Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Бирюков, Кручения на плоских диаграммах узлов, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 194, 71–77

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-194-71-77>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:47:24

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 194 (2021). С. 71–77
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-194-71-77

УДК 515.162.8, 519.17

КРУЧЕНИЯ НА ПЛОСКИХ ДИАГРАММАХ УЗЛОВ

© 2021 г. О. Н. БИРЮКОВ

Аннотация. Рассматривается задача распознавания узлов как гладких вложений окружности в $\mathbb{R}^3$, заданных своими плоскими диаграммами. Вводится понятие кручения на плоской диаграмме и предлагается способ кодирования кручений и самих узлов с помощью Т-графов. Показывается, что подобный подход позволяет в некоторых ситуациях легко распознать тривиальный узел.

Ключевые слова: узел, распознавание тривиального узла, кручение, Т-граф.

TWISTS ON FLAT KNOT DIAGRAMS

© 2021 O. N. BIRYUKOV

ABSTRACT. We consider the problem of recognizing knots as smooth embeddings of a circle into $\mathbb{R}^3$ given by their planar diagrams. The concept of a twist on a planar diagram is introduced and a method for encoding twists and nodes by T-graphs is proposed. We show that in some situations this approach allows one to recognize a trivial knot.

Keywords and phrases: knot, recognition of a trivial knot, twist, T-graph.

AMS Subject Classification: 57M25, 57M27

1. Введение. В работе предлагается новый подход к хорошо известной задаче распознавания узлов. Под узлом понимается гладкое вложение окружности S^1 в $\mathbb{R}^3$, а также образ этого вложения. Два узла называются *равными*, если существует изотопный тождественному диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$, переводящий один узел в другой. Узел можно задать *плоской диаграммой* — проекцией узла на некоторую плоскость, имеющей только двойные точки самопересечения (перекрестки), причем в каждом перекрестке указана структура «проход-переход», т.е. указано, какая ветвь расположена в пространстве «выше» (дальше от плоскости проецирования), а какая «ниже». Задача распознавания узлов заключается в том, чтобы по двум заданным плоским диаграммам распознать, совпадают ли определяемые ими узлы. Обзор основных подходов к решению этой задачи можно найти в [1].

В данной работе предлагается новый комбинаторный подход к кодированию и распознаванию узлов. Вводится понятие кручения на плоской диаграмме узла и способ кодирования кручений с помощью графов с некоторой дополнительной структурой, называемых здесь Т-графами. Показывается, что Т-графы не только позволяют закодировать структуру кручений на плоской диаграмме, но и сам узел можно однозначно восстановить по Т-графу. Приводится пример плоской диаграммы тривиального узла, которую нельзя монотонно упростить движениями Рейдемейстера, а соответствующий Т-граф монотонно упрощается, что позволяет распознать тривиальность узла.

2. Понятие кручения. Пусть задан узел K и D_K — его плоская диаграмма. Ориентируем диаграмму D_K и определим знак каждого перекрестка следующим образом:

Плоскую диаграмму D_K будем также рассматривать как планарный 4-валентный граф, вершины которого соответствуют перекресткам исходной диаграммы, и в каждой вершине ребра пересекаются под прямым углом. Поэтому перекрестки на диаграмме D_K будем также называть ее вершинами.

Кручением на плоской диаграмме узла называется всякий двуугольник, стороны которого не пересекаются, а вершины, возможно, совпадают. Вершины этого двуугольника будем называть *вершинами кручения*, и также говорить, что между этими двумя вершинами (перекрестками на плоской диаграмме) имеется кручение. Стороны этого двуугольника пересекаются в его вершинах под прямым углом, каждый из этих углов будем называть *направлением кручения* в соответствующей вершине.

Кручение с вершинами A и B будем обозначать AB . Стороны кручения AB обозначим α_{AB} и β_{AB} так, чтобы в вершине A кратчайший поворот от стороны α_{AB} к стороне β_{AB} происходил против часовой стрелки. Аналогично, для сторон кручения AB будем использовать обозначения α_{BA} и β_{BA} в зависимости от их расположения в вершине B .

Пример 1. На следующей плоской диаграмме между вершиной A_1 и каждой из вершин B_1 , B_2 , B_3 есть кручение. Направления этих кручений выделены на рисунке дугами. Расставлены также знаки всех перекрестков, для чего выбрана ориентация. В каждой вершине плоской диаграммы есть четыре возможных направления кручений. Два из них, выделенные дугами на рисунке и зависящие от того, как соединяются четыре конца диаграммы, будем называть *циклическими*, а два другие — *остовными*.

Лемма 1 (о направлениях кручений).

Для любого кручения в двух его вершинах либо оба направления циклические, либо оба остовные.

Доказательство. Предположим, что направление кручения в одной из его вершин циклическое. Тогда концы диаграммы должны соединяться так, как указано на рисунке, и, очевидно, что направление кручения в другой его вершине также будет циклическим. Аналогично рассматривается случай остовного направления. $\square$

Кручение на плоской диаграмме называется *циклическим*, если оба его направления циклические, и *остовным*, если оба направления остовные.

Лемма 2 (об определении типа кручения). *Кручение является остовным тогда и только тогда, когда при выборе некоторой ориентации плоской диаграммы ориентация сторон двуугольника, образующего кручение, задает одинаковую ориентацию окружности, образованной сторонами этого двуугольника.*

Доказательство. Все очевидно следует из рисунка к лемме 1. $\square$

В любом направлении любой вершины плоской диаграммы D_K может располагаться несколько кручений (см. пример 1). На множестве всех кручений, расположенных в данном направлении данной вершины, определим линейный порядок. Пусть на плоской диаграмме D_K два кручения AB_1 и AB_2 имеют одинаковое направление в вершине A . Положим $AB_1 \prec AB_2$, если $\alpha(AB_1) \subset \alpha(AB_2)$. Тогда $\beta_{AB_1} \supset \beta_{AB_2}$. На множестве всех кручений с данной вершиной A определим теперь циклический порядок. Положим, что $AB_1 \prec AB_2 \prec AB_3 \prec AB_1$, если кручения, расположенные в одном направлении, связаны определенным выше линейным порядком, а кручения, расположенные в разных направлениях, упорядочены в соответствии с естественным циклическим порядком направлений на плоской диаграмме D_K .

Пример 2. Для диаграммы из примера 1 имеем $A_1B_1 \prec A_1B_2 \prec A_1B_3 \prec A_1B_1$.

Лемма 3. *В любой вершине плоской диаграммы узла в каждом из двух циклических направлений расположено хотя бы одно кручение, при этом возможно, что в обоих циклических направлениях расположено одно и то же кручение, вершины которого совпадают.*

Доказательство. Выберем некоторый перекресток A на плоской диаграмме D_K узла K и обозначим через α и β дуги, соединяющие концы перекрестка, как указано на рисунке. Если α и β не пересекаются, то в вершине A в обоих циклических направлениях, очевидно, расположено одно и то же кручение.

Если же α и β пересекаются, то выберем перекресток B , ближайший к A по дуге α с одного или другого циклического направления. Ясно, что тогда между A и B будет циклическое кручение. $\square$

3. Т-Графы. *Т-Графом* называется граф со следующей дополнительной структурой:

- (1) каждая вершина снабжается знаком «плюс» или «минус»;
- (2) для каждой вершины A на множестве E_A всех ребер, инцидентных вершине A , задан циклический порядок $\prec$, а также задано разбиение множества E_A на 4 класса $E_A^{C1}, E_A^{F1}, E_A^{C2}, E_A^{F2}$, называемых *направлениями* ребер в вершине A , при этом классы E_A^{C1} и E_A^{C2} , называемые *циклическими* направлениями, непустые, и разбиение на классы согласовано с циклическим порядком $\prec$ в том смысле, что для любых ребер $l_1 \in E_A^{C1}, l_2 \in E_A^{F1}, l_3 \in E_A^{C2}$ и $l_4 \in E_A^{F2}$ имеем $l_1 \prec l_2 \prec l_3 \prec l_4 \prec l_1$; классы E_A^{F1} и E_A^{F2} будем называть *остовными* направлениями в вершине A ;
- (3) всякое ребро, инцидентное вершинам A и B , либо принадлежит циклическим направлениям в обеих вершинах, либо остовным направлениям в обеих вершинах.

Закодируем структуру кручений на плоской диаграмме D_K с помощью Т-графа, вершины которого соответствуют перекресткам на плоской диаграмме и снабжаются знаком «плюс» или «минус» в зависимости от типа перекрестка, а ребра Т-графа соответствуют кручениям на плоской диаграмме. Как было показано выше, в каждой вершине плоской диаграммы существуют 4 направления кручений, два из которых циклические и два остовные, в каждом из двух циклических направлений всякой вершины расположено хотя бы одно кручение, и у каждого кручения

либо оба направления циклические, либо оба остовные, что полностью соответствует структуре Т-графа. Тем самым для любой плоской диаграммы узла Т-граф корректно определен.

Пример 3. Изобразим Т-граф для плоской диаграммы из примера 1, при этом циклические ребра будем изображать сплошными линиями, а остовные ребра — прерывистыми.

Циклическое и остовное направления в некоторой вершине Т-графа будем называть *трансверсальными* по отношению друг к другу.

Теорема 1 (о свойствах Т-графа). *Т-Граф любого узла K обладает следующими свойствами.*

1. Для любых двух вершин A и B на Т-графе из вершины A в данном направлении может выходить максимум одно ребро к вершине B , и, кроме того, A и B не могут быть соединены двумя ребрами в трансверсальных направлениях.
2. Если рассматривать плоскую диаграмму узла как планарный 4-валентный граф, то для любых двух вершин на этом графе, соединенных ребром, соответствующие вершины на Т-графе также соединены ребром.

Доказательство. Для заданной вершины A на плоской диаграмме в заданном направлении, очевидно, существует максимум один двуугольник с непересекающимися сторонами и второй вершиной в заданной точке B . Кроме того, если вершины A и B на Т-графе соединены двумя ребрами в трансверсальных направлениях, то на плоской диаграмме эта ситуация будет выглядеть, как указано на рисунке, т.е. это будет диаграмма не узла, а двухкомпонентного зацепления. Тем самым свойство 1 доказано.

Пусть вершины A и B на плоской диаграмме, рассматриваемой как 4-валентный граф, соединены ребром γ . Обозначим через α_1 и α_2 дуги, выходящие из A перпендикулярно γ , а через β_1 и β_2 дуги, выходящие из B перпендикулярно γ . Ясно, что ровно одна из дуг α_1 или α_2 соединяется с одной из дуг β_1 или β_2 , иначе получилась бы плоская диаграмма зацепления с более чем одной компонентой. Предположим, что α_1 соединяется с β_1 , тогда эта дуга не пересекается с γ и образует кручение с вершинами A и B , что доказывает свойство 2.

□

Путь в Т-графе будем называть *циклическим* (остовным), если все составляющие его ребра циклические (остовные). Если два соседних ребра циклического либо остовного пути подходят к их общей вершине с противоположных направлений, то будем говорить, что путь является *гладким* в этой вершине. Если же ребра подходят к общей вершине с одного и того же направления, то будем говорить, что путь в этой вершине имеет *касп*.

Пример 4. На Т-графе из примера 3 путь $A_1B_2A_2B_3A_1$ является замкнутым циклическим путем, гладким в вершинах B_2 и B_3 и имеющим каспы в вершинах A_1 и A_2 .

Лемма 4. Для любого циклического ребра AB и любого остовного ребра AC на T -графе, инцидентных общей вершине A , существует гладкий путь γ , соединяющий вершины B и C , причем если путь γ циклический, то он подходит к вершине B с того же направления, что и ребро AB , а если путь γ остовный, то он подходит к вершине C с того же направления, что и ребро AC .

Доказательство. Пусть из вершины A на T -графе выходят одновременно циклическое ребро AB и остовное ребро AC . Тогда на плоской диаграмме узла из вершины A выходят циклическое и остовное кручения с общей дугой α , и вершины B и C расположены на этой дуге. Пусть вершина C расположена ближе к A по дуге α , чем B . Докажем, что тогда на T -графе существует циклический путь γ от B к C , который подходит к B с того же направления, что и ребро AB .

Обозначим через AC сторону остовного кручения между A и C , отличную от α . Тогда если AC и BC не пересекаются, то между B и C , очевидно, есть циклическое кручение (со сторонами BC и BAC), и искомый путь γ состоит из одного этого кручения. Если же AC и BC пересекаются, то существование пути γ легко доказывается индукцией по количеству точек пересечения. Обозначим через D ближайшую к C точку пересечения AC и BC . Тогда, очевидно, между D и C расположено циклическое кручение, а между A и D расположено остовное кручение. Тем самым вместо точек A , B и C получаем аналогичную ситуацию для точек A , B и D , но уже с меньшим числом пересечений дуги AD (отличной от α) и BD .

В полной аналогии проводится доказательство в случае, если вершина B на плоской диаграмме расположена ближе к A по дуге α , чем C . Тогда, как несложно заметить, искомый путь γ будет остовным. $\square$

Теорема 2 (о восстановлении узла по T -графу). T -граф однозначно определяет узел, т.е. не существует двух разных узлов с одинаковым T -графом.

Доказательство. Известно, что плоская диаграмма узла полностью его определяет, поэтому достаточно показать, как по T -графу восстановить плоскую диаграмму узла, которую можно представлять как 4-валентный граф с указанием структуры «проход-переход». Вершины T -графа в точности соответствуют перекресткам плоской диаграммы, а знаки вершин T -графа позволяют однозначно восстановить структуру «проход-переход» в каждом перекрестке. Осталось показать, как вершины соединяются между собой в 4-валентном графе, задающем плоскую диаграмму, т.е. для каждой вершины указать смежную с ней в каждом из 4 направлений.

Рассмотрим плоскую диаграмму узла как 4-валентный граф, выберем некоторую вершину A и одну из четырех дуг α , выходящих из этой вершины. Обозначим через B вершину, ближайшую к A по дуге α . С двух сторон от дуги α из вершины A выходят два направления кручений: циклическое и остовное. По теореме 1 на Т-графе существует ребро, соединяющее A и B . Этому ребру соответствует кручение на плоской диаграмме. Если это кручение циклическое и в остовном направлении кручений (а значит, и ребер на Т-графе) нет, то это позволяет по Т-графу восстановить соединение вершин A и B на 4-валентном графе, задающем плоскую диаграмму. Пусть на Т-графе существует циклическое ребро AB и остовное ребро AC . Тогда по лемме 4 существует путь γ , соединяющий B и C . Из доказательства леммы видим, что если путь γ циклический, то ближайшей к A вершиной по дуге α будет C , а если путь γ остовный, то ближайшей будет B . $\square$

Рассмотрим два преобразования Т-графов (на рисунках также указано соответствующее преобразование фрагмента плоской диаграммы):

(i) *редуцирование гладкого пути*:

(ii) *редуцирование развилки*:

Здесь буквой R обозначен фрагмент Т-графа и плоской диаграммы. В процессе преобразования этот фрагмент отражается относительно своей вертикальной оси.

Данные преобразования, очевидно, позволяют перейти к другому Т-графу того же самого узла.

4. Пример распознавания тривиального узла. В силу теоремы 2 Т-граф есть не просто способ кодирования кручений на плоской диаграмме узла, а фактически способ кодирования самого узла. Кодирование узлов с помощью Т-графов позволяет в некоторых случаях проще решать задачу распознавания узлов. Приведем характерный пример.

Пример 5. Рассмотрим плоскую диаграмму тривиального узла и соответствующий этой диаграмме Т-граф:

Известно (см. [2]), что данную плоскую диаграмму нельзя преобразовать в тривиальную диаграмму (не имеющую перекрестков) последовательным применением движений Рейдемейстера так, чтобы на каждом шаге количество перекрестков не увеличивалось. В то же время построенный по этой диаграмме Т-граф легко преобразуется в тривиальный без увеличения его сложности (количества вершин и количества ребер) на каждом шаге, что позволяет легко распознать тривиальность узла. В самом деле, применим к Т-графу редуцирование развилок, сократив вершины 6 и 9, имеющие противоположные знаки, а потом точно так же сократив вершины 7 и 8.

Далее применим к полученному Т-графу редуцирование гладкого пути, сократив вершины 1 и 5, имеющие противоположные знаки, а потом сократив вершины 3 и 4. Получим Т-граф с одной вершиной 2, которая, очевидно, задает тривиальный узел (его плоская диаграмма изображена рядом).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынников И. А. Алгоритмы распознавания в теории узлов // Усп. мат. наук. — 2003. — 58, № 6 (354). — С. 45–92.
2. Goeritz L. Bemerkungen zur Knotentheorie // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1934. — 10. — P. 201–210.

Бирюков Олег Николаевич

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

E-mail: onbiryukov@yandex.ru