Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Белова, Об одной смешанной задаче с инволюцией, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 194, 46–54

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-194-46-54>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 11:32:26

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

© 2021 г. Д. В. БЕЛОВА

Аннотация. В работе исследуется смешанная задача для уравнения с инволютивным отклонением в аргументе и с периодическими краевыми условиями. Методом Фурье получено классическое решение задачи при минимальных требованиях на начальные данные задачи. При этом использованы приемы по ускорению сходимости ряда, представляющего формальное решение.

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, инволюция, смешанная задача, метод Фурье.

ON ONE MIXED PROBLEM WITH INVOLUTION

© 2021 D. V. BELOVA

ABSTRACT. In this paper, we examine a mixed problem for an equation with an involutive deviation in the argument and periodic boundary conditions. Using the Fourier method, we obtain a classical solution to the problem with minimal requirements for the initial data of the problem. Also, we used some methods of improving the convergence of the series representing a formal solution.

Keywords and phrases: functional differential operator, involution, mixed problem, Fourier method.

AMS Subject Classification: 35F16, 34K08

1. Введение. Рассматривается следующая смешанная задача с инволюцией и с периодическими краевыми условиями:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + q_1(x)u(1 - x, t) + q_2(x)u(x, t), \quad x \in [0; 1], \quad t \in (-\infty; +\infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x). \quad (2)$$

Предполагаем, что $q_j(x)$ и $\varphi(x)$ — комплекснозначные функции, $q_j \in C^1[0, 1]$, $j = 1, 2$, а на $\varphi(x)$ накладываем минимальные требования, следующие из постановки задачи: $\varphi \in C^1[0, 1]$ и

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) - \varphi'(1) + \varphi(0)[q_1(0) - q_1(1) + q_2(0) - q_2(1)] = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) представляет собой простейшее уравнение в частных производных, содержащее инволюцию в аргументе $u(x, t)$, т.е. отображение $g(x) = 1 - x$ такое, что $g(g(x)) = x$. Интерес к операторам с такой инволюцией вызван, в частности, работами А. П. Хромова (см. [14]) по исследованию интегральных операторов с инволюцией в верхнем пределе. Различные спектральные задачи для интегральных и функционально-дифференциальных операторов с инволюциями активно исследуются (см., например, [1, 8, 10, 12, 15, 16] и библиографию в них). Изучение смешанных задач для уравнения первого порядка с инволюцией проводится в [2, 4, 6, 7, 9]. Здесь будет использоваться техника работ [4, 6, 7, 9], основанная на применении метода Фурье и идей по ускорению сходимости ряда, представляющего формальное решение. В [7] исследовалась задача с периодическими краевыми условиями, но с инволюцией в производной (здесь иначе выбирается вспомогательная эталонная задача). Данная работа обобщает результаты работы [9].

Метод Фурье в задаче (1)–(2) приводит к спектральной задаче

$$Ly = \lambda y \quad (4)$$

для оператора L :

$$(Ly)(x) = y'(x) + q_1(x)y(1-x) + q_2(x)y(x), \quad y(0) = y(1).$$

Наряду с L будем также рассматривать оператор L_0 , который получается из L при $q_1(x) = 0$:

$$(L_0y)(x) = y'(x) + q_2(x)y(x), \quad y(0) = y(1).$$

Считаем, что область определения этих операторов D_L (D_{L_0}) включает непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $y(0) = y(1)$.

2. Эталонная задача. Задачу (1)–(2) с $q_1(x) \equiv 0$ будем называть эталонной (в соответствии с [7]), ее решение будем обозначать $u_0(x, t)$. В этом случае уравнение (1) является простейшим уравнением в частных производных первого порядка, и исследование задачи не представляет трудностей. Приведем здесь решение этой задачи методом Фурье, необходимое для исследования общего случая, показав возможность суммирования соответствующего формального ряда. Здесь достаточно предполагать, что $q_2(x) \in C[0, 1]$. Условия (3) здесь заменяются на

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) - \varphi'(1) + \varphi(0)[q_2(0) - q_2(1)] = 0. \quad (5)$$

Решая соответствующую спектральную задачу $L_0y = \lambda y$, легко получаем следующее утверждение.

Лемма 1. Собственные значения λ_n^0 и собственные функции $y_n^0(x)$ оператора L_0 имеют вид

$$\lambda_n^0 = 2\pi ni + a, \quad y_n^0(x) = s(x)e^{2\pi nix}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где

$$a = \int_0^1 q_2(t)dt, \quad s(x) = \exp \left(ax - \int_0^x q_2(t)dt \right).$$

Оператор L_0 не является самосопряженным. Собственному значению $\lambda_n^{0*} = \overline{\lambda_n^0}$ сопряженного оператора

$$(L_0^*z)(x) = -z'(x) + \overline{q_2(x)}z(x), \quad z(0) = z(1),$$

соответствует собственная функция $z_n(x) = e^{2\pi nix}s_1(x)$, где

$$s_1(x) = \exp \left(-\overline{a}x + \int_0^x \overline{q_2(t)}dt \right).$$

Учитывая, что

$$s_1(x) = \exp \left(-ax + \int_0^x q_2(t)dt \right) = (\overline{s(x)})^{-1},$$

получаем следующий результат.

Лемма 2. Собственные значения λ_n^{0*} и собственные функции $z_n^0(x)$ оператора L_0^* имеют вид

$$\lambda_n^{0*} = -2\pi ni + \overline{a}, \quad z_n^0(x) = (\overline{s(x)})^{-1}e^{2\pi nix}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где a и $s(x)$ такие же, как в лемме 1.

Всюду далее через $(\cdot, \cdot)$ будем обозначать скалярное произведение в $L_2[0, 1]$.

Лемма 3. Системы $\{y_n^0(x)\}$ и $\{z_n^0(x)\}$ полны в $L_2[0, 1]$, причем $(y_n^0, z_n^0) = 1$.

Доказательство. Пусть функция $f(x) \in L_2[0, 1]$ ортогональна $\{y_n^0(x)\}$. Тогда

$$(f, y_n^0) = \int_0^1 f(x) \overline{s(x)} e^{-2\pi n i x} dx = 0,$$

откуда в силу полноты тригонометрической системы $\{e^{2\pi n i x}\}$ получаем $f(x) \overline{s(x)} \equiv 0$ п. в. Отсюда следует: $f(x) \equiv 0$ п. в., что и доказывает полноту. Доказательство для $\{z_n^0(x)\}$ аналогично. Равенство $(y_n^0, z_n^0) = 1$ очевидно. $\square$

Теорема 1. Если $q_1(x) = 0$, $q_2(x) \in C[0, 1]$, $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ и удовлетворяет условиям (5), то классическое решение задачи (1)–(2) существует и имеет вид

$$u_0(x, t) = s(x) f_0(x + t) e^{at}, \quad (6)$$

где $f_0(x) \in C^1(-\infty; +\infty)$ — периодическая с периодом 1 функция, причем $f_0(x) = \varphi(x) s^{-1}(x)$ при $x \in [0, 1]$, а и $s(x)$ из леммы 1.

Доказательство. Согласно методу Фурье решением задачи является формальный ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 t}.$$

Подставляя в начальное условие (2), с учетом леммы 3 находим $c_n = (\varphi, z_n^0)$. Таким образом, при $x \in [0, 1]$ имеем

$$u(x, 0) = s(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi, z_n^0) e^{2\pi n i x}. \quad (7)$$

Ряд в (7) определен при всех x . Обозначим его сумму через $f_0(x)$:

$$f_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi, z_n^0) e^{2\pi n i x}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Очевидно, что $f_0(x)$ — периодическая функция с периодом 1. Так как

$$(\varphi, z_n^0) = (\varphi, \overline{s(x)})^{-1} e^{2\pi n i x} = (\varphi(x) s^{-1}(x), e^{2\pi n i x}),$$

и функция $\varphi(x) s^{-1}(x) \in D_{L_0}$ (из того, что $s(0) = s(1) = 1$), то нетрудно показать, что этот ряд равномерно сходится при всех $x \in (-\infty, +\infty)$, а при $x \in [0, 1]$ в силу полноты тригонометрической системы, его сумма равна $\varphi_1(x) = \varphi(x)/s(x)$. Таким образом, $f_0(x) = \varphi_1(x)$, при $x \in [0, 1]$, а на остальной части всей числовой оси $f_0(x)$ определяется периодическим продолжением.

Исследуем гладкость $f_0(x)$. Из вышесказанного следует непрерывная дифференцируемость $f_0(x)$ всюду, кроме точек $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Достаточно проверить, что

$$f_0(0 - 0) = f_0(0 + 0), \quad f_0'(0 - 0) = f_0'(0 + 0).$$

Первое соотношение легко следует из периодичности $f_0(x)$, условий (5) и $s(0) = s(1) = 1$. Далее, при $x \in [0, 1]$ имеем

$$f_0'(x) = \varphi_1'(x) = \frac{\varphi'(x) - \varphi(x)(a - q_2(x))}{s(x)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f_0'(0 - 0) &= f_0'(1 - 0) = \varphi_1'(1) = \varphi'(1) - \varphi(1)(a - q_2(1)), \\ f_0'(0 + 0) &= \varphi_1'(0) = \varphi'(0) - \varphi(0)(a - q_2(0)), \end{aligned}$$

и равенство $f_0'(0 - 0) = f_0'(0 + 0)$ следует из (5). Следовательно, $f_0(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$.

Преобразуя формальный ряд, теперь его можно просуммировать:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1, e^{2\pi n i x}) s(x) e^{at} e^{2\pi n i (x+t)} = s(x) e^{at} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi_1, e^{2\pi n i x}) e^{2\pi n i (x+t)},$$

откуда получаем (6). Непосредственной проверкой можно убедиться, что (6) удовлетворяет уравнению (1) при $q_1(x) \equiv 0$ и условиям (2). $\square$

3. Асимптотика собственных значений и собственных функций оператора L . Получим теперь асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора L . Так же как в [7] решение спектральной задачи (4) сводится к системе Дирака, а именно справедлива следующая лемма.

Лемма 4. Число λ является собственным значением, а $y(x)$ собственной функцией краевой задачи (4) тогда и только тогда, когда $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T = (y(x), y(1-x))^T$ (здесь T — знак транспонирования) является ненулевым решением системы

$$u'(x) + Q(x)u(x) = \lambda Du(x), \quad (8)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_2(x) & q_1(x) \\ -q_1(1-x) & -q_2(1-x) \end{pmatrix}$$

с краевыми условиями

$$u_1(0) = 0, \quad u_1(1/2) = u_2(1/2). \quad (9)$$

С помощью замены

$$u_1(x) = h_1(x)z_1(x), \quad u_2(x) = h_2(x)z_2(x), \quad (10)$$

где

$$h_1(x) = \exp \left(- \int_0^x q_2(t) dt \right), \quad h_2(x) = \exp \left(- \int_0^x q_2(1-t) dt \right),$$

система (8) сводится к системе Дирака

$$z'(x) + P(x)z(x) = \lambda Dz(x), \quad (11)$$

где

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_1(x) \\ p_2(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(1, -1), \quad p_1(x) = \frac{q_1(x)h_2(x)}{h_1(x)}, \quad p_2(x) = \frac{q_1(1-x)h_1(x)}{h_2(x)}.$$

Уточненные асимптотические формулы для общего решения системы (11) в случае $p_k \in C^1[0, 1]$ приведены, например в [7] (см. также [3]). Из [7, теорема 4] и (10) получаем следующее утверждение.

Лемма 5. Если $\text{Re } \lambda \geq 0$, $q_j(x) \in C^1[0, 1]$, то для общего решения уравнения (8) справедлива асимптотическая формула

$$u(x, \lambda) = H(x)Z(x, \lambda)e^{\lambda D x} c,$$

где

$$H(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) & 0 \\ 0 & h_2(x) \end{pmatrix}, \quad Z(x, \lambda) = (z_{ij}(x, \lambda))_{i,j=1,2},$$

$c = (c_1, c_2)^T$ — произвольный вектор и

$$z_{11}(x, \lambda) = 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x p_1(t)p_2(t)dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$z_{12}(x, \lambda) = \frac{1}{2\lambda} \left(p_2(x) - p_2(1)e^{-2\lambda(1-x)} + \int_x^1 e^{2\lambda(x-t)} p_2'(t)dt \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$z_{21}(x, \lambda) = -\frac{1}{2\lambda} \left(p_1(x) - p_1(0)e^{-2\lambda x} - \int_0^x e^{-2\lambda(x-t)} p_1'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$z_{22}(x, \lambda) = 1 - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x p_1(t) p_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Из леммы 5 и условий (9) получаем следующее уравнение для собственных значений:

$$\begin{vmatrix} h_1(0)z_{11}(0) - h_2(0)z_{21}(0) & h_1(0)z_{12}(0) - h_2(0)z_{22}(0) \\ [h_1(\frac{1}{2})z_{11}(\frac{1}{2}) - h_2(\frac{1}{2})z_{21}(\frac{1}{2})]e^{\frac{\lambda}{2}} & [h_1(\frac{1}{2})z_{12}(\frac{1}{2}) - h_2(\frac{1}{2})z_{22}(\frac{1}{2})]e^{-\frac{\lambda}{2}} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

(аргумент λ у z_{ij} для удобства опускаем). Используя «грубую» асимптотику для z_{ij} из леммы 5:

$$z_{11}(x, \lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad z_{12}(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad z_{21}(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad z_{22}(x, \lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

получим следующее утверждение.

Лемма 6. Для собственных значений и собственных функций оператора L имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_n = 2\pi ni + a + O(n^{-1}), \quad y_n(x) = s(x)e^{2\pi ni x} + O(n^{-1}),$$

где a и $s(x)$ из леммы 1, $n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \pm(n_0 + 2), \dots$, n_0 — некоторое достаточно большое число.

Следующая лемма аналогична [7, лемма 12].

Лемма 7. При $\lambda = \lambda_n$ для значений функций $z_{ij}(x, \lambda)$ из леммы 5 справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} z_{11}(0) &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad z_{12}(0) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ z_{22}(0) &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad z_{21}(0) = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ z_{11}\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad z_{12}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ z_{22}\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad z_{21}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

(аргумент λ_n для удобства опускаем). Здесь и всюду далее через α обозначаются различные константы, не зависящие от n (из конечного набора констант), через α_n — такие константы, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

Используя теперь в (12) асимптотику из леммы 7, получаем следующую теорему.

Теорема 2. Для собственных значений и собственных функций оператора L имеют место следующие уточненные асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= 2\pi ni + a + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ y_n(x) &= s(x)e^{2\pi ni x} + \psi_{1n}(x) + \psi_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

где

$$\psi_{1n}(x) = \frac{1}{n} \left[b_1(x)e^{-\lambda_n^0 x} + b_2(x)e^{\lambda_n^0 x} + b_3(x)\alpha_n e^{-\lambda_n^0 x} + b_4(x)\alpha_n e^{\lambda_n^0 x} \right],$$

$$\psi_{2n}(x) = \frac{1}{n} \left[b_5(x) \int_0^x e^{-\lambda_n^0 t} q'_1 \left(\frac{x+t}{2} \right) dt + b_6(x) \int_0^x e^{\lambda_n^0 t} q'_1 \left(\frac{x-t}{2} \right) dt \right],$$

$b_k(x)$ — некоторые непрерывные функции.

Точный вид функций $b_k(x)$ не важен, достаточно знать, что $b_k(x) \in C[0, 1]$.

Замечание. Аналогичную асимптотику получим для собственных значений λ_n^* и собственных функций $z_n(x)$ сопряженного оператора (только главную часть асимптотик теперь будут давать λ_n^{0*} и $z_n^0(x)$ из леммы 2).

4. Решение задачи (1)–(2). Согласно методу Фурье формальное решение задачи представим в виде (см. [13]):

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|n| \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \varphi)(x) e^{\lambda t} d\lambda,$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр), $\gamma_n = \{\lambda \mid |\lambda - 2\pi ni - a| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, чтобы собственные значения λ_n попадали по одному внутрь γ_n , а $r > 0$ фиксировано и таково, что все собственные значения, для которых $|n| \leq n_0$, попадают в контур $|\lambda| = r$. При этом

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R_\lambda \varphi)(x) e^{\lambda t} d\lambda = \frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)} y_n(x) e^{\lambda_n t}.$$

По теореме 2 и замечанию к ней коэффициенты $c_n = (\varphi, z_n)/(y_n, z_n) = \alpha_n/n$, откуда в силу ограниченности $y_n(x)$ и $e^{\lambda_n t}$ следует равномерная сходимость ряда. Но эта оценка недостаточна для того, чтобы ряд можно было почленно дифференцировать. Следуя схеме работ [6, 9], классическое решение может быть получено, но при дополнительных ограничениях на значения $q_1(x)$ в точках 0 и 1 (а именно, $q_1(0) = q_1(1)$). Здесь мы снимем такое ограничение, используя приемы из [5, 11]. Пусть вещественное число μ лежит вне контуров $|\lambda| = r$ и γ_n . Положим $g = (L - \mu E)\varphi$. Тогда $\varphi = R_\mu g$, и $g = (L - \lambda E)\varphi + (\lambda - \mu)\varphi$, откуда

$$R_\lambda \varphi = -\frac{\varphi}{\lambda - \mu} + \frac{R_\lambda g}{\lambda - \mu}. \quad (13)$$

Используя (13), аналогично [5, 11], для $u(x, t)$ получим следующее представление:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t),$$

где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda - \mu_0} e^{\lambda t} d\lambda, \quad (14)$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{R_\lambda g - R_\lambda^0 g}{\lambda - \mu_0} e^{\lambda t} d\lambda, \quad (15)$$

R_λ^0 — резольвента оператора L_0 .

Используя соотношение, аналогичное (13), для R_λ^0 , имеем

$$\frac{R_\lambda^0 g}{\lambda - \mu} = \frac{R_\mu^0 g}{\lambda - \mu} + R_\lambda \tilde{\varphi},$$

где $\tilde{\varphi} = R_\mu^0 g$, откуда

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) R_\lambda^0 \tilde{\varphi} e^{\lambda t} d\lambda,$$

при этом $\tilde{\varphi}(x)$ удовлетворяет условиям (5). Таким образом, $u_0(x, t)$ есть формальный ряд задачи (1)–(2) с $q_1(x) = 0$ и $\tilde{\varphi}(x) = R_\mu^0 g$ вместо $\varphi(x)$ (т.е. эталонной задачи). Согласно теореме 1 этот ряд суммируется и $u_0(x, t)$ определяется формулой (6).

Исследуем сходимост и возможность почленного дифференцирования ряда в (15). Имеем

$$\int_{\gamma_n} \frac{R_\lambda g - R_\lambda^0 g}{\lambda - \mu} e^{\lambda t} d\lambda = \frac{(g, z_n)}{(\lambda_n - \mu)(y_n, z_n)} y_n(x) e^{\lambda_n t} - \frac{(g, z_n^0)}{(\lambda_n^0 - \mu)(y_n^0, z_n^0)} y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 t}. \quad (16)$$

Лемма 8. Для любой функции $g \in L_2[0, 1]$ и ψ_{kn} , $k = 1, 2$, из теоремы 2 имеют место соотношения

$$(g(x), \psi_{kn}) = \frac{\alpha_n}{n}.$$

Доказательство. Так как $(g(x), b(x)e^{\pm \lambda_n^0 x}) = (\tilde{g}(x), e^{\pm 2\pi n i x}) = \alpha_n$, $\tilde{g}(x) \in L_2[0, 1]$, то для ψ_{1n} утверждение леммы очевидно. Далее,

$$\begin{aligned} \left(g(x), b(x) \int_0^x b(x, t) e^{\pm 2\pi n i t} dt \right) &= \int_0^1 g(x) \overline{b(x)} dx \int_0^x \overline{b(x, t)} e^{\mp 2\pi n i t} dt = \\ &= \int_0^1 e^{\mp 2\pi n i t} dt \int_t^1 \tilde{g}(x) \overline{b(x, t)} dx = \alpha_n; \end{aligned}$$

здесь $b(x)$, $b(x, t)$ — некоторые непрерывные функции, $\tilde{g}(x) \in L_2[0, 1]$. Отсюда следует утверждение леммы и для ψ_{2n} . $\square$

Лемма 9. Имеет место соотношение

$$\frac{(g, z_n)}{(\lambda_n - \mu)(y_n, z_n)} y_n(x) e^{\lambda_n t} = \frac{(g, z_n^0)}{(\lambda_n^0 - \mu)(y_n^0, z_n^0)} y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 t} + \Omega_n(x, t). \quad (17)$$

При этом при $x \in [0, 1]$ и $t \in [-A, A]$, где $A > 0$ произвольно, справедливы оценки

$$\Omega_n(x, t) = \frac{\alpha_n}{n^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \Omega_n(x, t) = \frac{\alpha_n}{n}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Omega_n(x, t) = \frac{\alpha_n}{n}. \quad (18)$$

Доказательство. Из теоремы 2 получаем (17), где

$$\begin{aligned} \Omega_n(x, t) &= (\lambda_n^0)^{-1} e^{\lambda_n^0 t} \left\{ (g, z_n) \left[\psi_{1n}(x) + \psi_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) y_n^0(x) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[(g, \psi_{1n}) + (g, \psi_{2n}) \right] y_n^0(x) \right\} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Отсюда, из леммы 8 и соотношения $(g, z_n) = \alpha_n$ следуют оценки (18). $\square$

Из (15), (16) и леммы 9 получаем следующую лемму.

Лемма 10. Ряд в (15) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и t , равномерно сходятся по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-A, A]$, где $A > 0$ произвольно.

Теорема 3. Если $q_k(x)$ — комплекснозначные функции, $q_k(x) \in C^1[0, 1]$, а функция $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ удовлетворяет условиям (3), то классическое решение задачи (1)–(2) существует и имеет вид

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t),$$

где $u_0(x, t)$ задается формулой (6) из теоремы 1 при замене φ на $\tilde{\varphi} = R_\mu^0 g$, $g = L\varphi - \mu\varphi$, $u_1(x, t)$ определена по формуле (15).

Доказательство. По теореме 1 и лемме 10 $u(x, t)$ непрерывно дифференцируема по обоим переменным. Легко проверяется, что $u(x, t)$ удовлетворяет условиям (2). Докажем, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1). Обозначим через Du следующее дифференциальное выражение

$$Du = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Тогда имеем $Du_0 = q_1(x)u_0$. Далее,

$$\begin{aligned}(R_\lambda g(x))' &= -q_1(x)R_\lambda g(1-x) - q_2(x)R_\lambda g(x) + \lambda R_\lambda g(x) + g(x), \\ (R_\lambda^0 g(x))' &= -q_2(x)R_\lambda^0 g(x) + \lambda R_\lambda^0 g(x) + g(x),\end{aligned}$$

откуда

$$Du_1 = q_1(x)u(1-x, t) + q_2(x)u_1(x, t).$$

Следовательно,

$$Du = Du_0 + Du_1 = q_1(x)u(1-x, t) + q_2(x)(u_0(x, t) + u_1(x, t)) = q_1(x)u(1-x, t) + q_2(x)u(x, t).$$

Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом// Диффер. уравн. — 2004. — 40, № 5. — С. 1126–1128.
2. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов// Уфим. мат. ж. — 2018. — 10, № 3. — С. 11–34.
3. Бурлуцкая М. Ш. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2011. — 2. — С. 64–72.
4. Бурлуцкая М. Ш. О смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — 54, № 1. — С. 3–12.
5. Бурлуцкая М. Ш. Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для системы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — 59, № 3. — С. 380–390.
6. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией// Докл. РАН. — 2010. — 435, № 2. — С. 151–154.
7. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — 51, № 12. — С. 2233–2246.
8. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Теорема Штейнгауза о равносходимости для функционально-дифференциальных операторов// Мат. заметки. — 2011. — 90, № 1. — С. 22–33.
9. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — 14, № 1. — С. 10–20.
10. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями// Докл. РАН. — 2014. — 454, № 1. — С. 15–17.
11. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2015. — 55, № 2. — С. 51–63.
12. Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией// Докл. РАН. — 2007. — 414, № 4. — С. 1309–1312.
13. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1994.
14. Хромов А. П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях// Мат. заметки. — 1998. — 64, № 6. — С. 932–949.
15. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu. Spectral analysis of a differential operator with an involution// J. Evolut. Equations. — 2017. — 17. — P. 669–684.

16. *Kritskov L. V., Sarsenbi A. M.* Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution// Differ. Equations. — 2015. — 51, № 8. — P. 984–990.

Белова Диана Владиславовна
Воронежский государственный университет
E-mail: dianabelova123@yandex.ru