Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Бердышев, А. Х. Хасанов, А. Рыскан, Краевая задача для одного класса четырехмерных вырождающихся эллиптических уравнений, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 194, 55–70

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-194-55-70>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:31:03

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 194 (2021). С. 55–70
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-194-55-70

УДК 517.956

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. А. С. БЕРДЫШЕВ, А. ХАСАНОВ, А. РЫСКАН

Аннотация. В работе изучены вопросы разрешимости задачи со смешанными условиями Неймана—Дирихле для вырождающегося четырехмерного эллиптического уравнения. Для доказательства единственности решения рассматриваемой задачи используется метод интеграла энергии. В ходе доказательства существования решения задачи используются формулы, такие как формула дифференцирования, формулы разложения, формула автотрансформации, для записи решения задачи в явном виде используется формула Гаусса—Остроградского.

Ключевые слова: вырождающееся четырехмерное эллиптическое уравнение, краевая задача с условиями Неймана—Дирихле, уравнение Геллерстедта от четырех переменных, фундаментальное решение, гипергеометрические функции Лауричелла и Гаусса.

A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF FOUR-DIMENSIONAL DEGENERATE ELLIPTIC EQUATIONS

© 2021 А. S. BERDYSHEV, A. HASANOV, A. RYSKAN

ABSTRACT. The solvability of the problem with mixed Neumann–Dirichlet conditions for a degenerate four-dimensional elliptic equation are studied. The uniqueness of a solution to the problem is proved by the method based on the energy integral.

Keywords and phrases: degenerate four-dimensional elliptic equation, boundary-value problem with Neumann–Dirichlet conditions, Gellerstedt equation in four variables, fundamental solution, Lauricella and Gauss hypergeometric functions.

AMS Subject Classification: 35J25, 35J70

1. Введение. Изучение краевых задач для вырождающихся уравнений является одним из важных направлений современной теории уравнений в частных производных. Решение многих краевых задач для уравнений в частных производных имеет прикладной характер (см. [4, 7]). Известные краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений были хорошо изучены в [2, 5, 11, 18].

Известно, что при постановке задач и в вопросах разрешимости локальных и нелокальных краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений существенно используются фундаментальные решения этих уравнений. Явный вид фундаментальных решений дает возможность правильно сформулировать постановку задачи и детально изучить различные свойства решений рассматриваемого уравнения.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP05131026).

Фундаментальные решения вырождающихся эллиптических уравнений выражаются через многомерные гипергеометрические функции Лауричелла и гипергеометрическую функцию Гаусса (одной переменной). Многие задачи естествознания, такие как задачи динамики и теплопроводности, теории электромагнитных колебаний, аэродинамики, квантовой механики, квантовой химии, теории потенциалов и т. д. приводят к изучению различных свойств многомерных гипергеометрических функций (см. [9, 10, 15, 25–28, 30]).

В [12–14] были построены в явном виде два фундаментальных решения для уравнения Трикоми на плоскости, которые в дальнейшем были использованы многими исследователями при изучении различных задач для уравнения смешанного типа (см. [6]). В [22] найдены трехмерные фундаментальные решения для модифицированного уравнения Гельмгольца и фундаментальные решения были применены для построения теории простого, двойного и объемного потенциалов (см. [19]).

Для двумерного и трехмерного эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами были построены фундаментальные решения, которые применялись при изучении разрешимости различных задач во многих работах (см. [8, 17, 21, 23, 24, 29]).

Для обобщенного уравнения Геллерстедта

$$y^m z^k t^l u_{xx} + x^n z^k t^l u_{yy} + x^n y^m t^l u_{zz} + x^n y^m z^k u_{tt} = 0, \quad m, n, k, l > 0, \quad m, n, k, l \equiv \text{const}$$

нами были построены фундаментальные решения. Установлено, что полученные фундаментальные решения обладают особенностью типа $1/r^2$, $r \rightarrow 0$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$. Так как обобщенное уравнение Геллерстедта имеет четыре гиперповерхности вырождения типа уравнения, соответственно получилось шестнадцать фундаментальных решений. Эти фундаментальные решения выражаются через гипергеометрические функции Лауричелла, каждое из которых применяется в решении соответствующих краевых задач. В решении краевой задачи со смешанными условиями, рассматриваемой в настоящей работе, используется одно из полученных фундаментальных решений.

2. Предварительные сведения. По определению, гипергеометрическая функция Гаусса имеет вид

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots,$$

где

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

— символ Похгаммера, $\Gamma(a)$ — гамма-функция Эйлера. Приведем основные свойства гамма-функции Эйлера, гипергеометрической функции Гаусса и гипергеометрической функции Лауричелла многих переменных, которые будут использоваться нами в дальнейшем.

Для гамма-функции имеет место формула удвоенного аргумента (см. [1, с. 19, (15)]):

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-1/2} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (1)$$

Гипергеометрическая функция Гаусса обладает следующим свойством [11, с. 3, (5)]:

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}, \quad \text{Re}(c-a-b) > 0. \quad (2)$$

Кроме того, для гипергеометрической функции Гаусса справедлива формула автотрансформации Больца (см. [16, с. 64, (22)]):

$$F(a, b, c; x) = (1-x)^{-b} F\left(c-a, b, c; \frac{x}{x-1}\right). \quad (3)$$

Гипергеометрическая функция Лауричелла от n переменных (см. [11, с. 114]) определяется следующим образом:

$$F_D^{(n)}(a; b_1, b_2, b_3, \dots, b_n; c; x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n} m_1! \dots m_n!} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}, \quad (4)$$

$$|x_1| < 1, |x_2| < 1, \dots, |x_n| < 1;$$

в случае, когда все переменные принимают значение 1, ее значение равно (см. [11, с. 117]):

$$F_D^{(n)}(a; b_1, b_2, b_3, \dots, b_n; c; 1, 1, \dots, 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1-b_2-\dots-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1-b_2-\dots-b_n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$\operatorname{Re}(c-a-b_1-b_2-\dots-b_n) > 0, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots$$

В случае четырех переменных гипергеометрическая функция Лауричелла $F_A^{(n)}$ записывается в виде

$$F_A^{(4)}(a; b_1, b_2, b_3, b_4; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t) = \sum_{m,n,p,q}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p+q} (b_1)_m (b_2)_n (b_3)_p (b_4)_q}{(c_1)_m (c_2)_n (c_3)_p (c_4)_q m! n! p! q!} x^m y^n z^p t^q, \quad (6)$$

$$|x| + |y| + |z| + |t| < 1$$

(см. [11, с. 114, (1)]).

Для гипергеометрической функции трех переменных в [20] была доказана справедливость следующей формулы разложения:

$$F_A^{(3)}(a, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; x, y, z) = \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} \frac{(a)_{n_1+n_2+n_3} (b_1)_{n_1+n_2} (b_2)_{n_1+n_3} (b_3)_{n_2+n_3}}{(c_1)_{n_1+n_2} (c_2)_{n_1+n_3} (c_3)_{n_2+n_3} n_1! n_2! n_3!} \times$$

$$\times x^{n_1+n_2} y^{n_1+n_3} z^{n_2+n_3} F(a+n_1+n_2, b_1+n_1+n_2; c_1+n_1+n_2; x) \times$$

$$\times F(a+n_1+n_2+n_3, b_2+n_1+n_3; c_2+n_1+n_3; y) \times$$

$$\times F(a+n_1+n_2+n_3, b_3+n_2+n_3; c_3+n_2+n_3; z). \quad (7)$$

Также будем использовать формулу дифференцирования гипергеометрических функций трех переменных (см. [11]):

$$\frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} F_A^{(3)}(\alpha; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; x, y, z) = \frac{(\alpha)_{i+j+k} (\beta_1)_i (\beta_2)_j (\beta_3)_k}{(\gamma_1)_i (\gamma_2)_j (\gamma_3)_k} \times$$

$$\times F_A^{(3)}(\alpha+i+j+k; \beta_1+i, \beta_2+j, \beta_3+k; \gamma_1+i, \gamma_2+j, \gamma_3+k; x, y, z), \quad (8)$$

где $i, j, k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Для функции Лауричелла $F_A^{(n)}$ справедливы следующие смежные соотношения:

$$\frac{b_1}{c_1} x_1 F_A(a+1; b_1+1, b_2, \dots, b_n; c_1+1, c_2, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n) +$$

$$+ \frac{b_2}{c_2} x_2 F_A(a+1; b_1, b_2+1, \dots, b_n; c_1, c_2+1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n) +$$

$$+ \dots + \frac{b_n}{c_n} x_n F_A(a+1; b_1, b_2, \dots, b_n+1; c_1, c_2, \dots, c_n+1; x_1, \dots, x_n) =$$

$$= F_A(a+1; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n) - F_A(a; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n). \quad (9)$$

Для вычисления значения многократного интеграла будем использовать следующую формулу (см. [3, с. 637, (3)]):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1}}{[1 + (r_1 x_1)^{q_1} + (r_2 x_2)^{q_2} + \dots + (r_n x_n)^{q_n}]^s} dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{q_1}\right) \Gamma\left(\frac{p_2}{q_2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \Gamma\left(s - \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} - \dots - \frac{p_n}{q_n}\right)}{q_1 q_2 \dots q_n r_1^{p_1 q_1} r_2^{p_2 q_2} \dots r_n^{p_n q_n} \Gamma(s)}, \quad (10)$$

где $p_i > 0$, $q_i > 0$, $r_i > 0$, $s > 0$, а для интегралов, выражаемых через бета-функцию, используются следующие формулы (см. [1, с. 25, (16), (19)]):

$$\int_0^\infty (1 + bt^z)^{-y} t^x dt = z^{-1} b^{-(x+1)/z} B\left(\frac{x+1}{z}, y - \frac{x+1}{z}\right), \quad z > 0, b > 0, 0 < \operatorname{Re} \frac{x+1}{z} < \operatorname{Re} y, \quad (11)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2x-1} (\cos t)^{2y-1} dt = \frac{1}{2} B(x, y), \quad \operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0. \quad (12)$$

3. Постановка задачи. Рассмотрим обобщенное уравнение Геллерстедта

$$H(u) = y^m z^k t^l u_{xx} + x^n z^k t^l u_{yy} + x^n y^m t^l u_{zz} + x^n y^m z^k u_{tt} = 0, \quad (13)$$

$$m, n, k, l > 0, \quad m, n, k, l \equiv \text{const}.$$

Введем следующие обозначения:

$$D = \{(x, y, z, t) : x > 0, y > 0, z > 0, t > 0\},$$

$$S_1 = \{(0, y, z, t) : x = 0, y > 0, z > 0, t > 0\},$$

$$S_2 = \{(x, 0, z, t) : x > 0, y = 0, z > 0, t > 0\},$$

$$S_3 = \{(x, y, 0, t) : x > 0, y > 0, z = 0, t > 0\},$$

$$S_4 = \{(x, y, z, 0) : x > 0, y > 0, z > 0, t = 0\},$$

$$R^2 = \frac{4}{(n+2)^2} x^{n+2} + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} + \frac{4}{(k+2)^2} z^{k+2} + \frac{4}{(l+2)^2} t^{l+2}.$$

Задача 1 (ND_1). Найти регулярное решение $u(x, y, z, t)$ уравнения (13) из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \overline{S_4}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x, y, z, t)|_{x=0} = \tau_1(y, z, t), \quad (y, z, t) \in \overline{S_1}, \quad (14)$$

$$u(x, y, z, t)|_{y=0} = \tau_2(x, z, t), \quad (x, z, t) \in \overline{S_2}, \quad (15)$$

$$u(x, y, z, t)|_{z=0} = \tau_3(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \overline{S_3}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = \nu_4(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S_4, \quad (17)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y, z, t) = 0, \quad (18)$$

где $\tau_1(y, z, t), \tau_2(x, z, t), \tau_3(x, y, t), \nu_4(x, y, z)$ — заданные непрерывные комплекснозначные функции, причем $\nu_4(x, y, z)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше, чем $1 - 2\delta$, а при достаточно больших значениях R выполняются неравенства

$$|\tau_1(y, z, t)| \leq \frac{c_1}{\left[1 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} + \frac{4}{(k+2)^2} z^{k+2} + \frac{4}{(l+2)^2} t^{l+2}\right]^{\varepsilon_1}}, \quad (19)$$

$$|\tau_2(x, z, t)| \leq \frac{c_2}{\left[1 + \frac{4}{(n+2)^2} x^{n+2} + \frac{4}{(k+2)^2} z^{k+2} + \frac{4}{(l+2)^2} t^{l+2}\right]^{\varepsilon_2}}, \quad (20)$$

$$|\tau_3(x, y, t)| \leq \frac{c_3}{\left[1 + \frac{4}{(n+2)^2} x^{n+2} + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} + \frac{4}{(l+2)^2} t^{l+2}\right]^{\varepsilon_3}}, \quad (21)$$

$$|\nu_4(x, y, z)| \leq \frac{c_4}{\left[1 + \frac{4}{(n+2)^2}x^{n+2} + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2} + \frac{4}{(k+2)^2}z^{k+2}\right]^{(1-2\delta+\varepsilon_4)/2}}, \quad (22)$$

здесь $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ — достаточно малые положительные числа.

Теорема 1. *Задача 1 имеет не более одного решения.*

Доказательство. Рассуждаем от противного. Пусть существуют два решения u_1 и u_2 задачи 1. Рассмотрим разность $u = u_1 - u_2$. Ясно, что функция u удовлетворяет уравнению (13), однородным граничным условиям (14)–(17) и условию (18).

Через D_R обозначим ограниченную область с границей $\partial D_R = S_{1R} \cup S_{2R} \cup S_{3R} \cup S_{4R} \cup \sigma_R$, где

$$S_{1R} = S_1 \cap \{x = 0, 0 < y < R, 0 < z < R, 0 < t < R\},$$

$$S_{2R} = S_2 \cap \{0 < x < R, y = 0, 0 < z < R, 0 < t < R\},$$

$$S_{3R} = S_3 \cap \{0 < x < R, 0 < y < R, z = 0, 0 < t < R\},$$

$$S_{4R} = S_4 \cap \{0 < x < R, 0 < y < R, 0 < z < R, t = 0\},$$

$$\sigma_R = \left\{ (x, y, z, t) : \frac{4}{(n+2)^2}x^{n+2} + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2} + \frac{4}{(k+2)^2}z^{k+2} + \frac{4}{(l+2)^2}t^{l+2} = R^2, \right. \\ \left. x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0 \right\}.$$

Выбирая R достаточно большим, проинтегрируем уравнение (13) по области D_R , предварительно умножив его на функцию $u(x, y, z, t)$:

$$\iiint_{D_R} \left[y^m z^k t^l u u_{xx} + x^n z^k t^l u u_{yy} + x^n y^m t^l u u_{zz} + x^n y^m z^k u u_{tt} \right] dx dy dz dt = 0. \quad (23)$$

С учетом в (23) равенств

$$y^m z^k t^l u u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (y^m z^k t^l u u_x) - y^m z^k t^l u_x^2, \quad x^n z^k t^l u u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (x^n z^k t^l u u_y) - x^n z^k t^l u_y^2, \\ x^n y^m t^l u u_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} (x^n y^m t^l u u_z) - x^n y^m t^l u_z^2, \quad x^n y^m z^k u u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} (x^n y^m z^k u u_t) - x^n y^m z^k u_t^2,$$

после применения формулы Гаусса—Остроградского имеем

$$\iiint_{D_R} \left[y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right] dx dy dz dt = \\ = \iint_{S_{1R}} y^m z^k t^l \tau_1 u_x dy dz dt + \iint_{S_{2R}} x^n z^k t^l \tau_2 u_y dx dz dt + \iint_{S_{3R}} x^n y^m t^l \tau_3 u_z dx dy dt + \\ + \iint_{S_{4R}} x^n y^m z^k u \nu_4 dx dy dz + \iint_{\sigma_R} x^n y^m z^k t^l u \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (24)$$

где n — внешняя нормаль к ∂D_R ,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) + u_z \cos(n, z) + u_t \cos(n, t),$$

$$\cos(n, x) dS = dy dz dt, \quad \cos(n, y) dS = dx dz dt, \quad \cos(n, z) dS = dx dy dt, \quad \cos(n, t) dS = dx dy dz.$$

Так как для функции u имеем $\tau_1 = 0, \tau_2 = 0, \tau_3 = 0, \nu_4 = 0$, из (24) находим

$$\iiint_{D_R} \left[y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right] dx dy dz dt = \iint_{\sigma_R} x^n y^m z^k t^l u \frac{\partial u}{\partial n} dS. \quad (25)$$

В силу условия (18) при $R \rightarrow \infty$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iiint_{\sigma_R} x^n y^m z^k t^l u \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

так что из (25) получаем

$$\iiint_D \left[y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right] dx dy dz dt \equiv 0. \quad (26)$$

Из (26) получаем $u_x = u_y = u_z = u_t = 0$, что означает $u = \text{const}$, а из условий $u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{z=0} = u|_{t=0} = 0$ следует, что $u \equiv 0$. Итак, мы доказали единственность решения задачи 1.

Существование решения задачи 1. Решение задачи 1 имеет вид

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0, t_0) = & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty y^m z^k t^l \tau_1(y, z, t) \frac{\partial}{\partial x} g_{12}(x, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) \Big|_{x=0} dy dz dt + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^n z^k t^l \tau_2(x, z, t) \frac{\partial}{\partial y} g_{12}(x, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) \Big|_{y=0} dx dz dt + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^n y^m t^l \tau_3(x, y, t) \frac{\partial}{\partial z} g_{12}(x, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) \Big|_{z=0} dx dy dt - \\ & - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^n y^m z^k \nu_4(x, y, z) g_{12}(x, y, z, 0; x_0, y_0, z_0, t_0) dx dy dz, \quad (27) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_{12}(x, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) = & k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} (r^2)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-4} x y z x_0 y_0 z_0 \times \\ & \times F_A^{(4)}(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta; 1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma, \delta; 2-2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma, 2\delta; \xi, \eta, \zeta, \varsigma) \end{aligned}$$

— одно из фундаментальных решений уравнения (13). Здесь

$$\begin{aligned} k_{12} = & \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{2\alpha} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{2\gamma} \left(\frac{4}{l+2} \right)^{2\delta} \times \\ & \times \frac{\Gamma(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma} (2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(2\delta), \quad (28) \\ \xi = & \frac{r^2 - r_1^2}{r^2}, \quad \eta = \frac{r^2 - r_2^2}{r^2}, \quad \zeta = \frac{r^2 - r_3^2}{r^2}, \quad \varsigma = \frac{r^2 - r_4^2}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r^2 \\ r_1^2 \\ r_2^2 \\ r_3^2 \\ r_4^2 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} \left(\frac{2}{n+2} x^{\frac{n+2}{2}} - \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} \right)^2 + \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix} \left(\frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} \right)^2 + \\ & + \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix} \left(\frac{2}{k+2} z^{\frac{k+2}{2}} - \frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} \right)^2 + \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix} \left(\frac{2}{l+2} t^{\frac{l+2}{2}} - \frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{n}{2(n+2)}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)}, \quad \gamma = \frac{k}{2(k+2)}, \quad \delta = \frac{l}{2(l+2)}.$$

Так как функция q_{12} является фундаментальным решением уравнения (13), то очевидно, что решение задачи (27) удовлетворяет уравнению (13).

Докажем, что функция (27) удовлетворяет условиям (14)–(17) задачи CD_1 . Представим (27) в следующем виде:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = I_1(x_0, y_0, z_0, t_0) + I_2(x_0, y_0, z_0, t_0) + I_3(x_0, y_0, z_0, t_0) + I_4(x_0, y_0, z_0, t_0), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(x_0, y_0, z_0, t_0) &= k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} x_0 y_0 z_0 \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty y^{m+1} z^{k+1} t^l \tau_1(y, z, t) (r^2)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-4} \times \\ &\quad \times F_A^{(3)} \left(4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 1 - \beta, 1 - \gamma, \delta; 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma, 2\delta; \eta, \zeta, \varsigma \right) \Big|_{x=0} dy dz dt, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2(x_0, y_0, z_0, t_0) &= k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} x_0 y_0 z_0 \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^{n+1} z^{k+1} t^l \tau_2(x, z, t) (r^2)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-4} \times \\ &\quad \times F_A^{(3)} \left(4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 1 - \alpha, 1 - \gamma, \delta; 2 - 2\alpha, 2 - 2\gamma, 2\delta; \xi, \zeta, \varsigma \right) \Big|_{y=0} dx dz dt, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3(x_0, y_0, z_0, t_0) &= k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} x_0 y_0 z_0 \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^{n+1} y^{m+1} t^l \tau_3(x, y, t) (r^2)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-4} \times \\ &\quad \times F_A^{(3)} \left(4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 1 - \alpha, 1 - \beta, \delta; 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 2\delta; \xi, \eta, \varsigma \right) \Big|_{z=0} dx dy dt, \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4(x_0, y_0, z_0, t_0) &= -k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} x_0 y_0 z_0 \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^{n+1} y^{m+1} z^{k+1} \nu_4(x, y, z) (r^2)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-4} \times \\ &\quad \times F_A^{(3)} \left(4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma; 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta \right) \Big|_{t=0} dx dy dz. \quad (33) \end{aligned}$$

Проверим условие (14). Рассмотрим первое слагаемое решения, записанное в виде (29), функцию (30). Разложим в (30) функцию $F_A^{(3)}$ по формуле (7), затем, проведя в (30) некоторые преобразования и применяя формулу автотрансформации Больца (3), получим следующее

$$\begin{aligned} F_A^{(3)} \left(4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 1 - \beta, 1 - \gamma, \delta; 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma, 2\delta; \eta, \zeta, \varsigma \right) &= \\ &= (r^2)^{2-\beta-\gamma+\delta} (r_2^2)^{\beta-1} (r_3^2)^{\gamma-1} (r_4^2)^{-\delta} P_1(0, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0), \quad (34) \end{aligned}$$

где

$$P_1(0, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l_1, l_2, l_3=0}^{\infty} \frac{(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta)_{l_1+l_2+l_3} (1-\beta)_{l_1+l_2} (1-\gamma)_{l_1+l_3} (\delta)_{l_2+l_3}}{(2-2\beta)_{l_1+l_2} (2-2\gamma)_{l_1+l_3} (2\delta)_{l_2+l_3} l_1! l_2! l_3!} \times \\
&\quad \times \left(\frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2} \right)^{l_1+l_2} \left(\frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2} \right)^{l_1+l_3} \left(\frac{r_4^2 - r^2}{r_4^2} \right)^{l_2+l_3} \times \\
&\quad \times F \left(\alpha - \beta + \gamma - \delta - 2, 1 - \beta + l_1 + l_2; 2 - 2\beta + l_1 + l_2; \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2} \right) \times \\
&\quad \times F \left(\alpha + \beta - \gamma - \delta - 2 - l_2, 1 - \gamma + l_1 + l_3; 2 - 2\gamma + l_1 + l_3; \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2} \right) \times \\
&\quad \times F \left(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 4 - l_1, \delta + l_2 + l_3; 2\delta + l_2 + l_3; \frac{r_4^2 - r^2}{r_4^2} \right). \quad (35)
\end{aligned}$$

Таким образом, подставляя (34) в (33), находим

$$\begin{aligned}
I_1(x_0, y_0, z_0, t_0) &= k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} x_0 y_0 z_0 \times \\
&\quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty y^{m+1} z^{k+1} t^l \tau_1(y, z, t) \frac{P_1(0, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0)}{(r^2)^{2-\alpha} (r_2^2)^{1-\beta} (r_3^2)^{1-\gamma} (r_4^2)^\delta} \Big|_{x=0}^\delta dy dz dt. \quad (36)
\end{aligned}$$

Сделаем в (36) замену переменных

$$\begin{aligned}
\frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} &= \frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1, \\
\frac{2}{k+2} z^{\frac{k+2}{2}} &= \frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2, \\
\frac{2}{l+2} t^{\frac{l+2}{2}} &= \frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3,
\end{aligned}$$

получаем следующее:

$$\begin{aligned}
I_1(x_0, y_0, z_0, t_0) &= k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} \left(\frac{2}{n+2} \right)^{-\frac{2}{n+2}} y_0 z_0 \\
&\quad \times \int_{-a}^\infty \int_{-b}^\infty \int_{-c}^\infty \left\{ \left[\frac{m+2}{2} \left(\frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1 \right) \right]^{\frac{2}{m+2}} \right\}^{m+1} \times \\
&\quad \times \left\{ \left[\frac{k+2}{2} \left(\frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2 \right) \right]^{\frac{2}{k+2}} \right\}^{k+1} \left\{ \left[\frac{l+2}{2} \left(\frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3 \right) \right]^{\frac{2}{l+2}} \right\}^l \\
&\quad \times \frac{P_1(0, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0)}{(1+s_1^2+s_2^2+s_3^2)^{2-\alpha} (r_2^2)^{1-\beta} (r_3^2)^{1-\gamma} (r_4^2)^\delta} \Big|_{x=0}^\delta \\
&\quad \tau_1 \left(\left[\frac{m+2}{2} \left(\frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1 \right) \right]^{\frac{2}{m+2}}, \left[\frac{k+2}{2} \left(\frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2 \right) \right]^{\frac{2}{k+2}}, \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{l+2}{2} \left(\frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3 \right) \right]^{\frac{2}{l+2}} \right) \\
&\quad \times \left[\frac{m+2}{2} \left(\frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1 \right) \right]^{-\frac{m}{m+2}} \left[\frac{k+2}{2} \left(\frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2 \right) \right]^{-\frac{k}{k+2}} \\
&\quad \left[\frac{l+2}{2} \left(\frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3 \right) \right]^{-\frac{l}{l+2}} ds_1 ds_2 ds_3, \quad (37)
\end{aligned}$$

где

$$a = \frac{\frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}}}, \quad b = \frac{\frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}}}, \quad c = \frac{\frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}}}{\frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}}}.$$

При $x_0 \rightarrow 0$ из (35) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \rightarrow 0} P_1(0, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) = \\ = \sum_{l_1, l_2, l_3=0}^{\infty} \frac{(4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta)_{l_1+l_2+l_3} (1 - \beta)_{l_1+l_2} (1 - \gamma)_{l_1+l_3} (\delta)_{l_2+l_3}}{(2 - 2\beta)_{l_1+l_2} (2 - 2\gamma)_{l_1+l_3} (2\delta)_{l_2+l_3} l_1! l_2! l_3!} \times \\ \times F(\alpha - \beta + \gamma - \delta - 2, 1 - \beta + l_1 + l_2; 2 - 2\beta + l_1 + l_2; 1) \times \\ \times F(\alpha + \beta - \gamma - \delta - 2 - l_2, 1 - \gamma + l_1 + l_3; 2 - 2\gamma + l_1 + l_3; 1) \times \\ \times F(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 4 - l_1, \delta + l_2 + l_3; 2\delta + l_2 + l_3; 1). \end{aligned} \quad (38)$$

Применяя формулы (2) и (5) к (38), находим

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} P_1(0, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{\Gamma(2 - 2\beta)\Gamma(2 - 2\gamma)\Gamma(2\delta)\Gamma(2 - \alpha)}{\Gamma(4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta)\Gamma(1 - \beta)\Gamma(1 - \gamma)\Gamma(\delta)}. \quad (39)$$

В силу (39) из (37) при $x_0 \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \rightarrow 0} I_1(x_0, y_0, z_0, t_0) = k_{12} \left(\frac{8}{n+2} \right)^{\frac{2}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{-2\beta} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{-2\gamma} \left(\frac{4}{l+2} \right)^{-2\delta} \times \\ \times \frac{\Gamma(2 - 2\beta)\Gamma(2 - 2\gamma)\Gamma(2\delta)\Gamma(2 - \alpha)}{\Gamma(4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta)\Gamma(1 - \beta)\Gamma(1 - \gamma)\Gamma(\delta)} \tau_1(y_0, z_0, t_0) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{2-\alpha}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Для вычисления тройного интеграла из (40), применяя формулу (10), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{2-\alpha}} = 8 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{2-\alpha}} = \frac{\pi \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} - \alpha)}{\Gamma(2 - \alpha)}. \quad (41)$$

Применяя в (41) формулу (1), в итоге имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{2-\alpha}} = \frac{\pi^2 \Gamma(2 - 2\alpha)}{2^{-2\alpha} \Gamma(2 - \alpha) (1 - 2\alpha) \Gamma(1 - \alpha)}. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (40), окончательно имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \rightarrow 0} I_1(x_0, y_0, z_0, t_0) = 4\pi^2 k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{-2\alpha} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{-2\beta} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{-2\gamma} \left(\frac{4}{l+2} \right)^{-2\delta} \times \\ \times \frac{\Gamma(2 - 2\alpha)\Gamma(2 - 2\beta)\Gamma(2 - 2\gamma)\Gamma(2\delta)}{\Gamma(4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta)\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)\Gamma(1 - \gamma)\Gamma(\delta)} \tau_1(y_0, z_0, t_0). \end{aligned} \quad (43)$$

С учетом (28) из (43) получаем

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} I_1(x_0, y_0, z_0, t_0) = \tau_1(y_0, z_0, t_0).$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} I_2(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0, \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} I_3(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0, \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} I_4(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \tau_1(y_0, z_0, t_0),$$

значит, функция (29) удовлетворяет условию (14) задачи 1.

Покажем, что функция (29) удовлетворяет условию (17) задачи 1. Вычислим производную по t_0 от функции (29):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} u(x_0, y_0, z_0, t_0) &= \frac{\partial}{\partial t_0} I_1(x_0, y_0, z_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial t_0} I_2(x_0, y_0, z_0, t_0) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t_0} I_3(x_0, y_0, z_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial t_0} I_4(x_0, y_0, z_0, t_0). \end{aligned} \quad (44)$$

Используя формулу дифференцирования (8), вычислим $\frac{\partial}{\partial t_0} I_4(x_0, y_0, z_0, t_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} I_4(x_0, y_0, z_0, t_0) &= k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} \left(\frac{4}{l+2} \right)^{\frac{4}{l+2}} x_0 y_0 z_0 t_0^{l+1} \times \\ &\times (4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^{n+1} y^{m+1} z^{k+1} \nu_4(x, y, z) (r^2)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-5} \times \\ &\times \frac{(1-\alpha)}{(2-2\alpha)} F_A^{(3)} \left(5 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 2 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma; 3 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta \right) \xi + \\ &+ k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} \left(\frac{4}{l+2} \right)^{\frac{4}{l+2}} x_0 y_0 z_0 t_0^{l+1} \times \\ &\times (4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^{n+1} y^{m+1} z^{k+1} \nu_4(x, y, z) (r^2)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-5} \times \\ &\times \frac{(1-\beta)}{(2-2\beta)} F_A^{(3)} \left(5 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 1 - \alpha, 2 - \beta, 1 - \gamma; 2 - 2\alpha, 3 - 2\beta, 2 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta \right) \eta + \\ &+ k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} \left(\frac{4}{l+2} \right)^{\frac{4}{l+2}} x_0 y_0 z_0 t_0^{l+1} \times \\ &\times (4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^{n+1} y^{m+1} z^{k+1} \nu_4(x, y, z) (r^2)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-5} \times \\ &\times \frac{(1-\gamma)}{(2-2\gamma)} F_A^{(3)} \left(5 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - \gamma; 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 3 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta \right) \zeta + \\ &+ k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} \left(\frac{4}{l+2} \right)^{\frac{4}{l+2}} x_0 y_0 z_0 t_0^{l+1} \times \\ &\times (4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^{n+1} y^{m+1} z^{k+1} \nu_4(x, y, z) (r^2)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-5} \times \\ &\times F_A^{(3)} \left(4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma; 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Применяя смежные соотношения (9), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t_0} I_4(x_0, y_0, z_0, t_0) = k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} \left(\frac{4}{l+2} \right)^{\frac{4}{l+2}} x_0 y_0 z_0 t_0^{l+1} \times$$

$$\begin{aligned} & \times (4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^{n+1} y^{m+1} z^{k+1} \nu_4(x, y, z) (r^2)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-5} \times \\ & \times F_A^{(3)} \left(5 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma; 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta \right) \Big|_{t=0} dx dy dz. \quad (45) \end{aligned}$$

Разложим функцию $F_A^{(3)}$ по формуле (7); тогда

$$\begin{aligned} & F_A^{(3)} \left(5 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma; 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta \right) = \\ & = \sum_{l_1, l_2, l_3=0}^{\infty} \frac{(5 - \alpha - \beta - \gamma + \delta)_{l_1+l_2+l_3} (1 - \alpha)_{l_1+l_2} (1 - \beta)_{l_1+l_3} (1 - \gamma)_{l_2+l_3}}{(2 - 2\alpha)_{l_1+l_2} (2 - 2\beta)_{l_1+l_3} (2 - 2\gamma)_{l_2+l_3} l_1! l_2! l_3!} \xi^{l_1+l_2} \eta^{l_1+l_3} z^{l_2+l_3} \\ & \times F \left(5 - \alpha - \beta - \gamma + \delta + l_1 + l_2, 1 - \alpha + l_1 + l_2; 2 - 2\alpha + l_1 + l_2; \xi \right) \\ & \times F \left(5 - \alpha - \beta - \gamma + \delta + l_1 + l_2 + l_3, 1 - \beta + l_1 + l_3; 2 - 2\beta + l_1 + l_3; \eta \right) \\ & \times F \left(5 - \alpha - \beta - \gamma + \delta + l_1 + l_2 + l_3, 1 - \gamma + l_2 + l_3; 2 - 2\gamma + l_2 + l_3; \zeta \right). \end{aligned}$$

Используя формулу автотрансформации Больца (3), получим

$$\begin{aligned} & F_A^{(3)} \left(5 - \alpha - \beta - \gamma + \delta; 1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma; 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma; \xi, \eta, \zeta \right) = \\ & = (r^2)^{3-\alpha-\beta-\gamma} (r_1^2)^{-1+\alpha} (r_2^2)^{-1+\beta} (r_3^2)^{-1+\gamma} P_1(x, y, z, 0; x_0, y_0, z_0, t_0), \quad (46) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & P_1(x, y, z, 0; x_0, y_0, z_0, t_0) = \\ & = \sum_{l_1, l_2, l_3=0}^{\infty} \frac{(5 - \alpha - \beta - \gamma + \delta)_{l_1+l_2+l_3} (1 - \alpha)_{l_1+l_2} (1 - \beta)_{l_1+l_3} (1 - \gamma)_{l_2+l_3}}{(2 - 2\alpha)_{l_1+l_2} (2 - 2\beta)_{l_1+l_3} (2 - 2\gamma)_{l_2+l_3} l_1! l_2! l_3!} \times \\ & \times \left(\frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2} \right)^{l_1+l_2} \left(\frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2} \right)^{l_1+l_3} \left(\frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2} \right)^{l_2+l_3} \times \\ & \times F \left(-\alpha + \beta + \gamma - \delta - 3, 1 - \alpha + l_1 + l_2; 2 - 2\alpha + l_1 + l_2; \frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2} \right) \times \\ & \times F \left(\alpha - \beta + \gamma - \delta - 3 - l_2, 1 - \beta + l_1 + l_3; 2 - 2\beta + l_1 + l_3; \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2} \right) \times \\ & \times F \left(\alpha + \beta - \gamma - \delta - 3 - l_1, 1 - \gamma + l_2 + l_3; 2 - 2\gamma + l_2 + l_3; \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2} \right). \quad (47) \end{aligned}$$

Подставляя (46) в (45), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_0} I_4(x_0, y_0, z_0, t_0) = k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{\frac{4}{n+2}} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{4}{m+2}} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{\frac{4}{k+2}} \left(\frac{4}{l+2} \right) x_0 y_0 z_0 t_0^{l+1} \times \\ & \times (4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x^{n+1} y^{m+1} z^{k+1} \nu_4(x, y, z) \frac{P_1(x, y, z, 0; x_0, y_0, z_0, t_0)}{(r^2)^{\delta+2} (r_1^2)^{1-\alpha} (r_2^2)^{1-\beta} (r_3^2)^{1-\gamma}} \Big|_{t=0} dx dy dz. \quad (48) \end{aligned}$$

Осуществив замену переменных в (48)

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n+2} x^{\frac{n+2}{2}} = \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} + \frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} s_1, \\ & \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = \frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} s_2, \end{aligned}$$

$$\frac{2}{k+2} z^{\frac{k+2}{2}} = \frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} s_3,$$

и перейдя к пределу при $t_0 \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t_0} I_4(x_0, y_0, z_0, t_0) &= 2k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{-2\alpha} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{-2\beta} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{-2\gamma} \left(\frac{2}{l+2} \right)^{-2\delta} \nu_4(x_0, y_0, z_0) \times \\ &\times (4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_1(x, y, z, 0; x_0, y_0, z_0, 0) ds_1 ds_2 ds_3}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{\delta+2}}. \end{aligned} \quad (49)$$

Используя формулы (2) и (5), нетрудно вычислить $P_1(x, y, z, 0; x_0, y_0, z_0, 0)$ из (47):

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} P_1(x, y, z, 0; x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(2+\delta)}{\Gamma(5-\alpha-\beta-\gamma+\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)}. \quad (50)$$

Подставляя (50) в (19), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t_0} I_4(x_0, y_0, z_0, t_0) &= 2k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{-2\alpha} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{-2\beta} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{-2\gamma} \left(\frac{2}{l+2} \right)^{-2\delta} \times \\ &\times (4 - \alpha - \beta - \gamma + \delta) \frac{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(2+\delta)}{\Gamma(5-\alpha-\beta-\gamma+\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)} \times \\ &\times \nu_4(x_0, y_0, z_0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{\delta+2}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Применив формулу (10), легко вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{\delta+2}} = \frac{1}{8} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{\delta+2}} = \frac{\pi \sqrt{\pi} \Gamma(\delta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\delta + 2)}. \quad (52)$$

Используя формулу (1), преобразуем (52) к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{\delta+2}} = \frac{\pi^2 \Gamma(2\delta)}{2^{2\delta-1} \Gamma(\delta+2) \Gamma(\delta)}. \quad (53)$$

В силу значения тройного интеграла (53), из (51) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t_0} I_4(x_0, y_0, z_0, t_0) &= 4\pi^2 k_{12} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{-2\alpha} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{-2\beta} \left(\frac{4}{k+2} \right)^{-2\gamma} \left(\frac{4}{l+2} \right)^{-2\delta} \times \\ &\times \frac{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(2\delta)}{\Gamma(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\delta)} \nu_4(x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (54)$$

Учитывая значение k_{12} (28), из (54) определяем

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t_0} I_4(x_0, y_0, z_0, t_0) = \nu_4(x_0, y_0, z_0).$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t_0} I_1(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0, \quad \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t_0} I_2(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0, \quad \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t_0} I_3(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0.$$

Таким образом, из (44) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t_0} u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \nu_4(x_0, y_0, z_0);$$

следовательно, функция (29) удовлетворяет условию (17) задачи 1. Аналогично можно убедиться в том, что функция (19) удовлетворяет и условиям (15), (16) задачи 1.

Покажем, что если заданные функции при достаточно больших значениях аргумента удовлетворяют неравенствам (19)–(22), то решение (29) задачи 1 также удовлетворяет условию (18). Действительно, пусть справедливы неравенства (19)–(22), в выражениях (30)–(33) сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{R_0} \frac{2}{n+2} x^{\frac{n+2}{2}}, & \eta_1 &= \frac{1}{R_0} \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}, & \zeta_1 &= \frac{1}{R_0} \frac{2}{k+2} z^{\frac{k+2}{2}}, & \varsigma_1 &= \frac{1}{R_0} \frac{2}{l+2} t^{\frac{l+2}{2}}, \\ \sigma_1 &= \frac{1}{R_0} \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}}, & \sigma_2 &= \frac{1}{R_0} \frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}}, & \sigma_3 &= \frac{1}{R_0} \frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}}, & \sigma_4 &= \frac{1}{R_0} \frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}},\end{aligned}$$

где

$$R_0^2 = \frac{4}{(n+2)^2} x_0^{n+2} + \frac{4}{(m+2)^2} y_0^{m+2} + \frac{4}{(k+2)^2} z_0^{k+2} + \frac{4}{(l+2)^2} t_0^{l+2}.$$

Тогда при $R_0 \rightarrow 0$ из (30)–(33) получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned}|I_1(x_0, y_0, z_0, t_0)| &\leq k_{12} c_1 4^{\frac{2}{n+2} + \frac{2}{m+2} + \frac{2}{k+2}} \left(\frac{2}{n+2}\right)^{1-2\alpha} \left(\frac{2}{m+2}\right)^{-2\beta} \left(\frac{2}{k+2}\right)^{-2\gamma} \left(\frac{2}{l+2}\right)^{-2\delta} \times \\ &\times \sigma_1^{\frac{2}{n+2}} \sigma_2^{\frac{2}{m+2}} \sigma_3^{\frac{2}{k+2}} R_0^{-2\varepsilon_1} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\eta_1 \zeta_1 \varsigma_1^{\frac{l}{l+2}} d\eta_1 d\zeta_1 d\varsigma_1}{(1 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + \varsigma_1^2)^{4-\alpha-\beta-\gamma+\delta} (\eta_1^2 + \zeta_1^2 + \varsigma_1^2)^{\varepsilon_1}} \quad (55)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|I_2(x_0, y_0, z_0, t_0)| &\leq k_{12} c_2 4^{\frac{2}{n+2} + \frac{2}{m+2} + \frac{2}{k+2}} \left(\frac{2}{n+2}\right)^{-2\alpha} \left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{2}{k+2}\right)^{-2\gamma} \left(\frac{2}{l+2}\right)^{-2\delta} \times \\ &\times \sigma_1^{\frac{2}{n+2}} \sigma_2^{\frac{2}{m+2}} \sigma_3^{\frac{2}{k+2}} (R_0)^{-2\varepsilon_2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\xi_1 \zeta_1 \varsigma_1^{\frac{l}{l+2}} d\xi_1 d\zeta_1 d\varsigma_1}{(1 + \xi_1^2 + \zeta_1^2 + \varsigma_1^2)^{4-\alpha-\beta-\gamma+\delta} (\xi_1^2 + \zeta_1^2 + \varsigma_1^2)^{\varepsilon_2}}, \quad (56)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|I_3(x_0, y_0, z_0, t_0)| &\leq k_{123} 4^{\frac{2}{n+2} + \frac{2}{m+2} + \frac{2}{k+2}} \left(\frac{2}{n+2}\right)^{-2\alpha} \left(\frac{2}{m+2}\right)^{-2\beta} \left(\frac{2}{k+2}\right)^{1-2\gamma} \left(\frac{2}{l+2}\right)^{-2\delta} \times \\ &\times \sigma_1^{\frac{2}{n+2}} \sigma_2^{\frac{2}{m+2}} \sigma_3^{\frac{2}{k+2}} R_0^{-2\varepsilon_3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\xi_1 \eta_1 \varsigma_1^{\frac{l}{l+2}} d\xi_1 d\eta_1 d\varsigma_1}{(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \varsigma_1^2)^{4-\alpha-\beta-\gamma+\delta} (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \varsigma_1^2)^{\varepsilon_3}}, \quad (57)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|I_4(x_0, y_0, z_0, t_0)| &\leq k_{124} 4^{\frac{2}{n+2} + \frac{2}{m+2} + \frac{2}{k+2}} \left(\frac{2}{n+2}\right)^{-2\alpha} \left(\frac{2}{m+2}\right)^{-2\beta} \left(\frac{2}{k+2}\right)^{-2\gamma} \times \\ &\times \sigma_1^{\frac{2}{n+2}} \sigma_2^{\frac{2}{m+2}} \sigma_3^{\frac{2}{k+2}} R_0^{-\varepsilon_4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\xi_1 \eta_1 \zeta_1 d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1}{(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)^{4-\alpha-\beta-\gamma+\delta} (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)^{\frac{1-2\delta+\varepsilon_4}{2}}}. \quad (58)\end{aligned}$$

Покажем, что тройные интегралы, входящие в неравенства (55)–(58), ограничены. Для $a + b + c - 3/2 < \varepsilon < 5/2 + d$ справедливо тождество

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{xyz \, dx \, dy \, dz}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^{-(a+b+c-d-4)} (x^2 + y^2 + z^2)^\varepsilon} = \\ = \frac{1}{8} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + d) \Gamma(\frac{5}{2} + d - \varepsilon) \Gamma(\frac{3}{2} - a - b - c + \varepsilon)}{\Gamma(\frac{5}{2} + d) \Gamma(4 - a - b - c + d)}. \quad (59)\end{aligned}$$

Действительно, перейдя в интеграле (59) к сферическим координатам, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{xyz \, dx \, dy \, dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{-(a+b+c-d-4)}(x^2+y^2+z^2)^\varepsilon} = \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^{\frac{l}{l+2}} \theta d\theta \int_0^\infty (1+r^2)^{-(4-a-b-c+d)} r^{4+2d-2\varepsilon} dr. \end{aligned} \quad (60)$$

Используя значения интегралов (11) и (12) в выражении (60), получаем тождество (59):

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^{\frac{l}{l+2}} \theta d\theta \int_0^\infty (1+r^2)^{-(4-a-b-c+d)} r^{4+2d-2\varepsilon} dr = \\ = \frac{1}{8} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+d)}{\Gamma(\frac{5}{2}+d)} \frac{\Gamma(\frac{5}{2}+d-\varepsilon)}{\Gamma(4-a-b-c+d)} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-a-b-c+\varepsilon)}{\Gamma(4-a-b-c+d)}, \end{aligned}$$

где $\alpha + \beta + \gamma - 3/2 < \varepsilon < 5/2 + \delta$.

Таким образом, из неравенств (55)–(57) в силу значения интеграла (59) следуют неравенства

$$|I_1(x_0, y_0, z_0, t_0)| \leq \frac{k_{12}\overline{c_1}}{R_0^{2\varepsilon_1}}, \quad |I_2(x_0, y_0, z_0, t_0)| \leq \frac{k_{12}\overline{c_2}}{R_0^{2\varepsilon_2}}, \quad |I_3(x_0, y_0, z_0, t_0)| \leq \frac{k_{12}\overline{c_3}}{R_0^{2\varepsilon_3}}, \quad (61)$$

где $\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}$ — постоянные.

Покажем, что интеграл, входящий в (58), ограничен. Для этого перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\xi_1 \eta_1 \zeta_1 d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1}{(1+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)^{4-\alpha-\beta-\gamma+\delta}(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{1-2\delta+\varepsilon_4}{2}}} = \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \int_0^\infty (1+r^2)^{-(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta)} r^{(2\delta-1-\varepsilon_4)} dr. \end{aligned} \quad (62)$$

Применяя формулы (11) и (12) к правой части (62), определяем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \int_0^\infty (1+r^2)^{-(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta)} r^{(2\delta-1-\varepsilon_4)} dr = \\ = \frac{1}{16} \frac{\Gamma(\delta - \frac{\varepsilon_4}{2}) \Gamma(4-\alpha-\beta-\gamma + \frac{\varepsilon_4}{2})}{\Gamma(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta)} \end{aligned}$$

при $2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 8 < \varepsilon_4 < 2\delta$.

Таким образом, мы показали, что интеграл в неравенстве (58) ограничен, значит справедливо неравенство

$$|I_4(x_0, y_0, z_0, t_0)| \leq \frac{k_{12}\overline{c_4}}{R_0^{\varepsilon_4}}. \quad (63)$$

Неравенства (61) и (63) показывают, что решение (27) при $R_0 \rightarrow \infty$ обращается в нуль. Таким образом, выполняется условие (18) задачи 1. Следовательно, решение (27) задачи 1 удовлетворяет всем условиям задачи. $\square$

4. Заключение. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (19)–(22). Тогда регулярное решение задачи 1 (13), (14)–(18) существует и выражается формулой (27).

Таким образом, в четырехмерном пространстве решена задача 1 на бесконечной области со смешанными условиями Неймана—Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения Геллерстедта. Решение записано в явном виде. Доказаны единственность и существование решения уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1973.
2. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
4. Коган М. Н. О магнитогидродинамических течениях смешанного типа// Прикл. мат. мех. — 1961. — 25, № 1. — С. 132–137.
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. — М.: Наука, 1966.
6. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. — М.: Высшая школа, 1985.
7. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука, 1973.
8. Agarwal P., Karimov E., Mamchuev M., Ruzhansky M. On boundary-value problems for a partial differential equation with Caputo and Bessel operators// in: Recent Applications of Harmonic Analysis to Function Spaces, differential Equations, and Data Science. — Basel: Birkhäuser, 2017. — P. 707–718.
9. Agmon S. The fundamental solution and Tricomi's problem for a class of equations of mixed type// Proc. Int. Cong. Math. Amsterdam — 1954. — II.
10. Altin A. Solutions of type for a class of singular equations// International Journal of Mathematical Science — 1982. — 5, № 3. — P. 613–619.
11. Appell P., Kampe de Fériet J. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques. Polynomes d'Hermite. — Paris: Gauthier-Villars, 1926.
12. Barros-Neto J. J., Gelfand I. M. Fundamental solutions for the Tricomi operator, I// Duke Math. J. — 1999. — 98, № 3. — P. 465–483.
13. Barros-Neto J. J., Gelfand I. M. Fundamental solutions for the Tricomi operator, II// Duke Math. J. — 2002. — 111, № 3. — P. 561–584.
14. Barros-Neto J. J., Gelfand I. M. Fundamental solutions for the Tricomi operator ,III// Duke Math. J. — 2005. — 128, № 1. — P. 119–140.
15. Bers L. Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics. — New York: Wiley, 1958.
16. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions. — New York–Toronto–London: McGraw-Hill, 1953.
17. Fryant A. J. Growth and complete sequences of generalized bi-axially symmetric potentials// J. Differ. Equations. — 1979. — 31, № 2. — P. 155–164.
18. Gilbert R. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. — New York–London: Academic Press, 1969.
19. Golberg M. A., Chen C. S. The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems// in: Boundary Integral Methods: Numerical and Mathematical Aspects (Golberg M. A., ed.). — Boston: WIT Press, 1998. — P. 103–176.
20. Hasanov A., Srivastava H. M. Some decomposition formulas associated with the Lauricella function and other multiple hypergeometric functions// Appl. Math. Lett. — 2006. — 19, № 2. — P. 113–121.
21. Hasanov A., Karimov E. T. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients// Appl. Math. Lett. — 2009. — 22. — P. 1828–1832.
22. Itagaki M. Higher order three-dimensional fundamental solutions to the Helmholtz and the modified Helmholtz equations// Eng. Anal. Bound. Elem. — 1995. — 15. — P. 289–293.
23. Karimov E. T. On a boundary problem with Neumann's condition for 3D singular elliptic equations// Appl. Math. Lett. — 2010. — 23. — P. 517–522.

24. *Kitagawa T.* On the numerical stability of the method of fundamental solution applied to the Dirichlet problem// Jpn. J. Appl. Math. — 1988. — 5. — P. 123–133.
25. *Luke Y. L.* The Special Functions and Their Approximations. — New York–London: Academic Press, 1969.
26. *Mathai A. M., Saxena R. K.* Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences. — Berlin –Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.
27. *Niukkanen A. W.* Generalised hypergeometric series $NF(x_1, \dots, x_N)$ arising in physical and quantum chemical applications// J. Phys. A: Math. Gen. — 1983. — 16. — P. 1813–1825.
28. *Rassias J. M.* A maximum principle in $\mathbb{R}^{n+1}$ // J. Math. Anal. Appl. — 1982. — 85, № 1. — P. 106–113.
29. *Salakhitdinov M. S., Hasanov A.* A solution of the Neumann–Dirichlet boundary-value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation// Complex Var. Elliptic Equations. — 2008. — 53, № 4. — P. 355–364.
30. *Sneddon I. N.* Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry. — London–New York: Longman, 1980.

Бердышев Абдумаулен Сулейманович

Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алма-Ата, Казахстан;

Институт информационных и вычислительных технологий Алма-Ата, Казахстан

E-mail: berdyshev@mail.ru

Хасанов Анвар

Институт математики им. В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан

E-mail: anvarhasanov@mail.ru

Рыскан Айнур

Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алма-Ата, Казахстан;

Институт информационных и вычислительных технологий Алма-Ата, Казахстан

E-mail: ryskan.a727@gmail.com