Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. М. Ерусалимский, А. В. Иванцов, « $n-1$ » пути на графе-решетке. Случайные блуждания, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 194, 107–114

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-194-107-114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:41:00

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 194 (2021). С. 107–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-194-107-114

УДК 519.1

« $n-1$ » ПУТИ НА ГРАФЕ-РЕШЕТКЕ. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ

© 2021 г. Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, А. В. ИВАНЦОВ

Аннотация. В работе рассмотрен граф-решетка с « $n-1$ » ограничениями на достижимость, имеющий вершины в точках плоскости с неотрицательными целочисленными координатами. Из каждой вершины выходит две дуги: горизонтальная — в ближайшую правую вершину и вертикальная — в ближайшую верхнюю вершину. Допустимыми путями в случае « $n-1$ » достижимости являются пути, удовлетворяющие дополнительному условию кратности n количеств дуг в максимальных по вложению отрезках путей, состоящих только из горизонтальных дуг. Это ограничение не распространяется на заключительный отрезок пути, состоящий из горизонтальных дуг. Получена формула для количества « $n-1$ » путей, ведущих из вершины в вершину, а также формула для количества таких путей, проходящих через заданную вершину графа-решетки. Рассмотрен процесс случайного блуждания по « $n-1$ » путям на графе-решетке. Показано, что он локально сводим к марковскому процессу на подграфах, определяемых типом начальной вершины. Получены формулы для нахождения вероятностей перехода из вершины в вершину по « $n-1$ » путям, а также комбинаторные тождества на треугольнике Паскаля.

Ключевые слова: ориентированный граф, граф-решетка, случайное блуждание, вероятность перехода, достижимость вершин, треугольник Паскаля.

“ $n-1$ ” PATHS ON LATTICE GRAPHS. RANDOM WALKS

© 2021 YA. M. ERUSALIMSKIY, A. V. IVANTSOV

ABSTRACT. In this paper, we consider graph-lattices with “ $n-1$ ” constraints on attainability whose vertices are located at points of the plane with nonnegative integer coordinates. Two arcs emerge from each vertex: a horizontal arc comes to the nearest right vertex and a vertical arc to the nearest upper vertex. In the case of the “ $n-1$ ” attainability, reachable paths are paths that satisfy the additional condition, namely, the multiplicity n of the number of arcs in the maximal segments of paths consisting only of horizontal arcs. This restriction does not apply to the final segment of a path consisting of horizontal arcs. We obtain a formula for the number of “ $n-1$ ” paths leading from a vertex to another vertex and also a formula for the number of such paths passing through a given vertex of the graph-lattice. Random walks along “ $n-1$ ” paths on graph-lattices are considered. It is shown that such processes can be locally reduced to Markov processes on subgraphs determined by the type of the initial vertex. Also, we obtain formulas for the probabilities of transition from a vertex to another vertex along “ $n-1$ ” paths and some combinatorial identities on Pascal’s triangle.

Keywords and phrases: directed graph, lattice graph, random walk, transition probability, attainability, Pascal’s triangle.

AMS Subject Classification: 05C81

Рис. 1. Граф-решетка

1. Введение. Алгоритмы на графах принципиально делятся на два типа: алгоритмы для вычисления инвариантов графа (степени вершин, число связности, хроматическое число и т. п.) или нахождения структурных элементов графа (мосты, точки сочленения, компоненты связности и сильной связности и др.) (см., например, [12]), а также алгоритмы, связанные с решением задач математического моделирования, в которых граф выступает моделью объекта или процесса. К таковым следует в первую очередь отнести алгоритмы нахождения кратчайших путей на графе, алгоритмы нахождения максимальных потоков в сетях (см. [12, 18]), алгоритмы решения дифференциальных уравнений на графах (см. [14–16, 20–24]). Авторам представляется, что наибольший прогресс в последние годы наблюдается именно во втором направлении — графовых моделях в математическом моделировании. Это связано в первую очередь с расширением круга рассматриваемых прикладных задач. Это расширение влечет за собой появление новых графовых объектов, среди которых следует назвать ресурсные сети (см. [9–11, 19, 25]), а также графы с ограничениями на достижимость (см. [8]).

В [5–8] предложен общий подход к решению задач о кратчайших путях, случайных блужданиях на графах с ограничениями на достижимость, а также к задачам о максимальном потоке в сетях с ограничениями на достижимость. Этот подход состоит в следующем. По исходному графу с ограничениями на достижимость строится вспомогательный граф — развертка исходного графа. Построение развертки определяется типом ограничений на достижимость. Исходная задача на графе с ограничениями на достижимость интерпретируется эквивалентной ей задачей на развертке — графе без ограничений на достижимость.

Сравнительно недавно нами было введен новый тип ограничений на достижимость — p -достижимость, которая полагает, что на графе выделено подмножество дуг и натуральное число $p > 1$. Допустимыми к рассмотрению являются пути, в которых все максимальные по вложению отрезки пути, состоящие только из дуг выделенного подмножества, за исключением быть может последнего, имеют длину, кратную p . Задачи, связанные с p -достижимостью, укладываются в общую схему исследования графов с ограничениями на достижимость, разработанную в [5–8].

В [1, 2, 4, 17] мы рассмотрели граф-решетку с различными видами ограничений на достижимость. Его регулярная структура позволила обойтись без построения развертки. В идейном плане настоящая работа имеет значительное пересечение с [4], однако в ней имеются и существенные отличия, позволившие получить некоторые комбинаторные тождества на треугольнике Паскаля.

2. « n -1» пути на графе-решетке. Мы рассматриваем бесконечный ориентированный граф, который называем графом-решеткой. Множество вершин графа-решетки $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел). Из каждой вершины $(m; n)$ выходит две дуги — горизонтальная дуга в вершину $(m + 1; n)$ и вертикальная — в вершину $(m; n + 1)$. Полагаем, что длины всех дуг равны 1 (см. рис. 1).

Следующие факты очевидны:

- (1) граф-решетка не имеет контуров;
- (2) все пути на графе-решетке простые;
- (3) путь из вершины с координатами $(a; b)$ вершину с координатами $(c; d)$ существует тогда и только тогда, когда $(a \leq c) \& (b \leq d)$. Все эти пути имеют длину, равную $(c - a) + (d - b)$, и они расположены в прямоугольнике, имеющем противоположными вершинами точки с координатами $(a; b)$ и $(c; d)$.

Каждый путь, ведущий из вершины $\bar{O} = (0; 0)$ в вершину $\bar{A} = (m; l)$, будем кодировать $(m + l)$ -разрядным двоичным числом, следующим образом — если на i -м шаге путь проходит по горизонтальной дуге, то в i -й позиции кодировки (нумерация позиций начинается слева) стоит единица, в противном случае стоит ноль. Аналогичную кодировку будем применять и для путей, начинающихся в произвольной вершине графа-решетки.

Для того чтобы определить «n-1» пути на графе-решетке, нам потребуются вспомогательные определения.

Определение 1. Начальным 1-фрагментом длины k пути будем называть его начальный отрезок, состоящий из k следующих одна за другой горизонтальных дуг и имеющий кодировку $(1 \dots 10 \dots)$.

Определение 2. Внутренним 1-фрагментом длины k пути будем называть его внутренний отрезок, состоящий из k следующих одна за другой горизонтальных дуг и имеющий кодировку $(01 \dots 10 \dots)$.

Определение 3. Заключительным 1-фрагментом длины k пути будем называть его заключительный отрезок, состоящий из k следующих одна за другой горизонтальных дуг и имеющий кодировку $(\dots 01 \dots 1)$. Если путь состоит только из горизонтальных дуг, то будем считать, что вся его кодировка состоит только из заключительного отрезка.

Теперь мы можем определить «n-1» пути на графе-решетке.

Определение 4. Путь на графе-решетке будем называть «n-1» путем ($n \in \mathbb{N}, n > 1$), если его начальный и все внутренние 1-фрагменты имеют длину, кратную n .

Пример 1. Кодировка (00111000111111011) соответствует пути из вершины $\bar{O}$ в вершину $(11; 6)$. Это «3-1» путь. Кодировка (00111100011111110) также соответствует пути из вершины $\bar{O}$ в вершину $(11; 6)$, но этот путь не является «3-1» путем.

Рассмотрим задачу о количестве «n-1» путей, ведущих из вершины $\bar{O} = (0; 0)$ в вершину $\bar{A} = (m; l)$. Возможны два случая:

1. $m = n \cdot k, k \in \mathbb{Z}_+$;
2. $m = n \cdot k + \delta, k \in \mathbb{Z}_+, \delta \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$.

Преобразуем в каждом из этих случаев кодировку «n-1» пути следующим образом. Двигаясь по ней слева направо, заменим каждые следующие подряд n единиц одной единицей. В результате в случае 1 получим $k + l$ -разрядное двоичное число, содержащее k единиц и l нулей, а в случае 2 получим $k + l + \delta$ -разрядное двоичное число, содержащее $k + \delta$ единиц и l нулей, причем в этом числе последние δ позиций заняты единицами. В обоих случаях количество таких чисел равно $C_{k+1}^k = C_{k+l}^l$. Обозначим количество «n-1» путей, ведущих из вершины A в вершину B , через $\nabla_{n-1}(A; B)$. Таким образом, справедлива формула

$$\nabla_{n-1}(\bar{O}; \bar{A}(m; l)) = C_{k+l}^k = C_{k+l}^l, \quad (1)$$

где k определяется условием $m = n \cdot k + \delta, k \in \mathbb{Z}_+, \delta \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ (можно считать, что $k = [m/n]$; здесь $[d]$ — обозначение целой части числа d).

Для того, чтобы получить формулу для количества «n-1» путей, ведущих из вершины $A(a; b)$ в вершину $B(c; d)$ на графе-решетке, достаточно принять вершину A за новое начало координат.

Рис. 2. Частичный граф-решетка для $n = 3$

Таким образом, справедлива следующая формула:

$$\nabla_{n;l}(A(a;b);B(c;d)) = \begin{cases} C_{k+l}^k = C_{k+l}^l, & k = \left\lfloor \frac{c-a}{n} \right\rfloor, l = d-b, \text{ если } (a \leq c) \& (b \leq d); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

Ясно, что задача достижимости вершин графа-решетки из вершины $\bar{O} = (0;0)$ по « $n-1$ » путям эквивалентна задаче об обычной достижимости вершин на частичном графе-решетке, полученном удалением дуг, которые на рис. 2 обозначены пунктирными линиями (случай $n = 3$).

3. Задача о количестве « $n-1$ » путей, проходящих через заданную вершину. Рассмотрим на графе-решетке две вершины $A(a;b)$ и $B(c;d)$ ($a \leq c, b \leq d$) и вершину $C(e;f)$, лежащую между ними ($a \leq e \leq c, b \leq f \leq d$). Найдем количество « $n-1$ » путей, ведущих из вершины A в вершину B , проходящих через вершину C .

В случае обычных путей на графе-решетке эта задача тривиальна: количество таких путей равно

$$C_{(e-a)+(f-b)}^{e-a} \cdot C_{(c-e)+(d-f)}^{c-e}.$$

В случае « $n-1$ » путей это уже не так. При ее решении мы должны переходить к локальным координатам, перенося начало координат в вершину $A(a;b)$. Будем считать, что мы так и сделали. Теперь вершина $A(a';b')$ такова, что $a' = b' = 0$. $B(c';d')$ ($c' = c-a, d' = d-b$), $C(e';f')$, $e' = e-a, f' = f-b$.

Рассмотрим случай, когда $e' = n \cdot l$. Ясно, что в этом случае количество « $n-1$ » путей, ведущих из вершины A в вершину B , проходящих через вершину C равно количеству « $n-1$ » путей, ведущих из вершины A в вершину C , умноженному на количество « $n-1$ » путей, ведущих из вершины C в вершину B . Каждое из этих количеств может быть найдено по формуле (2); следовательно,

$$\nabla_{n;l}(A(0;0);C(e';f')) \cdot \nabla_{n;l}(C(e';f');B(c';d')) \stackrel{(2)}{=} C_{f'+l}^{f'} \cdot C_{\left\lfloor \frac{e'-e'}{n} \right\rfloor + (d'-f')}^{\left\lfloor \frac{e'-e'}{n} \right\rfloor + (d'-f')}. \quad (3)$$

В случае $e' = n \cdot l + \delta$, $1 \leq \delta \leq n-1$ количество « $n-1$ » путей, ведущих из вершины A в вершину B , проходящих через вершину C , равно количеству « $n-1$ » путей, ведущих из вершины A в вершину $C'(n \cdot l, f')$, умноженному на количество « $n-1$ » путей, ведущих из вершины $C''(n \cdot (l+1), f')$ в вершину B . Каждое из этих количеств может быть найдено по формуле (2); следовательно,

$$\nabla_{n;l}(A(0;0);C'(n \cdot l; f')) \cdot \nabla_{n;l}(C''(n \cdot (l+1); f'); B(c'; d')) \stackrel{(2)}{=} C_{f'+l}^{f'} \cdot C_{\left\lfloor \frac{e'-f'}{n} \right\rfloor + (d'-f')}^{\left\lfloor \frac{e'-f'}{n} \right\rfloor + (d'-f')}. \quad (4)$$

4. Случайные блуждания по «n-1» путям. Будем считать, что вероятность перехода по любой горизонтальной дуге графа-решетки равна p , а по любой вертикальной дуге равна q , $p + q = 1$. Рассмотрим процесс случайного блуждания по вершинам графа-решетки по «n-1» путям. Что это означает?

Полагаем, что частица, находящаяся в момент времени t в вершине $(m; n)$, переходит по одной из выходящих из нее дуг с заданной вероятностью и оказывается в следующий момент времени $t + 1$ в одной из вершин $(m + 1; n)$, $(m; n + 1)$, если пройденный ею до этого «n-1» путь не накладывает ограничений на дальнейшее продолжение в виде «n-1» пути, или переходит только по одной из дуг с вероятностью, равной 1, прохождение по которой определяется условием продолжения движения по «n-1» пути.

Обозначим вероятность попадания из вершины $O(0; 0)$ в вершину $A(m; l)$ по «n-1» путям длины $r = m + l$ через $p_r^{n;1}(O(0; 0), A(m; l))$. Имеет место формула:

$$p_r^{n;1}(O(0; 0), A(m; l)) = \begin{cases} C_{k+l}^l \cdot p^k \cdot q^l, & m = n \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}_+; \\ C_{k+l}^l \cdot p^{k+1} \cdot q^l, & m = n \cdot k + \delta, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \delta \in \{1; 2; \dots, n-1\}. \end{cases} \quad (5)$$

Действительно, в случае $m = n \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, вероятность прохождения по каждой первой дуге в n -ке следующих подряд горизонтальных дуг равна p (n -ки выбираются слева направо в кодировке пути), а по каждой из остальных дуг в этой n -ке она равна единице, вероятность прохождения по любой из вертикальных дуг равна q . Таким образом, вероятность прохождения по этому пути равна $p^k \cdot q^l$. Учитывая формулу (1) для количества «n-1» путей, мы получаем верхнюю строку формулы (5).

В случае $m = n \cdot k + \delta$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\delta \in \{1; 2; \dots, n-1\}$ вероятность прохождения по каждой первой дуге в n -ке следующих подряд горизонтальных дуг равна p (n -ки выбираются слева направо в кодировке пути), а по каждой из остальных дуг в этой n -ке она равна единице, вероятность прохождения по первой из последних горизонтальных дуг равна p , а по оставшимся $\delta - 1$ последним горизонтальных дуг она равна единице, вероятность прохождения по любой из вертикальных дуг равна q , поэтому вероятность прохождения по такому «n-1» пути равна $p^{k+1} \cdot q^l$. Учитывая формулу (1) для количества «n-1» путей, мы получаем нижнюю строку формулы (5).

Вернемся к рис. 2. Будем считать, что вероятности прохождения по дугам рассматриваемого частичного графа-решетки перенесены с исходного графа-решетки по правилу, состоящему в следующем — если на частичном графе сохранены обе дуги, выходящие из вершины дуги графа-решетки, то вероятности перехода по ним на частичном графе равны вероятностям перехода, заданным на исходном графе-решетке, если же из двух выходящих из вершины графа-решетки дуг на частичном графе сохранена только одна дуга, то вероятность прохождения по ней на частичном графе-решетке равна единице. Задача о вероятности попадания в вершину $A(m; l)$ из вершины $O(0; 0)$ по «n-1» путям эквивалентна задаче о вероятности попадания в вершину $A(m; l)$ из вершины $O(0; 0)$ по всевозможным путям на построенном частичном графе-решетке.

Решая задачу о вероятности попадания из вершины $A(a; b)$ в вершину $B(c; d)$ на графе-решетке по «n-1» путям в случае, когда стартовая вершина $A(a; b)$ такова, что $a = n \cdot k$, достаточно принять вершину A за новое начало координат и решать задачу о случайных блужданиях по вершинам построенного частичного графа-решетки. В противном случае, перенеся начало координат в вершину $A(a; b)$, мы должны в новом графе-решетке строить заново частичный граф-решетку и решать задачу о случайном блуждании на построенном частичном графе. Сказанное свидетельствует о том, что задача о случайных блужданиях по «n-1» путям по вершинам графа-решетки не является марковским процессом в классическом его понимании и не сводится к марковскому процессу на частичном графе исходного графа. Однако как только стартовая вершина зафиксирована, процесс является марковским на соответствующем частичном графе-решетке. Такого типа процесс в [17] мы называли *локально марковским*.

5. Некоторые комбинаторные тождества на треугольнике Паскаля. Полученные формулы для вероятностей попадания из вершины в вершину на графе-решетке по «n-1» путям и известная формула Колмогорова—Чепмена о равенстве единице полной вероятности позволят нам получить тождество на треугольнике Паскаля.

Будем считать, что вероятности, заданные на дугах графа-решетки таковы, что $p = q = 1/2$. В качестве стартовой вершины возьмем вершину $O(0; 0)$. Рассмотрим множество вершин, находящихся от стартовой вершины на расстоянии, равном $n \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$. Эти вершины находятся на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника $O(0; 0)A(n \cdot k; 0)B(0; n \cdot k)$. Найдем вероятности попадания в каждую из вершин гипотенузы, просуммируем полученные вероятности. По формуле Колмогорова—Чепмена полученная сумма должна быть равна единице.

Рассмотрим вертикальные прямые $x = n \cdot l$, $l = 0, 1, \dots, (k-1), k$. Отдельно подсчитаем вероятности попадания в вершины гипотенузы, лежащие на этих вертикалях, и отдельно подсчитаем вероятности попадания в точки гипотенузы, лежащие между соседними вертикалями. Вершина графа-решетки, лежащая на пересечении l -й вертикали с гипотенузой имеет координаты $(n \cdot l; n \cdot (k-l))$. Тогда по формуле (5) вероятность попадания в такую вершину равна

$$C_{l+n \cdot (k-l)}^{(k-l)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l+n \cdot (k-l)}.$$

Просуммировав полученное по всем таким вершинам, получаем

$$\sum_{l=0}^k C_{l+n \cdot (k-l)}^{n \cdot (k-l)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l+n \cdot (k-l)}.$$

Рассмотрим теперь множество вершин гипотенузы, находящихся между вертикальными прямыми $x = n \cdot (l-1)$ и $x = n \cdot l$, $l = 1, \dots, (k-1), k$. Занумеруем эти вершины справа налево ($j = 1, 2, \dots, n-1$). Вероятность попадания в j -ю вершину равна

$$C_{l-1+n \cdot (k-l)+j}^{l-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l+n \cdot (k-l)+j},$$

тогда вероятность попадания хотя бы в одну из таких вершин равна

$$\sum_{j=1}^{n-1} C_{l-1+n \cdot (k-l)+j}^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l+n \cdot (k-l)+j}.$$

Учитывая полученное ранее для вершин гипотенузы, лежащих на вертикальных прямых $x = n \cdot l$, $l = 0, 1, \dots, (k-1), k$, и формулу Колмогорова—Чепмена, мы получаем тождество:

$$\sum_{l=0}^k C_{l+n \cdot (k-l)}^{n \cdot (k-l)} + \sum_{l=1}^k \left(\sum_{j=1}^{n-1} C_{l-1+n \cdot (k-l)+j}^{l-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l+n \cdot (k-l)+j} \right) = 1. \quad (6)$$

Посмотрим, как оно выглядит для случая $n = 3$, $k = 3$.

В этом случае нам потребуется найти значения вероятностей попадания из вершины $O(0; 0)$ в вершины, лежащие на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника $O(0; 0)A(9; 0)B(0; 9)$ (см. рис. 3).

Вычислим поочередно вероятности попадания из вершины $O(0; 0)$ в выделенные на рис. 3 вершины:

$$\begin{aligned} p_1 &= P_9^{n,1}(O(0; 0); B(0; 9)) = C_9^9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \left(\frac{1}{2}\right)^9, & p_2 &= P_9^{n,1}(O(0; 0); D(1; 8)) = C_8^8 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \left(\frac{1}{2}\right)^9, \\ p_3 &= P_9^{n,1}(O(0; 0); F(2; 7)) = C_7^7 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8, & p_4 &= P_9^{n,1}(O(0; 0); H(3; 6)) = C_7^6 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 7 \left(\frac{1}{2}\right)^7, \\ p_5 &= P_9^{n,1}(O(0; 0); J(4; 5)) = C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^6, & p_6 &= P_9^{n,1}(O(0; 0); I(5; 4)) = C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^6, \\ p_7 &= P_9^{n,1}(O(0; 0); G(6; 3)) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^4, & p_8 &= P_9^{n,1}(O(0; 0); E(7; 2)) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^4, \\ p_9 &= P_9^{n,1}(O(0; 0); C(6; 3)) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^4, & p_{10} &= P_9^{n,1}(O(0; 0); A(9; 0)) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

Рис. 3

Сумма найденных вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{10} p_i = 1.$$

Рассмотрим «p-1» пути на графе ($p \in \mathbb{N}, p > 1$) и вершину $A(m \cdot p; n - m)$, $0 \leq m \leq n$. Ясно, что количество «p-1» путей, ведущих в нее из вершины $O(0; 0)$, равно C_n^m . Рассмотрим вертикальные прямые $x = p \cdot (k - 1)$ и $x = p \cdot k$ ($0 < k < m$) и прямую $x = p \cdot (k - 1) + \delta$ ($\delta \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$). Множество всех «p-1» путей, ведущих в вершину $A(m \cdot p; n - m)$ из вершины $O(0; 0)$, разбивается на непересекающиеся подмножества «p-1» путей, ведущих в вершину $A(m \cdot p; n - m)$ из вершины $O(0; 0)$, проходящих через вершины $B_i(p \cdot (k - 1) + \delta; i)$ ($i = 0, 1, \dots, n - m$), лежащие на вертикали $x = p \cdot (k - 1) + \delta$. Рассмотрим на вертикальной прямой $x = p \cdot (k - 1)$ точки $B'_i(p \cdot (k - 1); i)$ ($i = 0, 1, \dots, n - m$) и на вертикальной прямой $x = p \cdot k$ точки $B''_i(p \cdot k; i)$ ($i = 0, 1, \dots, n - m$). Ясно, что количество «p-1» путей, ведущих из вершины $O(0; 0)$ в вершину $A(m \cdot p; n - m)$ и проходящих через вершину $B_i(p \cdot (k - 1) + \delta; i)$, равно

$$\nabla_{p;1}(O; B'_i) \cdot \nabla_{p;1}(B''_i; A) \stackrel{(2)}{=} C_{k-1+i}^{k-1} \cdot C_{m-k+(n-m-i)}^{m-k} = C_{k-1+i}^{k-1} \cdot C_{n-k-i}^{m-k}. \quad (7)$$

Из (7) и того, что рассматриваемые множества путей попарно не пересекаются, получаем тождество:

$$C_n^m = \sum_{i=0}^{n-m} C_{k-1+i}^{k-1} \cdot C_{n-k-i}^{m-k}, \quad 0 \leq k \leq m. \quad (8)$$

Выпишем, что получится из (8) при $m = 4$, $n = 7$, $k = 2$:

$$C_4^7 = 35 = C_1^1 \cdot C_5^2 + C_2^1 \cdot C_4^2 + C_3^1 \cdot C_3^2 + C_4^1 \cdot C_2^2 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 35.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерусалимский Я. М. Случайные блуждания по графу решетки и комбинаторные тождества // Инж. вестн. Дона. — 2015. — 2, № 2. — С. 12.
2. Ерусалимский Я. М. 2 и 3 пути на графе и комбинаторные тождества // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. — 2017. — 1 (193). — С. 25–30.
3. Ерусалимский Я. М. Треугольник Паскаля: комбинаторика и случайные блуждания. — Ростов-на-Дону–Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2017.

4. *Ерусалимский Я. М.* 2–3 пути на графе-решетке. Случайные блуждания// Мат. заметки. — 2018. — 104, № 3. — С. 396–406.
5. *Ерусалимский Я. М., Водолазов Н. Н.* Нестационарный и случайный поток в сети// Мат. Всеросс. конф. «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XX. Современные методы теории краевых задач» (3–9 мая 2008 г., Воронеж). — Воронеж: ВГУ, 2009. — С. 56–57.
6. *Ерусалимский Я. М., Петросян А. Г.* Случайные процессы в сетях с биполярной магнитностью// Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. — 2005. — 11. — С. 10–16.
7. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А.* Графы с вентильной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях// Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. — 2003. — 2. — С. 3–5.
8. *Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Кузьмина М. В., Петросян А. Г.* Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009.
9. *Жильякова Л. Ю.* Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах// Управл. бол. сист. — 2013. — 43. — С. 34–54.
10. *Жильякова Л. Ю.* Эргодические циклические ресурсные сети. II. Большие ресурсы// Управл. бол. сист. — 2013. — 45. — С. 6–29.
11. *Жильякова Л. Ю., Кузнецов О. П.* Теория ресурсных сетей. — М.: ИНФРА-М, 2017.
12. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978.
13. *Малышев В. А.* Случайные блуждания. Уравнения Винера—Хопфа. Автоморфизмы Галуа. — М.: МГУ, 1970.
14. *Малышев В. А.* О решении уравнений Винера—Хопфа в четверти плоскости// Докл. АН СССР. — 1969. — 187, № 6. — С. 1066–1069.
15. *Пасенчук А. Э.* Об одной задаче случайного блуждания в четверти плоскости// Усп. мат. наук. — 1978. — 33, № 6. — С. 229–230.
16. *Рабинович В. С.* Акустическая дифракция на периодических графах// Функц. анал. прилож. — 2014. — 48, № 4. — С. 77–83.
17. *Erusalimskiy I. M.* Graph-lattice: random walk and combinatorial identities// Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana — 2016. — 22, № 2. — P. 329–335.
18. *Ford L. R., Fulkerson D. R.* Flows in Networks. — Princeton Univ. Press, 1962.
19. *Kuznetsov Oleg P., Zhilyakova Ludmila Yu.* Nonsymmetric resource networks. The study of limit states// Management and Production Engineering Review — 2011. — 2, № 3. — P. 33–39.
20. *Rabinovich V.* Diffraction by periodic graphs// Complex Var. Ellipt. Equations. — 2013. — 59, № 4. — P. 578–598.
21. *Rabinovich V.* On Boundary Integral Operators for Diffraction Problems on Graphs with Finitely Many Exits at Infinity// Russian Journal of Mathematical Physics — 2013. — 20, № 4. — P. 508–522.
22. *Rabinovich V. S., Roch S.* The essential spectrum of Schrödinger operators on lattice// J. Phys. A: Math. Theor. — 2006. — 39. — P. 8377–8394.
23. *Rabinovich V. S., Roch S.* Essential spectra of difference operators on Z^n -periodic graphs// J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — 40. — P. 10109–10128.
24. *Rabinovich V., Roch S.* Pseudodifferential operators on periodic graphs// Integr. Equ. Oper. Theory. — 2012. — 72, № 2. — P. 1–22.
25. *Zhilyakova L. Yu.* Dynamic graph models and their properties// Automat. Remote Control.. — 76, № 8. — P. 1417–1435.

Ерусалимский Яков Михайлович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: imerusalimskiy@sfedu.ru

Иванцов Александр Владимирович
Южный федеральный университет
E-mail: ivancov.n.a.p@gmail.com