Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. И. Шарифзода, Э. М. Мухамадиев, И. Д. Нуров, О циклических решениях уравнения Понтрягина с малым параметром, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 194, 167–171

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-194-167-171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:11:53

О ЦИКЛИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ПОНТРЯГИНА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2021 г. З. И. ШАРИФЗОДА, Э. М. МУХАМАДИЕВ, И. Дж. НУРОВ

Аннотация. Работа посвящена вопросам существования периодических решений систем нелинейных уравнений с малым параметром. Найдены условия существования периодических решений, которые существенно расширяют область применимости метода малого параметра Л. С. Понтрягина.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, топологические методы, вращение векторного поля.

CYCLIC SOLUTIONS OF THE PONTRYAGIN EQUATION WITH A SMALL PARAMETER

© 2021 Z. I. SHARIFZODA, E. M. MUHAMADIEV, I. Dzh. NUROV

ABSTRACT. In this paper, we examine the existence of periodic solutions to systems of nonlinear equations with a small parameter. We find conditions for the existence of periodic solutions, which expand the range of applicability of Pontryagin's method of small parameter.

Keywords and phrases: differential equation, periodic solution, topological methods, rotation of a vector field.

AMS Subject Classification: 34A34

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mu \cdot P(x, y, \mu), \\ \dot{y} = x + \mu \cdot Q(x, y, \mu), \end{cases} \quad (1)$$

где функции $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$ непрерывны по совокупности переменных (x, y, μ) в области $|\mu| < \mu_0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. В работе изучается вопрос о существовании периодического решения — цикла системы (1) при $\mu \neq 0$. По функциям $P(x, y, 0)$, $Q(x, y, 0)$ определим скалярную функцию

$$F(r) = \int_0^{2\pi} \left(\cos \varphi \cdot P(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0) + \sin \varphi \cdot Q(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0) \right) d\varphi. \quad (2)$$

Для исследования вопроса о существовании циклов системы (1) отправным пунктом для авторов послужила классическая теорема Л. С. Понтрягина (см. [7]), которая сформулирована при предположении аналитичности функций $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$ по совокупности переменных (x, y, μ) (см. [1, с. 214]).

Теорема 1. Если для некоторого $\rho = \rho_0$ выполняются условия $F(\rho_0) = 0$, $F'(\rho_0) \neq 0$, то существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что:

- (i) для любого μ , $|\mu| < \delta$, система (1) имеет в ε -окрестности кривой $x^2 + y^2 = \rho_0$ один и только один предельный цикл, причем при $\mu \rightarrow 0$ он стягивается к окружности $x^2 + y^2 = \rho_0$ (являющейся траекторией системы (1) при $\mu = 0$);
- (ii) этот предельный цикл является грубым предельным циклом, устойчивым, когда $\mu \cdot F'(\rho_0) < 0$, и неустойчивым, когда $\mu \cdot F'(\rho_0) > 0$.

Функция (2) определена и непрерывна, если функции $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$ лишь непрерывны по совокупности переменных. Но это условие не гарантирует дифференцируемости функции $F(r)$. В связи с этим возникает вопрос: как сформулировать утверждение, содержащее аналог теоремы Л. С. Понтрягина или аналог какой-либо ее части для случая непрерывных функций $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$?

В настоящей работе сделана попытка ответить на сформулированный вопрос, и получены теоремы существования цикла у системы в условиях непрерывности функций $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$ в терминах самой функции $F(r)$. А именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть $\rho_0 > 0$ — решение уравнения $F(\rho) = 0$ и в окрестности точки ρ_0 $[\rho_0 - \varepsilon_0, \rho_0 + \varepsilon_0]$, $\rho_0 - \varepsilon_0 > 0$, функция $F(\rho) \neq 0$ при $\rho \neq \rho_0$, причем значения функции $F(\rho)$ меняют знак при переходе через точку ρ_0 . Тогда система (1) при достаточно малых значениях μ имеет периодическое решение $(x(t, \mu), y(t, \mu))$, удовлетворяющее условию

$$|\sqrt{x^2(t, \mu) + y^2(t, \mu)} - \rho_0| < \varepsilon_0.$$

Теорема 3. Пусть существуют такие числа $0 < \rho_1 < \rho_2$, что $F(\rho_2) \cdot F(\rho_1) < 0$. Тогда система (1) при достаточно малых значениях μ имеет периодическое решение $(x(t, \mu), y(t, \mu))$, удовлетворяющее условию

$$\rho_1 < \sqrt{x^2(t, \mu) + y^2(t, \mu)} < \rho_2.$$

Доказательства теорем 2 и 3 основаны на применении топологических методов: вычисления вращения соответствующих вполне непрерывных векторных полей, нули которых определяют периодическое решение системы (1) (см., например, [2–6]).

2. Необходимое условие существования цикла. Пусть $(x(t), y(t))$ — решение системы (1), не обращающееся в нуль. Полагая

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \varphi(t), \\ y(t) = r(t) \sin \varphi(t), \end{cases} \quad 0 \leq \varphi(0) \leq 2\pi,$$

т.е. переходя к полярным координатам, получаем

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu \cdot (P \cdot \cos \varphi + Q \cdot \sin \varphi), \\ r \cdot \dot{\varphi} = r + \mu \cdot (Q \cdot \cos \varphi - P \cdot \sin \varphi). \end{cases} \quad (3)$$

Если для решения $(x(t), y(t))$ системы (1) при данном значении μ правая часть второго уравнения системы (3) положительна при всех t , то время t можно выразить через полярный угол φ : $t = T(\varphi)$. Относительно функции $\rho(\varphi) = r(T(\varphi))$ от системы (3) перейдем к скалярному уравнению

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \mu \cdot G(\rho, \varphi, \mu), \quad (4)$$

где

$$G(\rho, \varphi, \mu) = \frac{\rho \cdot (P \cdot \cos \varphi + Q \cdot \sin \varphi)}{\rho + \mu \cdot (Q \cdot \cos \varphi - P \cdot \sin \varphi)}.$$

При этих предположениях справедлива следующее утверждение.

Лемма. Решение $(x(t), y(t))$ системы (1) при данном значении μ является периодическим, т.е. $(x(t+\omega), y(t+\omega)) = (x(t), y(t))$, $\omega = \omega(\mu) > 0$, тогда и только тогда, когда соответствующее решение $\rho(\varphi) = r(T(\varphi))$ скалярного уравнения (4) является 2π -периодическим, т.е. $\rho(\varphi + 2\pi) = \rho(\varphi)$.

Теорема (необходимое условие). *Предположим, что для некоторой последовательности значений $\mu = \mu_k \neq 0$, $\mu_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, система (1) имеет периодическое решение $(x_k(t), y_k(t))$ с периодом $\omega_k > 0$, удовлетворяющие условию*

$$M_0 \leq \sqrt{x_k^2(t) + y_k^2(t)} \leq M, \quad M_0 > 0.$$

Тогда существует такое $\rho_0 \in [M_0, M]$, что $F(\rho_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $\rho_k(\varphi)$ — 2π -периодическое решение скалярного уравнения (4), соответствующее решению $(x_k(t), y_k(t))$ системы (1) при $\mu = \mu_k$. Подставляя это решение в (4) и полагая $\mu = \mu_k$, затем интегрируя полученное тождество на промежутке $[0, 2\pi]$, в силу условия $\mu_k \neq 0$ получим

$$\int_0^{2\pi} G(\rho_k(\varphi), \varphi, \mu_k) d\varphi = 0. \quad (5)$$

В силу условия теоремы последовательность функций $\rho_k(\varphi)$ равномерно ограничена, а в силу уравнения (4) она равностепенно непрерывна и, более того, $\rho_k(\varphi) - \rho_k(0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно на промежутке $[0, 2\pi]$. В силу теоремы Вейерштрасса без ограничения общности можно считать, что числовая последовательность $\rho_k(0)$ при $k \rightarrow \infty$ сходится к некоторому числу $\rho_0 \in [M_0, M]$. В силу непрерывности функций $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$, и условия $\mu_k \rightarrow 0$, последовательность функций $G(\rho_k(\varphi), \varphi, \mu_k)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно сходится к функции

$$G(\rho_0, \varphi, 0) = P(\rho_0 \cos \varphi, \rho_0 \sin \varphi, 0) \cdot \cos \varphi + Q(\rho_0 \cos \varphi, \rho_0 \sin \varphi, 0) \cdot \sin \varphi.$$

Теперь, переходя к пределу в равенстве (5), получаем

$$F(\rho_0) = \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \cdot P(\rho_0 \cos \varphi, \rho_0 \sin \varphi, 0) + \sin \varphi \cdot Q(\rho_0 \cos \varphi, \rho_0 \sin \varphi, 0)) d\varphi = 0.$$

Теорема доказана. □

3. Доказательство теоремы 2. В пространстве непрерывных функций $C[0, 2\pi]$ рассмотрим область

$$\Omega = \{\rho(\varphi) : |\rho(\varphi) - \rho_0| < \varepsilon_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

где $\varepsilon_0 < \rho_0$. На границе $\dot{\Omega}$ области Ω введем в рассмотрение семейство вполне непрерывных векторных полей

$$(\Phi_\mu \rho)(\varphi) = \rho(\varphi) - \rho(2\pi) - \mu \int_0^\varphi G(\rho(\psi), \psi, \mu) d\psi, \quad (6)$$

$$(\Psi_\mu \rho)(\varphi) = \rho(\varphi) - \rho(2\pi) - \mu \int_0^\varphi F(\rho(\psi)) d\psi. \quad (7)$$

Отметим, что нули поля Φ_μ являются 2π -периодическими решениями уравнения (4).

Покажем, что векторные поля (6), (7) при малых значениях $\mu \neq 0$ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω не имеют нулевых векторов и являются гомотопными. Для этого достаточно показать, что семейство векторных полей

$$(\Phi_{\mu, \lambda} \rho)(\varphi) = \rho(\varphi) - \rho(2\pi) - \mu \lambda \int_0^\varphi G(\rho(\psi), \psi, \mu) d\psi - \mu(1 - \lambda) \int_0^\varphi F(\rho(\psi)) d\psi$$

при малых значениях $\mu \neq 0$ и при всех $\rho \in \dot{\Omega}$ и всех $\lambda \in [0, 1]$ не обращается в нуль. Действительно, если предположить противное, то существуют такие последовательности $\mu = \mu_k \neq 0$, $\mu_k \rightarrow 0$,

$\lambda_k \in [0, 1]$ и $\rho_k \in \dot{\Omega}$, что $(\Phi_{\mu, \lambda} \rho)(\varphi) = 0$ при $\mu = \mu_k$, $\lambda = \lambda_k$ и $\rho = \rho_k$. Следовательно, функция $\rho = \rho_k(\varphi)$ является 2π -периодическим решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \mu\lambda \cdot G(\rho, \varphi, \mu) + \mu(1 - \lambda)F(\rho), \quad (8)$$

и удовлетворяет условию

$$\lambda \int_0^{2\pi} G(\rho(\psi), \psi, \mu) d\psi + (1 - \lambda) \int_0^{2\pi} F(\rho(\psi)) d\psi = 0 \quad (9)$$

при $\mu = \mu_k$, $\lambda = \lambda_k$. В силу (8) для последовательности функций $\rho_k(\varphi)$ имеем $\rho_k(\varphi) - \rho_k(0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно на промежутке $[0, 2\pi]$. Без ограничения общности можно считать, что последовательности $\rho_k(0) \rightarrow \rho_*$, $\lambda_k \rightarrow \lambda_*$ при $k \rightarrow \infty$. В равенстве (9), полагая $\mu = \mu_k$, $\lambda = \lambda_k$ и $\rho(\varphi) = \rho_k(\varphi)$, затем перейдя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\lambda_* \int_0^{2\pi} G(\rho_*, \psi, 0) d\psi + (1 - \lambda_*) \int_0^{2\pi} F(\rho_*) d\psi = 2\pi F(\rho_*) = 0.$$

С другой стороны, из условия $\rho_k \in \dot{\Omega}$ следует $|\rho_* - \rho_0| = \varepsilon_0$, что противоречит выбору ε_0 . Полученное противоречие доказывает гомотопность векторных полей (6) и (7) на границе $\dot{\Omega}$ области Ω и справедливость равенства $\gamma(\Phi_\mu, \dot{\Omega}) = \gamma(\Psi_\mu, \dot{\Omega})$ их вращений при достаточно малых значениях μ .

Теперь покажем, что вращение вполне непрерывного векторного поля Ψ_μ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω отлично от нуля. Рассмотрим семейство векторных полей

$$(\Psi_{\lambda\mu}\rho)(\varphi) = \rho(\varphi) - \rho(2\pi) - \mu \int_0^\varphi F(\rho(\psi)) d\psi - \mu\lambda \int_\varphi^{2\pi} F(\rho(\psi)) d\psi, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

В частности, при $\lambda = 0$, $\Psi_{0\mu} = \Psi_\mu$, а при $\lambda = 1$ имеем

$$(\Psi_{1\mu}\rho)(\varphi) = \rho(\varphi) - \rho(2\pi) - \mu \int_0^{2\pi} F(\rho(\psi)) d\psi.$$

Векторные поля $(\Psi_{\lambda\mu}\rho)(\varphi)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ при малых значениях μ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω не имеют нулевых векторов и, следовательно, поля $(\Psi_{0\mu}\rho)(\varphi)$ и $(\Psi_{1\mu}\rho)(\varphi)$ являются гомотопными на $\dot{\Omega}$ и поэтому $\gamma(\Psi_\mu, \dot{G}) = \gamma(\Psi_{1\mu}, \dot{G})$.

Оператор

$$(A_\mu\rho)(\varphi) = (2\pi) + \mu \int_0^{2\pi} F(\rho(\psi)) d\psi,$$

определяющий векторное поле $\Psi_{1\mu}$, действует из пространства $C[0, 2\pi]$ в подпространство постоянных функций. Это подпространство обозначим через E_0 и положим $G = \Omega \cap E_0$. Очевидно, $G = (\rho_0 - \varepsilon_0, \rho_0 + \varepsilon_0)$. Согласно лемме Лере—Шаудера (см. [4]) вращение вполне непрерывного векторного поля $\Psi_{1\mu}$ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω совпадает с вращением его сужения $\bar{\Psi}_{1\mu}$ на границе $\dot{G}$ области G . Нетрудно видеть, что

$$\bar{\Psi}_{1\mu}\rho \equiv -\mu \cdot 2\pi \cdot F(\rho), \quad \rho \in (\rho_0 - \varepsilon_0, \rho_0 + \varepsilon_0),$$

и поэтому его вращение $\gamma(\bar{\Psi}_{1\mu}, \dot{G})$ на границе $\dot{G}$ области G равно

$$\gamma(\bar{\Psi}_{1\mu}, \dot{G}) = -\text{sign } \mu (\text{sign } F(\rho_0 + \varepsilon_0) - \text{sign } F(\rho_0 - \varepsilon_0))/2.$$

Следовательно, вращение $\gamma(\Phi_\mu, \dot{\Omega})$ поля Φ_μ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω отлично от нуля. Отсюда следует существование 2π -периодического решения уравнения (4) в области Ω . Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.
2. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: ГТТИ, 1956.
3. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
4. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.
5. *Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П.* Векторные поля на плоскости. — М.: Физматгиз, 1963.
6. *Мухамадиев Э. М.* К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1970. — 194, № 3. — С. 510–513.
7. *Pontryagin L. S.* Über Autoschwingungssysteme, die den Hamiltonschen nahe liegen // Phys. Z. Sowjetunion. — 1934. — 6. — P. 25–28.

Шарифзода З. И.

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

E-mail: sakhara-2803@mail.ru

Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич

Вологодский государственный университет

E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Нуров Исхокбой Джумаевич

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

E-mail: nid1@mail.ru