Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кыров, Решение задачи вложения для двумерных и трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 194, 124–143

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-194-124-143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:32:07

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 194 (2021). С. 124–143
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-194-124-143

УДК 514.1,517.912

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ ЛОКАЛЬНОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОДВИЖНОСТИ

© 2021 г. В. А. КЫРОВ

Аннотация. В современной геометрии большое значение имеет изучение геометрий максимальной подвижности. Некоторые из таких геометрий изучены хорошо (геометрии Евклида и Лобачевского, псевдоевклидова, симплектическая, сферическая геометрия и др.), в то время как другие (гельмгольцевы, псевдогельмгольцевы и др.) еще не привлекали активного внимания исследователей. Полной классификации геометрий максимальной подвижности пока нет. В данной работе приведены результаты решения классификационной задачи для двумерных и трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности. Эта задача решается методом вложения в классе аналитических функций и сводится к решению функциональных уравнений специального вида.

Ключевые слова: геометрия максимальной подвижности, группа движений, функциональное уравнение.

SOLUTION OF THE EMBEDDING PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL AND THREE-DIMENSIONAL GEOMETRIES OF LOCAL MAXIMUM MOBILITY

© 2021 V. A. KYROV

ABSTRACT. In modern geometry, the study of the geometries of maximum mobility is of great importance. Some of these geometries are well studied (for example, the Euclidean and Lobachevsky geometries, pseudo-Euclidean, symplectic, spherical geometry, etc.), while others (for example, Helmholtz and pseudo-Helmholtz geometries) have not yet attracted active attention of researchers. There is still no complete classification of the geometries of maximum mobility. In this work, we present some results concerning the classification problem for two- and three-dimensional geometries of local maximum mobility. This problem is reduced to functional equations of a special form and is solved by the embedding method in the class of analytic functions.

Keywords and phrases: geometry of maximum mobility, motion group, functional equation.

AMS Subject Classification: 53D05, 39B22

1. Введение. Для современной математики большое значение имеет изучение геометрий максимальной подвижности. К таким геометриям относятся: геометрия Евклида, псевдоевклидова геометрия, сферическая геометрия, геометрия Лобачевского и др. Полной же классификации геометрий максимальной подвижности не существует. Имеются отдельные классификации, в частности, классификация Терстона трехмерных максимально односвязных геометрий, допускающих компактные фактор-геометрии (см. [1, 17]). Эта классификация специальных геометрий глобальной максимальной подвижности содержит в себе следующие геометрии:

(1) трехмерные геометрии с постоянной секционной кривизной: $\mathbb{R}^3$, S^3 , H^3 ;

- (2) произведение пар геометрий: $S^2 \times \mathbb{R}$, $H^2 \times \mathbb{R}$;
 (3) геометрии на группах Ли Nil, Sol, $\widetilde{SL}_2$ с некоторыми левоинвариантными метриками. Отметим, что группы движений геометрий из списка Терстона имеют размерность ≤ 6 .

В данной рассмотрены геометрии локальной максимальной подвижности, т.е. случай, когда группа движений имеет максимальную размерность, равную $n(n+1)/2$ для n -мерной геометрии. Г. Г. Михайличенко построил полную классификацию таких двумерных геометрий (см. [13, 16]), а В. Х. Лев — классификацию трехмерных геометрий (см. [12]). Эти классификации построены в рамках теории феноменологически симметричных геометрий и содержат как ранее известные геометрии (геометрия Евклида, псевдоевклидова геометрия, Лобачевского, симплектическая и т. д.), так и неизвестные геометрии (геометрия Гельмгольца, симплицальные геометрии, особые расширения евклидовой геометрии и т. д.). Феноменологически симметричные геометрии по сути и являются геометриями локальной максимальной подвижности и задаются функциями пары точек $f(A, B)$, где A и B — точки многообразия M (см. [13, 16]). Поясним суть термина «феноменологическая симметрия». Феноменологическая симметрия, например, на двумерном многообразии означает существование функциональной связи между шестью значениями функции f для произвольных четырех точек $\langle A, B, C, D \rangle$ этого многообразия: $\Phi(f(A, B), f(A, C), f(A, D), f(B, C), f(B, D), f(C, D)) = 0$, где Φ — некоторая дифференцируемая функция. Отметим, что для геометрии Евклида, задаваемой функцией пары точек

$$f(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2,$$

такая функциональная связь записывается через определитель Кэли—Менгера:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(A, B) & f(A, C) & f(A, D) \\ 1 & f(A, B) & 0 & f(B, C) & f(B, D) \\ 1 & f(A, C) & f(B, C) & 0 & f(C, D) \\ 1 & f(A, D) & f(B, D) & f(C, D) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Подобные функциональные связи найдены также для псевдоевклидовой геометрии, симплектической геометрии, геометрии Лобачевского и т. д. Не для всех феноменологически симметричных геометрий известны явные записи функциональной связи.

Г. Г. Михайличенко доказал теорему об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий, согласно которой вместо феноменологической симметрии n -мерной геометрии можно говорить о групповой симметрии степени $n(n+1)/2$, т.е. об $n(n+1)/2$ -параметрической группе движений n -мерного многообразия (см. [13, 16]). Ниже даются точные определения, в которых вместо аксиомы феноменологической симметрии приводится аксиома максимальной подвижности.

Классификации двумерных и трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности (феноменологически симметричных геометрий), о которых было сказано выше, построены сложными методами, которые неприменимы, ввиду больших технических трудностей, при построении классификаций геометрий размерности 4 и выше. Автором разработан новый метод классификации геометрий локальной максимальной подвижности, названный методом вложения (см. [6–8, 10, 11]). Поясним его суть на хорошо известном примере. Рассмотрим трехмерную геометрию Евклида, задаваемую функцией пары точек:

$$g(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2.$$

Эта функция является компонентой функций пар точек только следующих четырехмерных геометрий локальной максимальной подвижности:

$$\begin{aligned} f(A, B) &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 + (w_A - w_B)^2, \\ f(A, B) &= (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - (w_A - w_B)^2, \\ f(A, B) &= \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 + (w_A - w_B)^2}{4w_A w_B}, \end{aligned}$$

$$f(A, B) = \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - (w_A - w_B)^2}{4w_A w_B}.$$

Таким образом, n -мерная геометрия локальной максимальной подвижности с функцией пары точек g вложена в $(n + 1)$ -мерную геометрию локальной максимальной подвижности, если ее функция пары точек представима в виде:

$$f(A, B) = \chi(g(x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B), w_A, w_B).$$

Метод вложения сводится к решению специальных функциональных уравнений.

2. Точные определения. Рассмотрим $(s + 1)$ -мерное аналитическое многообразие M_{s+1} , $s = 2, 3$, которое локально диффеоморфно прямому произведению s -мерного аналитического многообразия N_s и одномерного аналитического многообразия L . Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение $h_s : M_{s+1} \rightarrow N_s \times L$. Пусть

$$\pi_1 : N_s \times L \rightarrow N_s, \quad \pi_2 : N_s \times L \rightarrow L$$

— проекции. Рассмотрим функции $g_s : N_s \times N_s \rightarrow \mathbb{R}$ с открытой и плотной областью определения S_g в N_s^2 , и $\chi : \mathbb{R} \times L \times L \rightarrow \mathbb{R}$. Определим проекции

$$p_1 : M_{s+1} \times M_{s+1} \rightarrow M_{s+1}, \quad p_2 : M_{s+1} \times M_{s+1} \rightarrow M_{s+1},$$

которые на точках действуют следующим образом:

$$p_1 : \langle A, B \rangle \mapsto A, \quad p_2 : \langle A, B \rangle \mapsto B,$$

где $\langle A, B \rangle$ — произвольная точка в $M_{s+1} \times M_{s+1}$. Построим функцию $f : M_{s+1} \times M_{s+1} \rightarrow \mathbb{R}$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g_s(\pi_1(h_s(p_1)), \pi_1(h_s(p_2))), \pi_2(h_s(p_1)), \pi_2(h_s(p_2))),$$

область определения S_f которой открыта и плотна в M_{s+1}^2 . Действие на точках имеет вид

$$f(A, B) = \chi\left(g_s\left(\pi_1(h_s(p_1(\langle A, B \rangle))), \pi_1(h_s(p_2(\langle A, B \rangle)))\right), \pi_2(h_s(p_1(\langle A, B \rangle))), \pi_2(h_s(p_2(\langle A, B \rangle)))\right), \quad (1)$$

где A, B — две произвольные точки из M_{s+1} , причем $\langle A, B \rangle \in S_f$.

Для произвольной точки из M_{s+1} рассмотрим координатную окрестность $U_{s+1} \subset M_{s+1}$, в которой h_s является диффеоморфизмом, и для любых точек $A, B \in U_{s+1}$, $\langle A, B \rangle \in S_f$, существуют такие окрестности $U_{s+1}(A) \subset U_{s+1}$, $U_{s+1}(B) \subset U_{s+1}$, что $\langle A', B' \rangle \in S_f$ для любых $A' \in U_{s+1}(A)$ и $B' \in U_{s+1}(B)$. Из сказанного выше следует диффеоморфизм окрестностей $h_s : U_{s+1} \rightarrow V_s \times W$, где V_s, W — некоторые координатные окрестности в N_s и L соответственно. Координаты в окрестности V_2 обозначим (x, y) , в окрестности V_3 — (x, y, z) , а в окрестности W — (w) . Тогда в локальных координатах функция (1) принимает следующий вид:

$$f = f(A, B) = \chi(\theta, w_A, w_B), \quad (2)$$

где для двумерного случая $g_2(\pi_1(h(A)), \pi_1(h(B))) = \theta = \theta(x_A, y_A, x_B, y_B)$ — функция пары точек двумерной геометрии локальной максимальной подвижности, а для трехмерного случая $g_3(\pi_1(h(A)), \pi_1(h(B))) = \theta = \theta(x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B)$ — функция пары точек трехмерной геометрии локальной максимальной подвижности, $\pi_2(h(A)) = w_A$, $\pi_2(h(B)) = w_B$. Пусть выполняются следующие аксиомы.

Аксиома аналитичности: функция $\chi : \mathbb{R} \times L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ аналитическая во всех точках области определения;

Аксиома невырожденности: для функции (2) в произвольной точке окрестности $U_{s+1}(A) \times U_{s+1}(B) \subset M_{s+1}^2$ справедливы неравенства

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial w_A} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \neq 0. \quad (3)$$

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U_{s+1} \subset M_{s+1}$ (см. [2, 13]). Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие) $\lambda : U_{s+1} \times G \rightarrow U'_{s+1}$, где $U'_{s+1} \subset M_{s+1}$ — открытая область, причем выполняются следующие свойства:

- (i) $\lambda(A, e) = A$, $e \in G$ — единица, $A \in U_{s+1}$;
- (ii) $\lambda(\lambda(A, a), b) = \lambda(A, ab)$, для любых $a, b \in G$ и $A \in U_{s+1}$;
- (iii) Для любого $A \in U_{s+1}$ $\lambda(A, a) = A$, только если $a = e$.

Действие λ_a , определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $A, B \in U_{s+1}$ таких, что $\langle A, B \rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(A), \lambda_a(B) \rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(A), \lambda_a(B)) = f(A, B).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U_{s+1}(A)$ и $U_{s+1}(B)$ точек A и B , причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают. Множество всех движений образует группу движений.

Аксиома максимальной подвижности: размерность группы Ли G равна $(s+1)(s+2)/2$.

Алгебра Ли действия группы Ли G при $s = 2$ состоит из операторов

$$X = X_1 \partial_x + X_2 \partial_y + P \partial_w, \quad (4)$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x, y, w)$, $P = P(x, y, w)$ — аналитические функции в U_3 , $\alpha = 1, 2$ (см. [13]), а при $s = 3$ — из операторов

$$X = X_1 \partial_x + X_2 \partial_y + X_3 \partial_z + P \partial_w, \quad (5)$$

$X_\beta = X_\beta(x, y, z, w)$, $P = P(x, y, z, w)$ — аналитические функции в U_4 , $\beta = 1, 2, 3$ (см. [13]).

Через операторы (4) и (5) записывается условие локальной инвариантности (см. [13, 14])

$$X(A)f(A, B) + X(B)f(A, B) = 0, \quad (6)$$

которое выполняется в окрестностях $U_{s+1}(A) \subset U_{s+1}$ и $U_{s+1}(B) \subset U_{s+1}$ точек A и B .

Можно найти все функции пары точек вида (2), являющиеся двухточечными инвариантами группы движений размерности $(s+1)(s+2)/2 = 6$ ($s = 2$), причем θ — функция пары точек, задающая двумерную геометрию локальной максимальной подвижности. Список таких геометрий приводится ниже. Аналогично можно найти все функции пары точек вида (2), являющиеся двухточечными инвариантами группы движений размерности $(s+1)(s+2)/2 = 10$ ($s = 3$), причем θ — функция пары точек, задающая трехмерную геометрию локальной максимальной подвижности.

Эта задача аналитически решается в [6, 7, 10, 11]. Для ее решения компоненты операторов (4) и (5) алгебр Ли групп движений, а также функции пары точек представляются рядами Тейлора и подставляются в функциональные уравнения специального вида, которые получаются из условия локальной инвариантности (2) при подстановке в них компонент операторов (4), (5) и функции (2). Пусть $k_s \in U_{s+1} \subset M_{s+1}$ — начало некоторой системы координат в U_{s+1} , в которой эта точка имеет нулевые координаты. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора для компонент операторов (4), (5) и функции (2) (см. [15]):

$$\begin{aligned} X_1 = X_1(w) + D_1(X_1)(w)x + D_2(X_1)(w)y + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_1)(w)x^2 + \\ + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_1)(w)y^2 + D_{1,2}(X_1)(w)xy + \dots, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} X_2 = X_2(w) + D_1(X_2)(w)x + D_2(X_2)(w)y + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_2)(w)x^2 + \\ + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_2)(w)y^2 + D_{1,2}(X_2)(w)xy + \dots, \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} P = P(w) + D_1(P)(w)x + D_2(P)(w)y + \frac{1}{2}D_{1,1}(P)(w)x^2 + \\ + \frac{1}{2}D_{2,2}(P)(w)y^2 + D_{1,2}(P)(w)xy + \dots, \end{aligned} \quad (7c)$$

$$X_1 = X_1(z, w) + D_1(X_1)(z, w)x + D_2(X_1)(z, w)y + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_1)(z, w)x^2 + \\ + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_1)(z, w)y^2 + D_{1,2}(X_1)(z, w)xy + \dots, \quad (8a)$$

$$X_2 = X_2(z, w) + D_1(X_2)(z, w)x + D_2(X_2)(z, w)y + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_2)(z, w)x^2 + \\ + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_2)(z, w)y^2 + D_{1,2}(X_2)(z, w)xy + \dots, \quad (8b)$$

$$X_3 = X_3(z, w) + D_1(X_3)(z, w)x + D_2(X_3)(z, w)y + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_3)(z, w)x^2 + \\ + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_3)(z, w)y^2 + D_{1,2}(X_3)(z, w)xy + \dots, \quad (8c)$$

$$P = P(z, w) + D_1(P)(z, w)x + D_2(P)(z, w)y + \frac{1}{2}D_{1,1}(P)(z, w)x^2 + \\ + \frac{1}{2}D_{2,2}(P)(z, w)y^2 + D_{1,2}(P)(z, w)xy + \dots, \quad (8d)$$

$$f(\theta, w_A, w_B) = f(w_A, w_B) + D_1(f)(w_A, w_B)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f)(w_A, w_B)\theta^2 + \dots, \quad (9)$$

где, например,

$$X_1(w) = X_1(0, 0, w), \quad P(z, w) = P(0, 0, z, w), \\ D_1(X_1)(w) = \frac{\partial X_1(x, y, w)}{\partial x} \Big|_{x=y=0}, \quad D_2(X_1)(z, w) = \frac{\partial X_1(x, y, z, w)}{\partial y} \Big|_{x=y=0}, \\ D_{1,2}(X_2)(w) = \frac{\partial^2 X_2(x, y, w)}{\partial x \partial y} \Big|_{x=y=0}, \quad D_{1,1}(P)(z, w) = \frac{\partial^2 P(x, y, z, w)}{\partial x \partial x} \Big|_{x=y=0}, \\ f(w_A, w_B) = \chi(0, w_A, w_B), \quad D_1(f)(w_A, w_B) = \frac{\partial \chi(\theta, w_A, w_B)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0}.$$

3. Двумерные, трехмерные и четырехмерные геометрии локальной максимальной подвижности. В данном параграфе приводятся функции пары точек двумерных, трехмерных и четырехмерных геометрий локальной максимальной подвижности.

3.1. Двумерные геометрии локальной максимальной подвижности. Известен полный список двумерных геометрий локальной максимальной подвижности, содержащей геометрии с функциями пары точек:

$$f(A, B) = \sin y_A \sin y_B \cos(x_A - x_B) + \cos y_A \cos y_B; \quad (10)$$

$$f(A, B) = \operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \cos(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B; \quad (11)$$

$$f(A, B) = \operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \operatorname{ch}(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B; \quad (12)$$

$$f(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2; \quad (13)$$

$$f(A, B) = (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2; \quad (14)$$

$$f(A, B) = x_A y_B - x_B y_A; \quad (15)$$

$$f(A, B) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}; \quad (16)$$

$$f(A, B) = ((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2) e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}; \quad (17)$$

$$f(A, B) = \beta \ln(y_A - y_B) + \epsilon \ln(x_A - x_B); \quad (18)$$

$$f(A, B) = (x_A - x_B)^2 e^{2 \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}, \quad (19)$$

где $\beta, \gamma = \text{const}$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq 0, \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$. Эти геометрии получены Г. Г. Михайличенко при классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий (см. [13, 16]).

Функция (10) задает сферическую геометрию в проективной интерпретации, т.е. на сфере в трехмерном евклидовом пространстве, задаваемой уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Можно перейти к другой функции пары точек: $l(A, B) = (1 - f(A, B))/2$, которая в новых координатах $u = x$, $v = \text{ctg } \frac{y}{2}$ (стереографическая проекция) принимает вид (см. [4]):

$$l(A, B) = \frac{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos(u_A - u_B)}{(v_A^2 + 1)(v_B^2 + 1)}.$$

Введем еще одну замену координат: $p = v \cos u$, $q = v \sin u$, тогда функция $l(A, B)$ примет новый вид:

$$l(A, B) = \frac{(p_A - p_B)^2 + (q_A - q_B)^2}{(p_A^2 + q_A^2 + 1)(p_B^2 + q_B^2 + 1)}. \quad (20)$$

Функция (11) задает геометрию Лобачевского в проективной интерпретации, т.е. на двуполостном гиперboloиде в трехмерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $(+, +, -)$, задаваемом уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = -1$. Можно также перейти к функции: $l(A, B) = (1 + f(A, B))/2$, которая в координатах $u = x$, $v = \text{cth } \frac{y}{2}$ (стереографическая проекция) принимает вид (см. [4]):

$$l(A, B) = \frac{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos(u_A - u_B)}{(v_A^2 - 1)(v_B^2 - 1)}.$$

Введем, как и выше, замену координат: $p = v \cos u$, $q = v \sin u$, тогда для $l(A, B)$ получаем:

$$l(A, B) = \frac{(p_A - p_B)^2 + (q_A - q_B)^2}{(p_A^2 + q_A^2 - 1)(p_B^2 + q_B^2 - 1)}. \quad (21)$$

Функция (12) задает двумерную геометрию де Ситтера в проективной интерпретации, т.е. на однополостном гиперboloиде в трехмерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $(+, +, -)$, задаваемом уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 1$. Можно перейти к функции: $l(A, B) = (1 + f(A, B))/2$, которая в координатах $u = x$, $v = \text{cth } \frac{y}{2}$ (стереографическая проекция) принимает вид:

$$l(A, B) = \frac{-v_A^2 - v_B^2 + 2v_A v_B \text{ch}(u_A - u_B)}{(v_A^2 - 1)(v_B^2 - 1)}.$$

Введем замену координат: $p = v \text{sh } u$, $q = v \text{ch } u$, тогда $l(A, B)$ получаем:

$$l(A, B) = \frac{(p_A - p_B)^2 - (q_A - q_B)^2}{(p_A^2 - q_A^2 - 1)(p_B^2 - q_B^2 - 1)}. \quad (22)$$

Функция (13) задает евклидову геометрию, функция (14) — псевдоевклидову геометрию, (15) — симплектическую геометрию, (16) — симплицальную геометрию, (17) — собственно гильбергову геометрию, (18) — псевдогильбергову геометрию и, наконец, (19) — дуальногильбергову геометрию.

Функцию (20) легко записать в комплексной форме:

$$l(A, B) = \frac{(z_A - z_B)(\overline{z_A - z_B})}{(z_A \overline{z_A} + 1)(z_B \overline{z_B} + 1)}, \quad (23)$$

где $z = p + iq$, $i^2 = -1$. Функцию (21) также легко записать в комплексной форме:

$$l(A, B) = \frac{(z_A - z_B)(\overline{z_A - z_B})}{(z_A \overline{z_A} - 1)(z_B \overline{z_B} - 1)}. \quad (24)$$

Рассмотрим дробно-линейное преобразование $z = \frac{1+iw}{1-iw}$, где $w = x + iy$, которое функцию (24) приводит к виду (см. [4])

$$l(A, B) = -\frac{(w_A - w_B)(\overline{w_A - w_B})}{(w_A - \overline{w_A})(w_B - \overline{w_B})}.$$

Переходя к декартовым координатам, получаем

$$l(A, B) = \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}{4y_A y_B}. \quad (25)$$

Функцию (22) можно записать, используя двойные числа:

$$l(A, B) = \frac{(z_A - z_B)(\overline{z_A - z_B})}{(z_A \overline{z_A} + 1)(z_B \overline{z_B} + 1)}, \quad (26)$$

где $z = p + iq$, $\overline{z} = p - iq$, $|z|^2 = z\overline{z} = p^2 - q^2$, $i^2 = -1$. Рассмотрим дробно-линейное преобразование $z = i\frac{1+iw}{1-iw}$, где $w = x + iy$, которое функцию (26) приводит к виду

$$l(A, B) = \frac{(w_A - w_B)(\overline{w_A - w_B})}{(w_A - \overline{w_A})(w_B - \overline{w_B})}.$$

Переходя к декартовым координатам, получаем

$$f(A, B) = \frac{(x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2}{4y_A y_B}. \quad (27)$$

От функций пары точек (10)–(12) удобно перейти к следующим функциям:

$$f(A, B) = m_A m_B + n_A n_B + l_A l_B, m^2 + n^2 + l^2 > 0; \quad (28)$$

$$f(A, B) = m_A m_B + n_A n_B - l_A l_B, m^2 + n^2 - l^2 < 0; \quad (29)$$

$$f(A, B) = m_A m_B - n_A n_B - l_A l_B, m^2 - n^2 - l^2 < 0. \quad (30)$$

Заметим, что на сфере функции пары точек (10) и (28) совпадают; группы движений, сохраняющие эти функции также совпадают. Подобный вывод справедлив и для функций пар точек (11) и (29), а также для функций (12) и (30).

3.2. Трехмерные геометрии локальной максимальной подвижности. Известен список трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности, содержащей геометрии, задаваемые функциями пары точек:

$$f(A, B) = \sin z_A \sin z_B [\sin y_A \sin y_B \cos(x_A - x_B) + \cos y_A \cos y_B] + \cos z_A \cos z_B; \quad (31)$$

$$f(A, B) = \operatorname{ch} z_A \operatorname{ch} z_B [\operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \cos(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B] + \operatorname{sh} z_A \operatorname{sh} z_B; \quad (32)$$

$$f(A, B) = \operatorname{sh} z_A \operatorname{sh} z_B [\operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \cos(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B] + \operatorname{ch} z_A \operatorname{ch} z_B; \quad (33)$$

$$f(A, B) = \operatorname{sh} z_A \operatorname{sh} z_B [\operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \operatorname{ch}(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B] + \operatorname{ch} z_A \operatorname{ch} z_B; \quad (34)$$

$$f(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2; \quad (35)$$

$$f(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2; \quad (36)$$

$$f(A, B) = x_A y_B - x_B y_A + z_A - z_B; \quad (37)$$

$$f(A, B) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} + z_A + z_B; \quad (38)$$

$$f(A, B) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} e^{z_A + z_B}; \quad (39)$$

$$f(A, B) = \operatorname{arctg} \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} + z_A + z_B; \quad (40)$$

$$f(A, B) = ((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2) e^{2z_A + 2z_B}; \quad (41)$$

$$f(A, B) = ((x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2) e^{2z_A + 2z_B}; \quad (42)$$

$$f(A, B) = ((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2) e^{2\gamma \arctg \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} + 2z_A + 2z_B}; \quad (43)$$

$$f(A, B) = \beta \ln(y_A - y_B) + \varepsilon \ln(x_A - x_B) + z_A + z_B; \quad (44)$$

$$f(A, B) = (x_A - x_B)^2 e^{2\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} + 2z_A + 2z_B}, \quad (45)$$

где $\beta, \gamma = \text{const}$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq 0, \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$. Геометрии из этого списка, кроме (40), получены В. Х. Левом при классификации трехмерных феноменологически симметричных геометрий (см. [12]). Геометрия (40) найдена В. А. Кыровым (см. [9]). Функция (31) задает сферическую геометрию в проективной интерпретации, т.е. геометрию на сфере в четырехмерном евклидовом пространстве, задаваемой уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1$. Перейдем к другой функции $l(A, B) = (1 - f(A, B))/2$ и введем новые координаты с помощью стереографической проекции (см. [3]):

$$\begin{aligned} \sin z \sin y \cos x &= \frac{2p}{p^2 + q^2 + r^2 + 1}, & \sin z \sin y \sin x &= \frac{2q}{p^2 + q^2 + r^2 + 1}, \\ \sin z \cos y &= \frac{2r}{p^2 + q^2 + r^2 + 1}, & \cos z &= \frac{p^2 + q^2 + r^2 - 1}{p^2 + q^2 + r^2 + 1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$l(A, B) = \frac{(p_A - p_B)^2 + (q_A - q_B)^2 + (r_A - r_B)^2}{(p_A^2 + q_A^2 + r_A^2 + 1)(p_B^2 + q_B^2 + r_B^2 + 1)}. \quad (46)$$

Функция (32) задает геометрию Лобачевского в проективной интерпретации, т.е. геометрию на двуполостном гиперboloиде в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $(+, +, +, -)$, задаваемом уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 = -1$. Рассмотрим другую функцию пары точек: $l(A, B) = -(1 + f(A, B))/2$. Введем стереографические координаты по формулам

$$\begin{aligned} \text{ch } z \text{ sh } y \cos x &= \frac{2p}{p^2 + q^2 + r^2 - 1}, & \text{ch } z \text{ sh } y \sin x &= \frac{2q}{p^2 + q^2 + r^2 - 1}, \\ \text{ch } z \text{ ch } y &= \frac{p^2 + q^2 + r^2 + 1}{p^2 + q^2 + r^2 - 1}, & \text{sh } z &= \frac{2r}{p^2 + q^2 + r^2 - 1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$l(A, B) = \frac{(p_A - p_B)^2 + (q_A - q_B)^2 + (r_A - r_B)^2}{(p_A^2 + q_A^2 + r_A^2 - 1)(p_B^2 + q_B^2 + r_B^2 - 1)}. \quad (47)$$

Функция (33) задает геометрию де Ситтера в проективной интерпретации, т.е. геометрию на однополостном гиперboloиде в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $(+, +, +, -)$, задаваемом уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 = 1$. Переходим к другой функции $l(A, B) = (1 - f(A, B))/2$. Введем стереографические координаты

$$\begin{aligned} \text{sh } z \text{ sh } y \cos x &= \frac{2p}{p^2 + q^2 - r^2 + 1}, & \text{sh } z \text{ sh } y \sin x &= \frac{2q}{p^2 + q^2 - r^2 + 1}, \\ \text{sh } z \text{ ch } y &= \frac{2r}{p^2 + q^2 - r^2 + 1}, & \text{ch } z &= \frac{p^2 + q^2 - r^2 - 1}{p^2 + q^2 - r^2 + 1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$l(A, B) = \frac{(p_A - p_B)^2 + (q_A - q_B)^2 - (r_A - r_B)^2}{(p_A^2 + q_A^2 - r_A^2 + 1)(p_B^2 + q_B^2 - r_B^2 + 1)}. \quad (48)$$

Функция (34) задает антидезиттерову геометрию в проективной интерпретации, т.е. геометрию на гиперboloиде в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $(+, +, -, -)$, задаваемом уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \alpha_4^2 = -1$. Переходим к другой функции пары точек $l(A, B) = (1 + f(A, B))/2$. В стереографических координатах будем иметь

$$\begin{aligned} \text{sh } z \text{ sh } y \text{ ch } x &= \frac{2p}{p^2 + q^2 - r^2 - 1}, & \text{sh } z \text{ sh } y \text{ sh } x &= \frac{p^2 + q^2 - r^2 + 1}{p^2 + q^2 - r^2 - 1}, \\ \text{sh } z \text{ ch } y &= \frac{2r}{p^2 + q^2 - r^2 - 1}, & \text{ch } z &= \frac{2q}{p^2 + q^2 - r^2 - 1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$l(A, B) = -\frac{(p_A - p_B)^2 + (q_A - q_B)^2 - (r_A - r_B)^2}{(p_A^2 + q_A^2 - r_A^2 - 1)(p_B^2 + q_B^2 - r_B^2 - 1)}. \quad (49)$$

Функция (35) задает евклидову геометрию, функция (36) — псевдоевклидову геометрию, функция (37) — симплектическую трехмерную геометрию, функция (38) — симплицальную геометрию I типа, функция (39) — симплицальную геометрию II типа, функция (40) — симплицальную геометрию III типа, функция (41) — особое расширение евклидовой геометрии, функция (42) — особое расширение псевдоевклидовой геометрии, функция (43) — собственно гельмгольцеву геометрию, функция (44) — псевдогельмгольцеву геометрию и, наконец, функция (45) — дуально-гельмгольцеву геометрию.

В функции пары точек (47) переходим к новым координатам:

$$p = \frac{2x}{(1+z)^2 + x^2 + y^2}, \quad q = \frac{2y}{(1+z)^2 + x^2 + y^2}, \quad r = \frac{1 - x^2 - y^2 - z^2}{(1+z)^2 + x^2 + y^2};$$

при этом

$$p^2 + q^2 + r^2 - 1 = \frac{-4z}{(1+z)^2 + x^2 + y^2}.$$

Тогда функция (47) примет вид

$$l(A, B) = \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}{4z_A z_B}. \quad (50)$$

Аналогично, в функции (48) переходим к новым координатам

$$p = \frac{2x}{(1+z)^2 - x^2 - y^2}, \quad q = \frac{2y}{(1+z)^2 - x^2 - y^2}, \quad r = \frac{1 + x^2 + y^2 - z^2}{(1+z)^2 - x^2 - y^2};$$

при этом

$$p^2 + q^2 - r^2 + 1 = \frac{4z}{(1+z)^2 - x^2 - y^2}.$$

Тогда (48) примет вид

$$l(A, B) = \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2}{4z_A z_B}, \quad (51)$$

Аналогично, в функции (49) переходим к координатам

$$p = \frac{2y}{(1-z)^2 - x^2 + y^2}, \quad r = \frac{2x}{(1-z)^2 - x^2 + y^2}, \quad q = \frac{1 + x^2 - y^2 - z^2}{(1-z)^2 - x^2 + y^2};$$

при этом

$$p^2 + q^2 - r^2 - 1 = \frac{4z}{(1-z)^2 - x^2 + y^2}.$$

Тогда (49) примет вид

$$l(A, B) = \frac{(x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2}{4z_A z_B}. \quad (52)$$

От функций пары точек (31)–(34) удобно перейти к следующим функциям:

$$f(A, B) = m_A m_B + n_A n_B + l_A l_B + k_A k_B, m^2 + n^2 + l^2 + k^2 > 0; \quad (53)$$

$$f(A, B) = m_A m_B + n_A n_B - l_A l_B + k_A k_B, m^2 + n^2 - l^2 + k^2 < 0; \quad (54)$$

$$f(A, B) = m_A m_B + n_A n_B - l_A l_B + k_A k_B, m^2 + n^2 - l^2 + k^2 > 0; \quad (55)$$

$$f(A, B) = m_A m_B - n_A n_B - l_A l_B + k_A k_B, m^2 - n^2 - l^2 + k^2 > 0. \quad (56)$$

Заметим, что на сфере функции пары точек (31) и (53) совпадают; группы движений, сохраняющие эти функции также совпадают. Подобный вывод справедлив и для функций пар точек (32) и (54), для функций (33) и (55), а также для функций (34) и (56).

3.3. *Четырехмерные геометрии локальной максимальной подвижности.* Известен список четырехмерных геометрий локальной максимальной подвижности, содержащей геометрии, задаваемые функциями пары точек:

$$f(A, B) = \sin w_A \sin w_B \left[\sin z_A \sin z_B \times \right. \\ \left. \times [\sin y_A \sin y_B \cos(x_A - x_B) + \cos y_A \cos y_B] + \cos z_A \cos z_B \right] + \cos w_A \cos w_B; \quad (57)$$

$$f(A, B) = \operatorname{ch} w_A \operatorname{ch} w_B \left[\operatorname{ch} z_A \operatorname{ch} z_B \times \right. \\ \left. \times [\operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \cos(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B] + \operatorname{sh} z_A \operatorname{sh} z_B \right] + \operatorname{sh} w_A \operatorname{sh} w_B; \quad (58)$$

$$f(A, B) = \operatorname{sh} w_A \operatorname{sh} w_B \left[\operatorname{ch} z_A \operatorname{ch} z_B \times \right. \\ \left. \times [\operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \cos(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B] + \operatorname{sh} z_A \operatorname{sh} z_B \right] + \operatorname{ch} w_A \operatorname{ch} w_B; \quad (59)$$

$$f(A, B) = \operatorname{ch} w_A \operatorname{ch} w_B \left[\operatorname{sh} z_A \operatorname{sh} z_B \times \right. \\ \left. \times [\operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \cos(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B] + \operatorname{ch} z_A \operatorname{ch} z_B \right] - \operatorname{sh} w_A \operatorname{sh} w_B; \quad (60)$$

$$f(A, B) = \operatorname{ch} w_A \operatorname{ch} w_B \left[\operatorname{sh} z_A \operatorname{sh} z_B \times \right. \\ \left. \times [\operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \operatorname{ch}(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B] + \operatorname{ch} z_A \operatorname{ch} z_B \right] - \operatorname{sh} w_A \operatorname{sh} w_B; \quad (61)$$

$$f(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 + (w_A - w_B)^2; \quad (62)$$

$$f(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - (w_A - w_B)^2; \quad (63)$$

$$f(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 - (w_A - w_B)^2; \quad (64)$$

$$f(A, B) = ((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2) e^{w_A + w_B}; \quad (65)$$

$$f(A, B) = ((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2) e^{w_A + w_B}; \quad (66)$$

$$f(A, B) = x_A y_B - x_B y_A + z_A w_B - z_B w_A, \quad (67)$$

где $\beta, \gamma = \text{const}$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq 0, \pm 1$. Геометрии из этого списка найдены В. А. Кыровым (см. [6–8, 11]) при классификации феноменологически симметричных геометрий методом вложения. Функция пары точек (57) задает сферическую геометрию в проективной интерпретации, т.е. геометрию на сфере в пятимерном евклидовом пространстве, задаваемой уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 = 1$.

Переходим к функции $l(A, B) = (1 - f(A, B))/2$. Введем стереографические координаты (см. [3])

$$\begin{aligned} \sin w \sin z \sin y \cos x &= \frac{2p}{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 + 1}, & \sin w \sin z \sin y \sin x &= \frac{2q}{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 + 1}, \\ \sin w \sin z \cos y &= \frac{2r}{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 + 1}, & \sin w \cos z &= \frac{2t}{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 + 1}, \\ \cos w &= \frac{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 - 1}{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$l(A, B) = \frac{(p_A - p_B)^2 + (q_A - q_B)^2 + (r_A - r_B)^2 + (t_A - t_B)^2}{(p_A^2 + q_A^2 + r_A^2 + t_A^2 + 1)(p_B^2 + q_B^2 + r_B^2 + t_B^2 + 1)}. \quad (68)$$

Функция (58) задает геометрию Лобачевского в проективной интерпретации, т.е. геометрию на двуполостном гиперboloиде в пятимерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры

$(+, +, +, +, -)$, задаваемом уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 - \alpha_5^2 = -1$. Переходим к функции $l(A, B) = -(1 + f(A, B))/2$. Введем стереографические координаты:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} w \operatorname{ch} z \operatorname{sh} y \cos x &= \frac{2p}{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 - 1}, & \operatorname{ch} w \operatorname{ch} z \operatorname{sh} y \sin x &= \frac{2q}{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 - 1}, \\ \operatorname{ch} w \operatorname{ch} z \operatorname{ch} y &= \frac{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 + 1}{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 - 1}, & \operatorname{ch} w \operatorname{sh} z &= \frac{2r}{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 - 1}, \\ \operatorname{sh} w &= \frac{2t}{p^2 + q^2 + r^2 + t^2 - 1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$l(A, B) = \frac{(p_A - p_B)^2 + (q_A - q_B)^2 + (r_A - r_B)^2 + (t_A - t_B)^2}{(p_A^2 + q_A^2 + r_A^2 + t_A^2 - 1)(p_B^2 + q_B^2 + r_B^2 + t_B^2 - 1)}. \quad (69)$$

Функция (59) задает геометрию де Ситтера в проективной интерпретации, т.е. геометрию на однополостном гиперboloиде в пятимерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $(+, +, +, +, -)$, задаваемом уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 - \alpha_5^2 = 1$. Переходим к функции $l(A, B) = (1 - f(A, B))/2$. Введем стереографические координаты

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} w \operatorname{sh} z \operatorname{sh} y \cos x &= \frac{2p}{p^2 + q^2 + r^2 - t^2 + 1}, & \operatorname{sh} w \operatorname{sh} z \operatorname{sh} y \sin x &= \frac{2q}{p^2 + q^2 + r^2 - t^2 + 1}, \\ \operatorname{sh} w \operatorname{sh} z \operatorname{ch} y &= \frac{2t}{p^2 + q^2 + r^2 - t^2 + 1}, & \operatorname{sh} w \operatorname{ch} z &= \frac{2r}{p^2 + q^2 + r^2 - t^2 + 1}, \\ \operatorname{ch} w &= \frac{p^2 + q^2 + r^2 - t^2 - 1}{p^2 + q^2 + r^2 - t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$l(A, B) = \frac{(p_A - p_B)^2 + (q_A - q_B)^2 + (r_A - r_B)^2 - (t_A - t_B)^2}{(p_A^2 + q_A^2 + r_A^2 - t_A^2 + 1)(p_B^2 + q_B^2 + r_B^2 - t_B^2 + 1)}. \quad (70)$$

Функция (60) задает антидезиттерову геометрию в проективной интерпретации, т.е. геометрию на поверхности в пятимерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $(+, +, +, -, -)$, задаваемом уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 - \alpha_5^2 = 1$. Переходим к функции $l(A, B) = -(1 + f(A, B))/2$. Стереографические координаты:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} w \operatorname{sh} z \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x &= \frac{2p}{p^2 + q^2 - r^2 - t^2 - 1}, & \operatorname{ch} w \operatorname{sh} z \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x &= \frac{2q}{p^2 + q^2 - r^2 - t^2 - 1}, \\ \operatorname{ch} w \operatorname{sh} z \operatorname{ch} y &= \frac{2t}{p^2 + q^2 - r^2 - t^2 - 1}, & \operatorname{ch} w \operatorname{ch} z &= \frac{2r}{p^2 + q^2 - r^2 - t^2 - 1}, \\ \operatorname{sh} w &= \frac{p^2 + q^2 + r^2 - t^2 + 1}{p^2 + q^2 - r^2 - t^2 - 1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$l(A, B) = \frac{(p_A - p_B)^2 + (q_A - q_B)^2 + (r_A - r_B)^2 - (t_A - t_B)^2}{(p_A^2 + q_A^2 + r_A^2 - t_A^2 - 1)(p_B^2 + q_B^2 + r_B^2 - t_B^2 - 1)}. \quad (71)$$

Функция (61) задает геометрию де Ситтера 2-го рода в проективной интерпретации, т.е. геометрию на поверхности в пятимерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $(+, +, +, -, -)$, задаваемом уравнением $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \alpha_4^2 - \alpha_5^2 = 1$. Переходим от которой к функции $l(A, B) = (1 + f(A, B))/2$. Введем новые координаты, используя стереографическую проекцию:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} w \operatorname{sh} z \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x &= \frac{2p}{p^2 + q^2 - r^2 - t^2 + 1}, & \operatorname{ch} w \operatorname{sh} z \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x &= \frac{2r}{p^2 + q^2 - r^2 - t^2 + 1}, \\ \operatorname{ch} w \operatorname{sh} z \operatorname{ch} y &= \frac{2t}{p^2 + q^2 - r^2 - t^2 + 1}, & \operatorname{ch} w \operatorname{ch} z &= \frac{2q}{p^2 + q^2 - r^2 - t^2 + 1}, \\ \operatorname{sh} w &= \frac{p^2 + q^2 - r^2 - t^2 - 1}{p^2 + q^2 - r^2 - t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$l(A, B) = \frac{(p_A - p_B)^2 + (q_A - q_B)^2 - (r_A - r_B)^2 - (t_A - t_B)^2}{(p_A^2 + q_A^2 - r_A^2 - t_A^2 + 1)(p_B^2 + q_B^2 - r_B^2 - t_B^2 + 1)}. \quad (72)$$

Функция (62) задает евклидову геометрию, функция (63) — псевдоевклидову геометрию сигнатурой $(+, +, +, -)$, функция (64) — псевдоевклидову геометрию сигнатурой $(+, +, +, -)$, функция (65) — особое расширение евклидовой геометрии, функция (66) — особое расширение псевдоевклидовой геометрии и, наконец, функция (67) — симплектическую геометрию.

В функции пары точек (69) переходим к новым координатам:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2x}{(1+w)^2 + x^2 + y^2 + z^2}, & q &= \frac{2y}{(1+w)^2 + x^2 + y^2 + z^2}, \\ r &= \frac{2z}{(1+w)^2 + x^2 + y^2 + z^2}, & t &= \frac{1 - x^2 - y^2 - z^2 - w^2}{(1+w)^2 + x^2 + y^2 + z^2}; \end{aligned}$$

при этом

$$p^2 + q^2 + r^2 + t^2 - 1 = \frac{-4w}{(1+w)^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Тогда (69) примет вид

$$l(A, B) = \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 + (w_A - w_B)^2}{4w_A w_B}, \quad (73)$$

В функции (70) введем координаты

$$\begin{aligned} p &= \frac{2x}{(1+w)^2 - x^2 - y^2 - z^2}, & q &= \frac{2y}{(1+w)^2 - x^2 - y^2 - z^2}, \\ r &= \frac{2z}{(1+w)^2 - x^2 - y^2 - z^2}, & t &= \frac{1 + x^2 + y^2 + z^2 - w^2}{(1+w)^2 - x^2 - y^2 - z^2}, \end{aligned}$$

причем

$$p^2 + q^2 + r^2 - t^2 + 1 = \frac{4w}{(1+w)^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Тогда для (70) имеем

$$l(A, B) = \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - (w_A - w_B)^2}{4w_A w_B}, \quad (74)$$

Функции (71) запишем в координатах

$$\begin{aligned} p &= \frac{2x}{-(1+w)^2 - x^2 - y^2 + z^2}, & q &= \frac{2y}{-(1+w)^2 - x^2 - y^2 + z^2}, \\ t &= \frac{2z}{-(1+w)^2 - x^2 - y^2 + z^2}, & r &= \frac{-1 + x^2 + y^2 - z^2 + w^2}{-(1+w)^2 - x^2 - y^2 + z^2}, \end{aligned}$$

причем

$$p^2 + q^2 + r^2 - t^2 + 1 = \frac{4w}{-(1+w)^2 - x^2 - y^2 + z^2}.$$

Тогда функция пары точек (71) примет вид

$$l(A, B) = \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 + (w_A - w_B)^2}{4w_A w_B}, \quad (75)$$

В функции пары точек (72) переходим к новым координатам

$$\begin{aligned} p &= \frac{2x}{(1+w)^2 - x^2 - y^2 + z^2}, & q &= \frac{2y}{(1+w)^2 - x^2 - y^2 + z^2}, \\ t &= \frac{2z}{(1+w)^2 - x^2 - y^2 + z^2}, & r &= \frac{1 + x^2 + y^2 - z^2 - w^2}{(1+w)^2 - x^2 - y^2 + z^2}; \end{aligned}$$

при этом

$$p^2 + q^2 - r^2 - t^2 + 1 = \frac{4w}{(1+w)^2 - x^2 - y^2 + z^2}.$$

Тогда функция пары точек (72) примет вид

$$l(A, B) = \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 - (w_A - w_B)^2}{4w_A w_B}. \quad (76)$$

От функций пары точек (57)–(61) удобно перейти к следующим функциям:

$$f(A, B) = m_A m_B + n_A n_B + l_A l_B + k_A k_B + j_A j_B, m^2 + n^2 + l^2 + k^2 + j^2 > 0; \quad (77)$$

$$f(A, B) = m_A m_B + n_A n_B - l_A l_B + k_A k_B + j_A j_B, m^2 + n^2 - l^2 + k^2 + j^2 < 0; \quad (78)$$

$$f(A, B) = m_A m_B + n_A n_B - l_A l_B + k_A k_B - j_A j_B, m^2 + n^2 - l^2 + k^2 + j^2 > 0; \quad (79)$$

$$f(A, B) = m_A m_B + n_A n_B - l_A l_B + k_A k_B - j_A j_B, m^2 + n^2 - l^2 + k^2 - j^2 > 0; \quad (80)$$

$$f(A, B) = m_A m_B - n_A n_B - l_A l_B + k_A k_B - j_A j_B, m^2 - n^2 - l^2 + k^2 - j^2 > 0. \quad (81)$$

Заметим, что на сфере функции пары точек (57) и (77) совпадают; группы движений, сохраняющие эти функции, также совпадают. Подобный вывод справедлив и для функции пар точек (58) и (78), для функций (59) и (79), для функций (60) и (80), а также для функций (61) и (81).

4. Основные результаты. В данном пункте приводятся результаты решения задачи вложения для двумерных и трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности.

Сформулируем теорему вложения для двумерных геометрий локальной максимальной подвижности.

Теорема 1. *Рассмотрим произвольную точку $C \in M$ и ее координатную окрестность U , $\dim M = 3$. Возьмем также такие две точки $A, B \in U$ с окрестностями $U(A)$ и $U(B)$, что $U(A) \cup U(B) \subset U$, причем $\langle A, B \rangle, \langle A', B' \rangle \in S_f$ при любых $A' \in U(A)$ и $\forall B' \in U(B)$. Тогда функция пары точек (2) в аналитическом многообразии M , являющаяся двухточечным инвариантом шестипараметрической группы движений, в окрестности $U(A) \times U(B)$ в подходящих локальных координатах и масштабном преобразовании $(\varphi(f) \rightarrow f)$ имеет один из следующих видов:*

- (i) для функции θ вида (28): (53), (54), (55), (35);
- (ii) для функции θ вида (29): (54), (55), (56), (36);
- (iii) для функции θ вида (30): (54), (55), (56), (36);
- (iv) для функции θ вида (13): (35), (36), (41), (50), (51);
- (v) для функции θ вида (14): (36), (42), (52);
- (vi) для функции θ вида (15): (37);
- (vii) для функции θ вида (16): (38), (39), (42);
- (viii) для функции θ вида (17): (43);
- (ix) для функции θ вида (18): (44);
- (x) для функции θ вида (19): (45);
- (xi) для функции θ вида (20): (41);
- (xii) для функции θ вида (21): (41);
- (xiii) для функции θ вида (22): (42).

Для доказательства этой теоремы, как сказано выше, записываются функциональные уравнения специального вида, которые получаются при подстановке формул (3), (4) или

$$X = X_1 \partial_m + X_2 \partial_n + X_3 \partial_l + P \partial_k$$

в условие локальной инвариантности (2). В явном виде эти формулы записываются следующим образом:

(i) для функции пары точек (28):

$$\left[m_A X_1(B) + m_B X_1(A) + n_A X_2(B) + n_B X_2(A) + l_A X_3(B) + l_B X_3(A) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial k_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial k_B} \right) = 0;$$

(ii) для функции пары точек (29):

$$\left[m_A X_1(B) + m_B X_1(A) + n_A X_2(B) + n_B X_2(A) - l_A X_3(B) - l_B X_3(A) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial k_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial k_B} \right) = 0,$$

(iii) для функции пары точек (30):

$$\left[m_A X_1(B) + m_B X_1(A) - n_A X_2(B) - n_B X_2(A) - l_A X_3(B) - l_B X_3(A) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial k_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial k_B} \right) = 0,$$

(iv) для функции пары точек (13):

$$2 \left[(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) + (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0,$$

(v) для функции пары точек (14):

$$2 \left[(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) - (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0,$$

(vi) для функции пары точек (15):

$$\left[y_B(X_1(A) - y_A X_1(B) - x_B X_2(A) + x_A X_2(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0,$$

(vii) для функции пары точек (16):

$$\left[(x_A - x_B)(X_2(A) - X_2(B)) - (y_A - y_B)(X_1(A) - X_1(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + (y_A - y_B)^2 \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0,$$

(viii) для функции пары точек (17):

$$2 \left[((x_A - x_B) - \gamma(y_A - y_B))(X_1(A) - X_1(B)) + ((y_A - y_B) + \gamma(x_A - x_B))(X_2(A) - X_2(B)) \right] \times \\ \times \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + e^{-2\gamma \arctg \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}} \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0,$$

(ix) для функции пары точек (18):

$$\left[\beta(x_A - x_B)(X_2(A) - X_2(B)) + \varepsilon(y_A - y_B)(X_1(A) - X_1(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + (x_A - x_B)(y_A - y_B) \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0,$$

(x) для функции пары точек (19):

$$2 \left[((x_A - x_B) - (y_A - y_B))(X_1(A) - X_1(B)) + (x_A - x_B)(X_2(A) - X_2(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \\ + \exp \left(-2 \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \right) \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0.$$

(xi) для функции пары точек (20):

$$2 \left[\frac{(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) + (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B))}{(x_A^2 + y_A^2 + 1)(x_B^2 + y_B^2 + 1)} - \right. \\ \left. - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 + 1)^2(x_B^2 + y_B^2 + 1)} (x_A X_1(A) + y_A X_2(A)) - \right. \\ \left. - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 + 1)(x_B^2 + y_B^2 + 1)^2} (x_B X_1(B) + y_B X_2(B)) \right] + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0,$$

(xii) для функции пары точек (21):

$$2 \left[\frac{(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) + (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B))}{(x_A^2 + y_A^2 - 1)(x_B^2 + y_B^2 - 1)} - \right. \\ \left. - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 - 1)^2(x_B^2 + y_B^2 - 1)} (x_A X_1(A) + y_A X_2(A)) - \right. \\ \left. - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 - 1)(x_B^2 + y_B^2 - 1)^2} (x_B X_1(B) + y_B X_2(B)) \right] + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0,$$

(xiii) для функции пары точек (22):

$$2 \left[\frac{(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) - (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B))}{(x_A^2 - y_A^2 - 1)(x_B^2 - y_B^2 - 1)} - \right. \\ \left. - \frac{(x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2}{(x_A^2 - y_A^2 - 1)^2(x_B^2 - y_B^2 - 1)} (x_A X_1(A) - y_A X_2(A)) - \right. \\ \left. - \frac{(x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2}{(x_A^2 - y_A^2 - 1)(x_B^2 - y_B^2 - 1)^2} (x_B X_1(B) - y_B X_2(B)) \right] + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0.$$

Эти функциональные уравнения решаются аналитически, для чего неизвестные (компоненты оператора алгебры Ли и функция χ) представляются рядами Тейлора (7)–(9), а также учитываются условия невырожденности (3). Подстановка этих разложений в выше выписанные функциональные уравнения приводит к задаче перебора коэффициентов рядов Тейлора, которая существенно упрощается с применением математического пакета программ Maple 17 (см. [5]). Заметим, что при записи функциональных уравнений для функций пар точек (20)–(22) координаты p и q переобозначены через x и y .

Теперь сформулируем теорему вложения для трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности.

Теорема 2. *Рассмотрим произвольную точку $C \in M$ и ее координатную окрестность U , $\dim M = 4$. Возьмем также две точки $A, B \in U$ с окрестностями $U(A)$ и $U(B)$ такие, что $U(A) \cup U(B) \subset U$, причем $\langle A, B \rangle, \langle A', B' \rangle \in S_f$, $\forall A' \in U(A)$, $\forall B' \in U(B)$. Тогда функция (2) в аналитическом многообразии M , являющаяся двухточечным инвариантом десятипараметрической группы движений, в окрестности $U(A) \times U(B)$ в подходящих локальных координатах и масштабном преобразовании ($\varphi(f) \rightarrow f$) имеет один из следующих видов:*

- (i) для функции θ вида (53): (77), (78), (79), (62), (63);
- (ii) для функции θ вида (54): (78), (79), (80), (81), (63), (64);
- (iii) для функции θ вида (55): (78), (79), (80), (81), (63), (64);
- (iv) для функции θ вида (56): (80), (81), (64);

- (v) для функции θ вида (35): (62), (63), (65), (73), (74);
- (vi) для функции θ вида (36): (63), (64), (66), (75), (76);
- (vii) для функции θ вида (37): (67);
- (viii) для функции θ вида (38)–(45): нет;
- (ix) для функции θ вида (46): (65);
- (x) для функции θ вида (47): (65);
- (xi) для функции θ вида (48): (66);
- (xii) для функции θ вида (49): (66).

Для доказательства теоремы, как сказано выше, записываются функциональные уравнения специального вида, которые получаются при подстановке формул (3), (5) или

$$X = X_1\partial_m + X_2\partial_n + X_3\partial_l + X_4\partial_k + P\partial_j$$

в условие локальной инвариантности (2). В явном виде они имеют следующую запись:

- (i) для функции пары точек (53):

$$\begin{aligned} & \left[m_A X_1(B) + m_B X_1(A) + n_A X_2(B) + n_B X_2(A) + l_A X_3(B) + l_B X_3(A) + \right. \\ & \quad \left. + k_A X_4(B) + k_B X_4(A) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial j_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial j_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

- (ii) для функции пары точек (54):

$$\begin{aligned} & \left[m_A X_1(B) + m_B X_1(A) + n_A X_2(B) + n_B X_2(A) - l_A X_3(B) - l_B X_3(A) + \right. \\ & \quad \left. + k_A X_4(B) + k_B X_4(A) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial j_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial j_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

- (iii) для функции пары точек (55):

$$\begin{aligned} & \left[m_A X_1(B) + m_B X_1(A) + n_A X_2(B) + n_B X_2(A) - l_A X_3(B) - l_B X_3(A) + \right. \\ & \quad \left. + k_A X_4(B) + k_B X_4(A) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial j_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial j_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

- (iv) для функции пары точек (56):

$$\begin{aligned} & \left[m_A X_1(B) + m_B X_1(A) - n_A X_2(B) - n_B X_2(A) - l_A X_3(B) - l_B X_3(A) + \right. \\ & \quad \left. + k_A X_4(B) + k_B X_4(A) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial j_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial j_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

- (v) для функции пары точек (35):

$$\begin{aligned} & 2 \left[(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) + (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B)) + \right. \\ & \quad \left. + (z_A - z_B)(X_3(A) - X_3(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

- (vi) для функции пары точек (36):

$$\begin{aligned} & 2 \left[(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) + (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B)) - \right. \\ & \quad \left. - (z_A - z_B)(X_3(A) - X_3(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(vii) для функции пары точек (37):

$$\begin{aligned} & \left[y_B(X_1(A) - y_A X_1(B) - x_B X_2(A) + x_A X_2(B) + X_3(A) - X_3(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \\ & + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(viii) для функции пары точек (38):

$$\begin{aligned} & \left[(x_A - x_B)(X_2(A) - X_2(B)) - (y_A - y_B)(X_1(A) - X_1(B)) + \right. \\ & \left. + (x_A - x_B)^2(X_3(A) + X_3(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + (x_A - x_B)^2 \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(ix) для функции пары точек (39):

$$\begin{aligned} & \left[(x_A - x_B)(X_2(A) - X_2(B)) - (y_A - y_B)(X_1(A) - X_1(B)) + \right. \\ & \left. + (x_A - x_B)^2(X_3(A) + X_3(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \\ & + (x_A - x_B)^2 e^{-z_A - z_B} \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(x) для функции пары точек (40):

$$\begin{aligned} & \left[(x_A - x_B)(X_2(A) - X_2(B)) - (y_A - y_B)(X_1(A) - X_1(B)) + \right. \\ & \left. + [(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2](X_3(A) + X_3(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \\ & + [(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2] \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(xi) для функции пары точек (41):

$$\begin{aligned} & 2 \left[(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) + (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B)) + \right. \\ & \left. + [(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2](X_3(A) + X_3(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \\ & + e^{-2z_A - 2z_B} \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(xii) для функции пары точек (42):

$$\begin{aligned} & 2 \left[(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) - (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B)) + \right. \\ & \left. + [(x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2](X_3(A) + X_3(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \\ & + e^{-2z_A - 2z_B} \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(xiii) для функции пары точек (43):

$$\begin{aligned} & 2 \left[((x_A - x_B) - \gamma(y_A - y_B))(X_1(A) - X_1(B)) + ((y_A - y_B) + \gamma(x_A - x_B))(X_2(A) - X_2(B)) + \right. \\ & \left. + [(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2](X_3(A) + X_3(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \\ & + \exp \left(-2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \right) \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(xiv) для функции пары точек (44):

$$\begin{aligned} & \left[\beta(x_A - x_B)(X_2(A) - X_2(B)) + \varepsilon(y_A - y_B)(X_1(A) - X_1(B)) + \right. \\ & \quad \left. + (x_A - x_B)(y_A - y_B)(X_3(A) + X_3(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \\ & \quad + (x_A - x_B)(y_A - y_B) \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(xv) для функции пары точек (45):

$$\begin{aligned} & 2 \left[((x_A - x_B) - (y_A - y_B))(X_1(A) - X_1(B)) + (x_A - x_B)(X_2(A) - X_2(B)) + \right. \\ & \quad \left. + (x_A - x_B)^2(X_3(A) + X_3(B)) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \\ & \quad + \exp \left(-2 \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \right) \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(xvi) для функции пары точек (46):

$$\begin{aligned} & 2 \left[\frac{(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) + (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B)) + (z_A - z_B)(X_3(A) - X_3(B))}{(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 + 1)(x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 + 1)} - \right. \\ & \quad - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 + 1)^2(x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 + 1)} (x_A X_1(A) + y_A X_2(A) + z_A X_3(A)) - \\ & \quad - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 + 1)(x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 + 1)^2} (x_B X_1(B) + y_B X_2(B) + z_B X_3(B)) \left. \right] + \\ & \quad + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(xvii) для функции пары точек (47):

$$\begin{aligned} & 2 \left[\frac{(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) + (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B)) + (z_A - z_B)(X_3(A) - X_3(B))}{(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - 1)(x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 - 1)} - \right. \\ & \quad - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - 1)^2(x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 - 1)} (x_A X_1(A) + y_A X_2(A) + z_A X_3(A)) - \\ & \quad - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - 1)(x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 - 1)^2} (x_B X_1(B) + y_B X_2(B) + z_B X_3(B)) \left. \right] + \\ & \quad + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(xviii) для функции пары точек (48):

$$\begin{aligned} & 2 \left[\frac{(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) + (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B)) - (z_A - z_B)(X_3(A) - X_3(B))}{(x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 + 1)(x_B^2 - y_B^2 + z_B^2 + 1)} - \right. \\ & \quad - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 + 1)^2(x_B^2 - y_B^2 + z_B^2 + 1)} (x_A X_1(A) + y_A X_2(A) - z_A X_3(A)) - \\ & \quad - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 + 1)(x_B^2 - y_B^2 + z_B^2 + 1)^2} (x_B X_1(B) + y_B X_2(B) - z_B X_3(B)) \left. \right] + \\ & \quad + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0, \end{aligned}$$

(**xix**) для функции пары точек (49):

$$2 \left[\frac{(x_A - x_B)(X_1(A) - X_1(B)) + (y_A - y_B)(X_2(A) - X_2(B)) - (z_A - z_B)(X_3(A) - X_3(B))}{(x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 - 1)(x_B^2 + y_B^2 - z_B^2 - 1)} - \right. \\ \left. - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 - 1)(x_B^2 + y_B^2 - z_B^2 - 1)} (x_A X_1(A) + y_A X_2(A) - z_A X_3(A)) - \right. \\ \left. - \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2}{(x_A^2 + y_A^2 - z_A^2 - 1)(x_B^2 + y_B^2 - z_B^2 - 1)} (x_B X_1(B) + y_B X_2(B) - z_B X_3(B)) \right] + \\ + \left(P(A) \frac{\partial \chi}{\partial w_A} + P(B) \frac{\partial \chi}{\partial w_B} \right) = 0.$$

Выше выписанные функциональные уравнения решаются аналитически, т.е. неизвестные ищутся в виде рядов Тейлора (7)–(9). Это приводит к задаче перебора коэффициентов в разложениях, которая существенно упрощается с применением математического пакета программ Maple 17 (см. [5]). Заметим, что при записи функциональных уравнений для функций пар точек (46)–(49) координаты p, q, r переобозначены через x, y, z .

5. Заключение. В данной работе приведены результаты решения задачи вложения двумерных геометрий локальной максимальной подвижности в трехмерные геометрии локальной максимальной подвижности, а также результаты решения задачи вложения трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности в четырехмерные геометрии локальной максимальной подвижности. Данная задача может быть продолжена и на более высокие размерности.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г. Г. Михайличенко за поддержку исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердинский Д. А., Тайманов И. А. Поверхности в трехмерных группах Ли // Сиб. мат. ж. — 2005. — 46, № 6. — С. 1248–1264.
2. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
3. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.
4. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
5. Дьяконов В. Maple 10/11/12/13/14 в математических вычислениях. — М.: ДМС, 2014.
6. Кыров В. А. Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий // Сиб. электрон. мат. изв. — 2018. — 15. — С. 741–758.
7. Кыров В. А. Вложение многомерных особых расширений псевдоевклидовых геометрий // Челяб. физ.-мат. ж. — 2018. — 4, № 3. — С. 408–420.
8. Кыров В. А. Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии // Сиб. ж. индустр. мат. — 2010. — 13, № 4. — С. 38–51.
9. Кыров В. А., Богданова Р. А. Группы движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности // Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 2. — С. 412–421.
10. Кыров В. А., Михайличенко Г. Г. Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2017. — 23, № 2. — С. 167–181.
11. Кыров В. А., Михайличенко Г. Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сиб. электрон. мат. изв. — 2017. — 14. — С. 657–672.
12. Лев В. Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычисл. сист. — 1988. — 125. — С. 90–103.
13. Михайличенко Г. Г. Математические основы и результаты теории физических структур. — Горно-Алтайск: ГАГУ, 2016.
14. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Физматгиз, 1963.
16. Mikhailichenko G. G., Borodin A. N. The mathematical basics and results of the theory of physical structures, 2012/ arXiv: 1602.02795v1 [math-ph].

17. *Thurston W. P.* Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — 6, № 3. — P. 357–381.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский государственный университет
E-mail: kyrovVA@yandex.ru