \Omega \rightarrow \xi(\omega, \cdot) \in C(I, \mathbb{R}^n)$ измеримо;
 (ii) для каждого $\omega \in \Omega$ абсолютно непрерывная функция $\xi(\omega, \cdot) \in C(I, \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (1), (2) п.в. $t \in I$.

Из условий ($\mathcal{F}_1$)–($\mathcal{F}_2$) следует, что определен мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} : \Omega \times C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow P(L^2(I, \mathbb{R}^n)),$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, z) = \{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : f(s) \in \mathcal{F}(\omega, s, z(s)), \text{ п. в. } s \in I\}.$$

Кроме того, для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, \cdot) : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow P(L^2(I, \mathbb{R}^n))$ замкнут (см., например, [2, 11, 15, 18]).

Пусть $j : L^2(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$ — интегральный оператор

$$j(f)(t) = \int_0^T f(s) ds.$$

Композицию

$$j \circ \mathcal{P}_{\mathcal{F}} : \Omega \times C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow Cv(C(I, \mathbb{R}^n))$$

будем называть *интегральным мультиоператором суперпозиции*, порожденным мультиотображением $\mathcal{F}$.

Рассмотрим интегральный мультиоператор, предназначенный для поиска T -периодических решений $J_T : \Omega \times C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow Cv(C(I, \mathbb{R}^n))$ вида

$$J_T(\omega, z) = z(\omega, T) + j \circ \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, z).$$

Нетрудно видеть, что неподвижная точка мультиоператора $J_T(\omega, \cdot)$ является решением периодической задачи (1), (2) при заданном $\omega \in \Omega$.

Аналогично [10], можно установить следующее свойство мультиоператора J_T .

Лемма 1. $J_T(\omega, z)$ является случайным вполне u -мультиоператором.

Определение 10 (см. [10]). Функция $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *случайным потенциалом*, если выполняются следующие условия:

- (i) $V(\cdot, z) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ измерима для каждого $z \in \mathbb{R}^n$;
 (ii) $V(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является C^1 -функцией для любого $\omega \in \Omega$.

Определение 11 (см. [10]). Случайный потенциал V называется *случайным невырожденным потенциалом*, если существует такое $R_0 > 0$, что

$$\nabla V(\omega, z) = \left(\frac{\partial V(\omega, z)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial V(\omega, z)}{\partial z_n} \right) \neq 0$$

для всех $(\omega, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^n : |z| \geq R_0$.

Из определения 11 следует, что для фиксированного $\omega \in \Omega$ топологическая степень

$$\deg(\nabla V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R))$$

корректно определена для всех $R \geq R_0$ и совпадает с $\deg(\nabla V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0))$.

Под *случайным индексом* $\text{ind } V$ случайного невырожденного потенциала V мы понимаем случайную топологическую степень $\text{Deg}(\nabla V, B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0)) := \{\deg(\nabla V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0)) \mid \omega \in \Omega\}$.

Определение 12 (см. [10]). Случайный потенциал $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *случайной строгой направляющей функцией* для включения (1), если существует такое $R > 0$, что для всех $\omega \in \Omega$ из того, что $z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\| \geq R$ следует, что

$$\langle \nabla V(\omega, z), y \rangle > 0, \quad y \in \mathcal{F}(\omega, t, z). \quad (3)$$

Лемма 2. Если $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является случайной строгой направляющей функцией для включения (1), то она является случайным прямым потенциалом, и, следовательно, существует ее случайный индекс $\text{ind } V$.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть q — оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = i - q$. Ниже элементы $\mathbb{R}^2$ обозначаются через ξ , а элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ — через ζ .

Пусть φ, ρ — полярные координаты в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим многолистную риманову поверхность

$$\Pi = \{(\varphi, \rho) : \varphi \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, \infty)\}.$$

Пусть на $\Omega \times \Pi$ задан такой случайный потенциал $W(\omega, \varphi, \rho)$, что для каждого $\omega \in \Omega$ выполнены условия

$$\frac{\partial W(\omega, \varphi, \rho)}{\partial \varphi} > 0, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi, \quad (4)$$

$$W(\omega, \varphi + 2\pi, \rho) = W(\omega, \varphi, \rho) + 2\pi, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi. \quad (5)$$

Из (5) следует, что для каждого $\omega \in \Omega$

$$\nabla W(\omega, \varphi + 2\pi, \rho) \equiv \nabla W(\omega, \varphi, \rho).$$

Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ векторное поле $\nabla W(\omega, \cdot, \cdot)$ определено на $\mathbb{R}^2 / \{0\}$.

На подпространстве $\Omega \times \mathbb{R}^{n-2}$ пусть задан такой случайный потенциал $V(\omega, \zeta)$, что для каждого $\omega \in \Omega$ выполнено условие коэрцитивности:

$$\lim_{\|\zeta\| \rightarrow \infty} V(\omega, \zeta) = +\infty. \quad (6)$$

Для каждого $\omega \in \Omega$ обозначим $\vartheta_0 = \vartheta_0(\omega) := \min V(\omega, \zeta)$. Из (6) вытекает, что для каждого $\omega \in \Omega$ область $\{\zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : V(\omega, \zeta) < \vartheta\}$ непуста и ограничена для $\vartheta := \vartheta(\omega) > \vartheta_0$.

Для каждого $\omega \in \Omega$ выберем такие $\vartheta > \vartheta_0$ и $\rho_2 := \rho_2(\omega)$, $\rho_1 := \rho_1(\omega)$, что $\rho_2 > \rho_1 \geq 0$. Для каждого $\omega \in \Omega$ определим область $\mathfrak{G}$ следующим образом:

$$\mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : V(\omega, pz) < \vartheta, \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\}.$$

Предположим, что на $\mathfrak{G} \times [0, T]$ заданы такие случайные потенциалы $\alpha_{\vartheta, \rho_1, \rho_2}(\cdot)$ и $\beta_{\vartheta, \rho_1, \rho_2}(\cdot)$, что

$$\sup_{z \in \mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \sup_{y \in \mathcal{F}(\omega, t, z)} \langle \nabla W(\omega, qz), qy \rangle < \alpha_{\vartheta, \rho_1, \rho_2}(\omega, t), \quad (7)$$

$$\inf_{z \in \mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2)} \inf_{y \in \mathcal{F}(\omega, t, z)} \langle \nabla W(\omega, qz), qy \rangle > \beta_{\vartheta, \rho_1, \rho_2}(\omega, t). \quad (8)$$

В развитие понятий, введенных в [3, 20, 25], дадим следующее определение.

Определение 13. Пару функций $\{V(\omega, \zeta), W(\omega, \varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (4)–(8), будем называть случайной строгой многолистной направляющей функцией (МНФ) для включения (1) относительно области $\mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{y \in \mathcal{F}(\omega, t, z)} \frac{|\langle qy, qz \rangle|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T}, \quad z \in \mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2); \quad (9)$$

$$\langle \nabla V(\omega, pz), py \rangle < 0, \quad y \in \mathcal{F}(\omega, t, z), \quad V(\omega, pz) \geq \vartheta, \quad \|qz\| \leq \rho_2; \quad (10)$$

$$2\pi(N_\omega - 1) < \int_0^T \alpha_{\vartheta, \rho_1, \rho_2}(\omega, \tau) d\tau, \quad \int_0^T \beta_{\vartheta, \rho_1, \rho_2}(\omega, \tau) d\tau < 2\pi N_\omega, \quad (11)$$

где N_ω — натуральное число; $\alpha_{\vartheta, \rho_1, \rho_2}(\omega, t)$, $\beta_{\vartheta, \rho_1, \rho_2}(\omega, t)$ — функции, удовлетворяющие условиям (7)–(8).

Для каждого $\omega \in \Omega$ определим область

$$G(\vartheta, \rho) = \{z \in \mathbb{R}^n : V(\omega, pz) < \vartheta, \|qz\| < \rho\}.$$

Область $G(\vartheta, \rho)$ может быть представлена в виде $G(\vartheta, \rho) = G_\zeta(\vartheta) \times G_\xi(\rho)$, где

$$G_\zeta(\vartheta) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : V(\omega, \zeta) < \vartheta\}, \quad G_\xi(\rho) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \|\xi\| < \rho\}.$$

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема 3. Пусть для включения (1) может быть указана случайная строгая МНФ относительно области $\mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. Тогда включение (1) имеет такое случайное T -периодическое решение $z_*(\omega, t)$, что

$$z_*(\omega, t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}, \quad t \in I, \quad \rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\omega \in \Omega$ и построим для мультиотображения $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ на компактном множестве $I \times \overline{G(\vartheta, \rho_2)}$ последовательность ε_m -аппроксимаций $f_{\varepsilon_m}^\omega$, где $f_{\varepsilon_m}^\omega : I \times \overline{G(\vartheta, \rho_2)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, график каждого из которых содержится в ε_m -окрестности графика $\mathcal{F}$:

$$\Gamma f_{\varepsilon_m}^\omega \subset U_{\varepsilon_m}(\Gamma \mathcal{F}),$$

и область значений отображения $f_{\varepsilon_m}^\omega$ удовлетворяет соотношению

$$f_{\varepsilon_m}^\omega(I \times \overline{G(\vartheta, \rho_2)}) \subset \text{co } \mathcal{F}(I \times \overline{G(\vartheta, \rho_2)}). \quad (12)$$

Кроме того, из конструкции ε_m -аппроксимаций нетрудно видеть, что без ущерба для общности мы можем считать $f_{\varepsilon_m}^\omega$ T -периодичными по первому аргументу.

Отметим, что для каждого ε_m выполнено

$$f_{\varepsilon_m}^\omega(t, z) \in O_{\varepsilon_m}(\mathcal{F}(B_{\varepsilon_m}(t, z)))$$

где $(t, z) \in I \times \overline{G(\vartheta, \rho_2)}$, O_{ε_m} обозначает ε_m -окрестность множества в $\mathbb{R}^n$, а B_{ε_m} обозначает ε_m -окрестность точки (t, z) . Отсюда вытекает, что поскольку неравенства, задающие соотношения (7)–(11) являются строгими, то для достаточно малых ε_m функции $f_{\varepsilon_m}^\omega$ также удовлетворяют соотношениям (7)–(11).

Из отличия от прямого случайного индекса $\text{ind } V$ и результатов [25] вытекает, что каждое дифференциальное уравнение

$$z'(t) = f_{\varepsilon_m}^\omega(t, z(t))$$

обладает таким T -периодическим решением $z_m^\omega(\cdot)$, что

$$z_m^\omega(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}, \quad t \in I.$$

Из соотношений (12) следует, что функции $z_m^\omega(\cdot)$ равностепенно непрерывны и, таким образом, мы можем считать без ущерба для общности, что последовательность функций $z_m^\omega(\cdot)$ сходится к такой функции $z^\omega(\cdot)$, что

$$z^\omega(t) \in \overline{G(\vartheta, \rho_0)}, \quad t \in I,$$

В силу произвольности выбора $\omega \in \Omega$ получаем таким образом существование T -периодического решения $z^\omega(\cdot)$ включения (1) для каждого $\omega \in \Omega$.

Таким образом, интегральный мультиоператор $J_T(\omega, z)$ имеет неподвижную точку для каждого $\omega \in \Omega$. Из 1 и 2 тогда вытекает существование случайного решения задачи (1)–(2). $\square$

Пример 1. Рассмотрим периодическую задачу для случайного полулинейного дифференциального включения следующего вида:

$$z'(\omega, t) \in Az(\omega, t) + G(\omega, t, z(\omega, t)) \quad \text{п.в. } t \in I, \quad (13)$$

$$z(\omega, 0) = z(\omega, T), \quad (14)$$

для всех $\omega \in \Omega$, предполагая, что $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, а мультиотображение $G : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ является случайным u -мультиоператором, удовлетворяющим условию T -периодичности по второму аргументу и условию типа подлинейного роста ($\mathcal{F}_2$).

Пусть выполнены следующие условия:

- (i) E^2 — двумерное собственное подпространство линейного оператора A , отвечающее паре мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i\theta_0$, где $\theta_0 > 0$; остальные собственные значения λ_j оператора A лежат слева от мнимой оси:

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0, \quad j = 3, \dots, n;$$

- (ii) E^{n-2} — дополнительное к E^2 инвариантное для линейного оператора A подпространство;
 (iii) период $T_0 = 2\pi/\theta_0$ собственных колебаний системы $z' = Az$ связан с периодом T мультиотображения G соотношением

$$T = lT_0, \quad l \in N;$$

- (iv) мультиотображение G для каждого $\omega \in \Omega$ имеет вид $G(\omega, t, z) = G_0(\omega, t, z) \times G_1(\omega, t, z) \subset E^{n-2} \times E^2$.

Обозначим через $\{x, y\}$ координаты вектора $\xi \in E^2$ в некотором базисе $\{e_1, e_2\}$. Тогда каждый вектор $z \in E^n$ единственным образом представим в виде

$$z = \zeta + \xi = \zeta + xe_1 + ye_2$$

и $Az = A(\zeta + xe_1 + ye_2) = A_0\zeta + \theta_0(-ye_1 + xe_2)$, где A_0 — сужение A на E^{n-2} . Поэтому включение (13) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \zeta'(\omega, t) \in A_0\zeta + G_0(\omega, t, \zeta, x, y), \\ x'(\omega, t) \in -\theta_0 y + G_{11}(\omega, t, \zeta, x, y), \\ y'(\omega, t) \in \theta_0 x + G_{12}(\omega, t, \zeta, x, y). \end{cases} \quad (15)$$

Пусть $\varphi = \arctg(y/x)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Положим

$$V(\omega, \zeta) = \langle \zeta, D\zeta \rangle, W(\omega, \varphi, \rho) = \varphi,$$

где

$$D = 2 \int_0^\infty \exp(A'_0 \tau) \exp(A_0 \tau) d\tau$$

и A'_0 обозначает матрицу, транспонированную для A_0 . Нетрудно показать, что пара $\{V(\omega, \zeta), W(\omega, \varphi, \rho)\}$ является строгой случайной МНФ для системы (15) относительно некоторой области $\mathfrak{G}(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. Тогда в силу теоремы 3 система (15) имеет случайное T -периодическое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР — 1985. — 169. — С. 194–252.
2. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: Либриком, 2011.
3. *Корнев С. В.* О методе многолистных направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений // Автомат. телемех. — 2003. — 3. — С. 72–83.
4. *Корнев С. В., Обуховский В. В.* О негладких многолистных направляющих функциях // Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 11. — С. 1497–1502.
5. *Корнев С. В., Обуховский В. В.* Негладкие направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях // Автомат. телемех. — 2007. — 1. — С. 3–12.
6. *Корнев С. В.* Многолистные направляющие функции в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью // Изв. вузов. Мат. — 2016. — 11. — С. 14–26.
7. *Красносельский М. А., Перов А. И.* Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1958. — 123, № 2. — С. 235–238.
8. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.

9. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986.
10. Andres J., Górniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions// Topol. Meth. Nonlin. Anal. — 2012. — 40. — P. 337–358.
11. Arutyunov A. V., Obukhovskii V. Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics. — Berlin–Boston: de Gruyter, 2017.
12. De Blasi F. S., Górniewicz L., Pianigiani G. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions// Nonlin. Anal. — 1999. — 37. — P. 217–245.
13. Castaing C., Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions. — New York–Berlin: Springer-Verlag, 1977.
14. Deimling K. Multivalued Differential Equations. — Berlin–New York: de Gruyter, 1992.
15. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. — Berlin, 2006.
16. Górniewicz L., Plaskacz S. Periodic solutions of differential inclusions in $\mathbb{R}^n$ // Boll. UMI. — 1993. — 7-A. — P. 409–420.
17. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1987. — 99, № 1. — P. 79–85.
18. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. — Berlin–New York: de Gruyter, 2001.
19. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control. — Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, 1991.
20. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. On multivalent guiding functions method in the periodic problem for random differential equations// J. Dynam. Differ. Equations. — 2019. — 31, № 2. — P. 1017–1028.
21. Mawhin J. Periodic solutions of nonlinear functional differential equations// J. Differ. Equations. — 1971. — 10. — P. 240–261.
22. Mawhin J., Ward James R. Jr. Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations// Discr. Contin. Dynam. Syst. — 2002. — 8, № 1. — P. 39–54.
23. Mawhin J., Thompson H. B. Periodic or bounded solutions of Caratheodory systems of ordinary differential equations// J. Dynam. Differ. Equations. — 2003. — 15, № 2–3. — P. 327–334.
24. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N. V., Kornev S. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis. — Berlin, 2013.
25. Rachinskii D. I. Multivalent guiding functions in forced oscillation problems// Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl. — 1996. — 26. — P. 631–639.

Безмельницына Юлия Евгеньевна

Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: bezmelnicyna@inbox.ru

Корнев Сергей Викторович

Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Обуховский Валерий Владимирович

Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: valerio-ob2000@mail.ru