Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Д. Андреев, В. В. Старостина, Нормированные плоскости в касательном конусе к хордовому пространству неположительной кривизны, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 1, 3–17

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-3-17>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 07:41:03

П.Д. АНДРЕЕВ, В.В. СТАРОСТИНА

НОРМИРОВАННЫЕ ПЛОСКОСТИ В КАСАТЕЛЬНОМ КОНУСЕ К ХОРДОВОМУ ПРОСТРАНСТВУ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Аннотация. Работа является продолжением цикла статей авторов, посвященных геометрии G -пространств Буземана с выделенным семейством отрезков (так называемых хордовых пространств), имеющих неположительную кривизну относительно этого семейства. Здесь изучается геометрия касательного конуса к хордовому пространству неположительной кривизны. Показано, что на любые две выделенные прямые, проходящие через вершину конуса, в нем натягивается слабая нормированная плоскость, т. е. слабо выпуклое подмножество, изометричное плоскости, оснащенной некоторой нормой.

Ключевые слова: хордовое пространство, выделенное семейство отрезков, базовая хорда, неположительная кривизна, касательный конус, нормированная плоскость, слабая выпуклость.

УДК: 514.774

ВВЕДЕНИЕ

Понятие хордового пространства было введено в книге Г. Буземана и Б. Пхадке [1] как обобщение понятия G -пространства Буземана. Коренное отличие хордовых пространств от классических G -пространств состоит в том, что в хордовых пространствах допускается неоднозначность отрезков, соединяющих сколь угодно близкие точки. При этом для всех пар достаточно близких друг к другу точек x, y в множестве $T(x, y)$ всех отрезков с концами x и y выделяется один, называемый базовой хордой. В дальнейшем развитии геометрии хордового пространства отрезкам, не являющимся базовыми хордами, отводится второстепенная роль, основное значение придается именно отрезкам выделенного семейства.

G -пространства представляют собой наиболее естественный класс хордовых пространств. Произвольное конечномерное нормированное пространство с нестрогой выпуклой нормой — пример хордового пространства, не являющегося G -пространством. Хордовая структура в нем может быть определена для произвольного фиксированного $r > 0$: базовыми хордами считаются все прямолинейные отрезки длины не больше r . Если принять $r = +\infty$, получим также структуру хордового пространства, в которой базовые хорды — все прямолинейные отрезки.

Можно заметить связь хордовых пространств и так называемых пространств с геодезическим бикомбингом (см., например, [2]). Под геодезическим бикомбингом на геодезическом

Поступила в редакцию 12.12.2017. После доработки 12.12.2017. Принята к публикации 22.03.2018
Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-01-00219.

пространстве X понимается отображение $\sigma : X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$, сопоставляющее каждой паре $(x, y) \in X \times X$ отрезок из x в y , параметризованный пропорционально длине. Но, вообще говоря, не всякое хордовое пространство допускает структуру пространства с геодезическим бикомбингом (см. пример в разделе 1), и обратно, не всякое пространство с геодезическим бикомбингом является хордовым пространством.

В данной статье мы изучаем геометрию касательного конуса к хордовому пространству неположительной кривизны. Понятие касательного конуса в случае хордового пространства было введено авторами в [3], где для хордовых пространств применялся термин G -пространства с выделенным семейством отрезков. В [3], в частности, показано, что касательный конус $K_p X$ к G -пространству X неположительной кривизны относительно выделенного семейства отрезков сам обладает выделенным семейством отрезков, относительно которого является G -пространством неположительной кривизны. При этом на $K_p X$ действует группа H положительных гомотетий с центром в вершине конуса p .

Относительным недостатком статьи [3] является тот факт, что при построении выделенного семейства отрезков применялась операция предела по неглавному ультрафильтру, т.е. неявно используется аксиома выбора. Другой слабостью полученного в [3] результата является тот факт, что построенное выделенное семейство отрезков, вообще говоря, не инвариантно относительно действия группы H . Это в значительной степени затрудняет дальнейшее исследование и снижает ценность построенного семейства.

Целью данной статьи и последующих исследований является устранение указанных препятствий, полное изучение геометрии касательного конуса $K_p X$ и топологии самого пространства X . Авторы выдвигают гипотезу, что так же, как и в случае G -пространства, всякое хордовое пространство X неположительной кривизны гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ при некотором натуральном n , а конус $K_p X$ имеет структуру конечномерного нормированного пространства. В случае G -пространства X оба этих утверждения истинны. Первое из них доказано в [4], второе частично представлено в [5], полное доказательство см. в [6].

Основным результатом статьи является

Теорема 1. Пусть (X, d) — хордовое пространство неположительной кривизны, $K_p X = (X, d_*)$ — его касательный конус с вершиной p . Тогда любые две образующих $a, b \subset X$ конуса $K_p X$ содержатся в некоторой слабо выпуклой нормированной плоскости.

Опишем структуру статьи. В разделе 1 приводятся необходимые сведения из общей теории хордовых пространств и полученные ранее результаты авторов, касающиеся конструкции касательного конуса к хордовому пространству неположительной кривизны. Вводятся и изучаются так называемые подходящие отрезки и подходящие прямые, которые и служат основным техническим инструментом в доказательствах.

Разделы 3 и 4 посвящены понятию слабо выпуклого угла. Множество A в геодезическом пространстве X называется слабо выпуклым, если любые две его точки можно соединить хотя бы одним отрезком, целиком содержащимся в A . Мы показываем, что любые два образующих луча в касательном конусе стягивают слабо выпуклое подмножество, изометричное углу на нормированной плоскости. Это дает возможность для продолжения конструкции и построения слабо выпуклых нормированных полуплоскостей. Такое продолжение строится в разделе 5. Завершающая часть доказательства теоремы 1 состоит в доказательстве возможности склеивания нормированной плоскости из двух нормированных полуплоскостей. Эта конструкция описана в разделе 6.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Аксиоматическое определение хордового пространства дается в начале книги [1] в несколько шагов. Мы несколько сокращаем преамбулу этого определения, оставляя из нее только самое необходимое.

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Множество $A \subset \mathbb{R}$ — замкнутый промежуток, т. е. отрезок $[a, b]$ при некоторых $a, b \in \mathbb{R}$, луч $[a, +\infty)$ или $(-\infty, a]$ при некотором $a \in \mathbb{R}$, или все пространство $\mathbb{R}$. Образ A в X при изометрическом отображении $i : A \rightarrow X$ называется соответственно *отрезком* в X с концами $x = i(a)$ и $y = i(b)$, *лучом* с началом $i(a)$ или *прямой линией* в X . Пространство (X, d) называется *геодезическим пространством*, если любые две различных точки $x, y \in X$ можно соединить отрезком. Для фиксированных точек $x, y \in X$ множество всех отрезков с концами x и y обозначается $T(x, y)$. Это же обозначение $T(x, y)$ применяется для множества вообще всех отрезков в случае, когда точки x и y не фиксированы и пробегают все множество пар различных точек в X .

Будем всюду далее считать, что X — геодезическое пространство, и оно *конечно компактно*, т. е. в X любое ограниченное замкнутое подмножество компактно.

Определение 1. Пусть в множестве $T(x, y)$ всех отрезков пространства (X, d) выделено подмножество отрезков $Q(x, y)$, называемых *хордами*, а в $Q(x, y)$ — подмножество $Q^*(x, y)$ хорд, которые называются *базовыми хордами*. *Геодезической* в X называется базовая хорда или объединение конечной или бесконечной последовательности базовых хорд, в которой каждая последующая базовая хорда пересекается с объединением предыдущих по общей базовой хорде. Каждая хорда $Q(x, y)$ — это отрезок, который является геодезической. Если геодезическая является прямой линией или окружностью, мы называем ее *полной геодезической*.

Пусть при приведенных выше соглашениях выполняются следующие аксиомы.

- $\Sigma(1)$ Всякая точка $p \in X$ обладает окрестностью $U(p, r(p))$, в которой для любых $x, y \in U(p, r(p))$, $x \neq y$, базовая хорда $Q^*(x, y)$ существует и определена однозначно.
- $\Sigma(2)$ Если z — внутренняя точка $Q^*(x, y)$, то $Q^*(x, z) \subset Q^*(x, y)$, и хорда $Q^*(x, y)$ является единственной базовой хордой, продолжающей $Q^*(x, z)$ за точку z на расстояние $d(z, y)$.
- $\Sigma(3)$ Пусть определены базовые хорды $Q^*(x_i, y_i)$ при $i = 0, 1, 2, \dots$. Если $x_i \rightarrow x_0$ и $y_i \rightarrow y_0$ при $i \rightarrow +\infty$, то $Q^*(x_i, y_i) \rightarrow Q^*(x_0, y_0)$.
- $\Sigma(4)$ Для любых точек $x, y \in U(p, r(p))$ существует точка $z \neq y \in X$, для которой $Q^*(x, y) \subset Q^*(x, z)$.
- $\Sigma(a)$ Для любых $x, y \in X$ и гомотопического класса K путей из x в y в этом классе существует кратчайшая геодезическая.

Тогда пространство (X, d) называется *хордовым пространством*. Заметим, что в произвольном хордовом пространстве в общем случае любые две точки можно соединить отрезком, но, вообще говоря, не базовой хордой. Сходимость в аксиоме $\Sigma(3)$ поточечная, что в силу конечной компактности пространства эквивалентно равномерной сходимости.

Пример. Пусть $X = \mathbb{S}^1$ — единичная окружность с естественной внутренней метрикой d . Пространство X является G -пространством. Для произвольных точек $x, y \in \mathbb{S}^1$ множество отрезков $T(x, y)$ состоит из единственной наименьшей дуги с концами x и y , если $d(x, y) < \pi$, и из двух равных дуг, если $d(x, y) = \pi$. Хордовую структуру на X можно задать, если считать базовыми хордами дуги, длина которых не превосходит некоторого числа $M < \pi$. Приняв $M = \pi$, мы получим также хордовую структуру, в которой все пары

диаметрально противоположных точке соединяются не одной, а двумя базовыми хордами. Это не противоречит приведенной выше аксиоматике. Если же рассматривать структуру, в которой базовыми хордами считаются все дуги, длина которых меньше π , то возникает противоречие с аксиомой $\Sigma(3)$. При этом окружность S^1 не допускает хордовой структуры, которая превращает ее в пространство с геодезическим бикомбингом.

Определение 2. Пусть (X, d) — хордовое пространство, в котором любые две точки соединены единственной базовой хордой. Оно называется *хордовым пространством неположительной кривизны по Буземану*, если для любых трех точек $x, y, z \in X$ выполнено следующее свойство: если точка m — середина $Q^*(x, y)$ и n — середина $Q^*(x, z)$, то

$$d(m, n) \leq \frac{1}{2} \cdot d(y, z).$$

Другими словами, средняя линия любого треугольника, образованного базовыми хордами, не превосходит половины основания.

Напомним конструкцию касательного конуса, приведенную в [3]. Пусть задано хордовое пространство неположительной кривизны (X, d) . Из неположительности кривизны следует, что любые две точки можно соединить единственной геодезической, которая является базовой хордой. Зафиксируем точку $p \in X$. Произвольную точку $x \in X$ соединим с точкой p базовой хордой. Для произвольного $t \geq 1$ определим на X метрику d_t . Для точки $x \in X$ будем обозначать через x_t точку на базовой хорде $Q^*(p, x)$, для которой

$$d(p, x_t) = \frac{d(p, x)}{t}.$$

Метрика d_t определяется равенством $d_t(x, y) = t \cdot d(x_t, y_t)$. В [3] доказано, что для любых двух точек $x, y \in X$ существует предел

$$d_*(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d_t(x, y) \quad (1.1)$$

и функция $d_* : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ является метрикой на X .

Пространство $K_p(X) = (X, d_*)$ называется касательным конусом к (X, d) с вершиной p .

С метрической точки зрения касательный конус $K_p X$ к пространству X с вершиной p — это предел по Грому-Хаусдорфу при $t \rightarrow +\infty$ однопараметрического семейства пространств $X_t = (X, d_t)$, $t \geq 1$, подобных пространству X с коэффициентом t , где точка p — их общая отмеченная точка.

Свойства касательного конуса объединены в следующей теореме.

Теорема 2 ([3]). Пусть (X, d) — хордовое пространство неположительной кривизны, $K_p X$ — его касательный конус с вершиной $p \in X$. Тогда $K_p X = (X, d_*)$ является хордовым пространством неположительной кривизны, при этом

- 1) $\forall x, y \in X \ d_*(x, y) \leq d(x, y)$;
- 2) тождественное отображение $\text{Id} : X \rightarrow X$ является гомеоморфизмом пространства (X, d) на пространство (X, d_*) ;
- 3) базовые хорды в (X, d) , проходящие через точку p , являются отрезками в (X, d_*) , причем вдоль каждой такой базовой хорды $d_* = d$;
- 4) на пространстве (X, d_*) действует группа H положительных гомотетий с центром в точке p .

Определение 3. Полные геодезические пространства (X, d) , проходящие через вершину конуса $K_p X$, называются *образующими* этого конуса. Лучи, на которые произвольную

образующую делит точка p , будем называть *образующими лучами* K_pX . Вследствие п. 3 теоремы 2 образующие конуса K_pX являются прямыми линиями и в самом конусе.

Замечание. Образующие конуса K_pX являются полными геодезическими и в смысле хордовой структуры пространства (X, d_*) , независимо от выбора неглавного ультрафильтра, по которому эта хордовая структура построена. Но в дальнейшем мы не рассматриваем K_pX как хордовое пространство, поэтому образующие K_pX определяются именно в терминах хордового пространства X .

Пространства $X_t = (X, d_t)$, подобные X , также будем считать хордовыми пространствами. Хордовая структура пространства X_t возникает как образ хордовой структуры пространства X при подобии $\varphi_t : X \rightarrow X_t$, заданном правилом $\varphi_t(x_t) = x$ для произвольной точки $x \in X$. Базовая хорда пространства X_t с концами $x, y \in X$ обозначается $Q^*(x, y)_t$.

2. ПОДХОДЯЩИЕ ОТРЕЗКИ И ПРЯМЫЕ В КАСАТЕЛЬНОМ КОНУСЕ

Целью этого раздела служит выделение системы отрезков специального вида в касательном конусе K_pX к хордовому пространству X , которая позволяет построить для заданной образующей a инвариантное относительно гомотетий группы H семейство прямых, параллельных ей.

Определение 4. Пусть (X, d) — хордовое пространство неположительной кривизны, $K_pX = (X, d_*)$ — его касательный конус с вершиной $p \in X$, $u, v \in X$ — две произвольные точки. Отрезок $[uv]_*$ в пространстве K_pX будем называть *подходящим*, если существует неограниченная возрастающая числовая последовательность $t_n > 1$ и последовательность базовых хорд $Q^*(u, v)_{t_n}$ соответственно в пространствах X_{t_n} , натуральные параметризации которых в метриках d_{t_n} поточечно сходятся к натуральной параметризации отрезка $[uv]_*$ в смысле метрики d_* . В этом случае мы также говорим, что подходящий отрезок $[uv]_*$ порождается последовательностью t_n .

Существование подходящего отрезка $[uv]_*$ для произвольных точек $u, v \in X$ является тривиальным следствием теоремы Арцела–Асколи, топологической эквивалентности метрик d_t при всех $t \geq 1$ метрике d_* и равенства (1.1). Более того, при заданных $u, v \in X$ из любой бесконечно возрастающей последовательности t_n можно выделить подпоследовательность, которая порождает некоторый подходящий отрезок $[uv]_*$ в K_pX . В общем случае для подходящего отрезка $[uv]_*$ единственности нет, но в случае, когда точки u и v лежат на образующей конуса K_pX , подходящий отрезок $[uv]_*$ определен однозначно и совпадает как поточечно, так и в метрическом смысле с базовыми хордами $Q^*(u, v)$ всех пространств (X, d_t) . Порождающая последовательность для подходящего отрезка $[uv]_*$ также не является однозначно определенной: понятно, что любая подпоследовательность порождающей последовательности для $[uv]_*$ вновь является порождающей последовательностью этого же отрезка.

Поточечная сходимось натуральных параметризаций отрезков в определении 4 равносильна сходимости по Хаусдорфу соответствующих множеств точек в любом из пространств (X, d_t) при $t \geq 1$ или в пространстве K_pX . В дальнейшем мы не будем уточнять тип сходимости отрезков в подобных случаях.

Определение 5. Подходящие отрезки $[uv]_*$ и $[u'v']_*$ в конусе K_pX называются *согласованными подходящими отрезками*, если они порождаются одной и той же последовательностью.

Отношение согласованности подходящих отрезков в общем случае не транзитивно: два отрезка, согласованных с третьим, не обязательно согласованы друг с другом.

Следующее утверждение легко доказывается по индукции.

Лемма 1. Пусть в множестве X заданы $2n$ точек $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$. Тогда из любой бесконечно возрастающей последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность, порождающую попарно согласованные подходящие отрезки $[u_1 v_1]_*, \dots, [u_n v_n]_*$.

Основное свойство согласованных подходящих отрезков состоит в выпуклости метрики d_* вдоль них: если $[uv]_*$ и $[xy]_*$ — согласованные подходящие отрезки, заданные аффинными параметризациями $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow X$ соответственно, то функция $d_*(\gamma(s), \delta(t))$ является выпуклой. Это следует сразу из определения согласованных подходящих отрезков и выпуклости метрик d_t на базовых хордах.

Следующий критерий удобен для применения в доказательствах ряда утверждений.

Лемма 2. Для того чтобы отрезок $[uv]_*$ в пространстве $K_p X$ был подходящим с порождающей последовательностью $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность базовых хорд $Q^*(u_n, v_n)_{t_n}$ в пространствах X_{t_n} , сходящаяся к $[uv]_*$.

Доказательство. Необходимость в утверждении леммы очевидна. Достаточность. Пусть $w \in [uv]_*$ — точка, удаленная от u на расстояние $d_*(u, w) = \tau$, $Q^*(u, v)_{t_n}$ — базовые хорды в пространствах (X, d_{t_n}) , соединяющие u и v , $w_n \in Q^*(u, v)_{t_n}$ — точки на них, удаленные от u в смысле метрик d_{t_n} соответственно на расстояния

$$d_{t_n}(u, w_n) = \frac{d_{t_n}(u, v)}{d_*(u, v)} \cdot \tau,$$

и z_n — точки на базовых хордах $Q^*(u_n, v_n)$, удаленные в метриках d_{t_n} соответственно от u_n на расстояния

$$d_{t_n}(u_n, z_n) = \frac{d_{t_n}(u_n, v_n)}{d_*(u, v)} \cdot \tau.$$

Тогда из неположительности кривизны пространств (X, d_t) следует

$$d_{t_n}(w_n, z_n) \leq (1 - \lambda)d_{t_n}(u, u_n) + \lambda d_{t_n}(v, v_n),$$

где $\lambda = \tau/d_*(u, v)$.

Поскольку точки u_n и v_n сходятся соответственно к u и v , заключаем, что $d_{t_n}(w_n, z_n) \rightarrow 0$, а поскольку точки z_n сходятся к w , то и $w_n \rightarrow w$ при $n \rightarrow +\infty$. $\square$

Из этого критерия непосредственно следует

Лемма 3. Пусть $[uv]_* \subset X$ — подходящий отрезок в конусе $K_p X$, w — его внутренняя точка. Тогда отрезки $[uw]_* \subset [uv]_*$ и $[wv]_* \subset [uv]_*$ являются подходящими отрезками, согласованными с $[uv]_*$ и между собой.

Следующее утверждение о продолжаемости подходящих отрезков вытекает из критерия 2 и теоремы Арцела–Асколи.

Лемма 4. Пусть $[uv]_*$ — подходящий отрезок в $K_p X$, порожденный последовательностью чисел $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и являющийся пределом соответствующей последовательности базовых хорд $Q^*(u, v)_{t_n}$ в пространствах (X, d_{t_n}) . Тогда для любого $a > 0$ существуют точка $w \in X$, удаленная от v на расстояние $d_*(v, w) = a$, подпоследовательность $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ и соответствующая последовательность базовых хорд $Q^*(u, w)_{t_{n_k}}$, продолжающих базовые хорды $Q^*(u, v)_{t_{n_k}}$ за точку v , сходящаяся к отрезку $[uw]_*$, содержащему $[uv]_*$.

Следовательно, $[uv]_*$ можно продолжить в обе стороны на расстояние a до подходящего отрезка $[yz]_* \supset [uv]_*$ так, что порождающая последовательность для $[yz]_*$ является подпоследовательностью заданной порождающей последовательности отрезка $[uv]_*$. Отсюда получаем следствие о бесконечной продолжаемости подходящего отрезка до подходящей прямой.

Определение 6. Прямая $a_* \subset X$ в смысле метрики d_* называется *подходящей*, если она является поточечным пределом последовательности прямых a_n , которые являются полными геодезическими в смысле метрик d_{t_n} для некоторой бесконечно возрастающей последовательности чисел $t_n > 1$. В этом случае последовательность t_n называется *порождающей последовательностью* для подходящей прямой a_* .

Следствие. Всякий подходящий отрезок конуса $K_p X$ содержится в некоторой подходящей прямой.

Доказательство. Пусть $[uv]_*$ — заданный подходящий отрезок, $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ — его порождающая последовательность. Построим в соответствии с леммой 4 возрастающую последовательность подходящих отрезков

$$[uv]_* \subset [u_1 v_1]_* \subset \dots,$$

в которой каждый последующий отрезок содержит предыдущий: $[u_i v_i]_* \subset [u_{i+1} v_{i+1}]_*$, его порождающая последовательность $\{t_{f_{i+1}(n)}\}_{n=1}^\infty$ является подпоследовательностью порождающей последовательности $\{t_{f_i(n)}\}_{n=1}^\infty$,

$$d_*(u_i, u_{i+1}) = d_*(v_i, v_{i+1}) = 1.$$

Здесь функции $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ выбираются по следующей рекуррентной схеме. Во-первых, $f_0(n) = n$. Далее, $f_{i+1} : \mathbb{N} \rightarrow E(f_i)$ — возрастающая функция, заданная так, что ее областью значений служит некоторое подмножество множества $E(f_i)$ значений функции f_i . При этом последовательность $\{t_{f_{i+1}(n)}\}$ является порождающей последовательностью для подходящего отрезка $[u_n v_n]_*$. Такой выбор может быть осуществлен благодаря лемме 4.

Покажем, что ℓ_* , являющаяся объединением всех отрезков $[u_i v_i]_*$, — это подходящая прямая, согласованная со всеми отрезками. Для этого зададим убывающую числовую последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Для последовательности $Q^*(u, v)_{t_n}$ базовых хорд, сходящейся к $[uv]_*$, построим последовательность продолжений $Q^*(x_{n,1}, y_{n,1})_{t_n}$, сходящуюся к $[u_1 v_1]_*$. Пусть N_1 — такой номер, что для всех $n > N_1$

$$\text{Hd}(Q^*(x_{n,1}, y_{n,1})_{t_n}, [u_1 v_1]_*) < \varepsilon_1.$$

Здесь расстояние Хаусдорфа Hd рассматривается в смысле метрики d_* . Поскольку выбор продолжения $[u_2 v_2] \supset [u_1 v_1]$ не детерминирован изначально, можем считать, что к отрезку $[u_2 v_2]$ сходится некоторая подпоследовательность $Q^*(x_{n,2}, y_{n,2})_{t_{n,2}}$ последовательности продолжений $Q^*(x_{n,2}, y_{n,2})_{t_{n,1}}$ базовых хорд

$$Q^*(x_{n,1}, y_{n,1})_{t_{n,1}} \subset Q^*(x_{n,2}, y_{n,2})_{t_{n,1}}.$$

Выберем $N_2 > N_1$ так, чтобы для всех $n > N_2$ выполнялось неравенство

$$\text{Hd}(Q^*(x_{n,2}, y_{n,2})_{t_{n,2}}, [u_2 v_2]_*) < \varepsilon_2.$$

Продолжив описанный процесс до бесконечности, после чего применив диагональную процедуру Кантора, получим последовательность базовых хорд $Q^*(x_{n_k}, y_{n_k})_{t_{n_k}}$, которая сходится к прямой ℓ в смысле сходимости по Хаусдорфу множеств с отмеченной точкой. Последнее означает, что на перечисленных базовых хордах можно выбрать отмеченные точки

o_n , а на прямой ℓ отмеченную точку o так, что при любом $R > 0$ части базовых хорд, образованные точками, удаленными от o_n не более чем на R , сходятся по Хаусдорфу к отрезку ℓ длины $2R$ с серединой o .

Продлив каждую базовую хорду $Q^*(x_{n_k}, y_{n_k})_{t_{n_k}}$ до полной геодезической в пространстве $(X, d_{t_{n_k}})$, получим последовательность прямых, сходящуюся к ℓ . $\square$

Следующее утверждение связывает понятие подходящих отрезков и подходящих прямых с действием на $K_p X$ группы H положительных гомотетий h_λ .

Лемма 5. Пусть $[uv]_*$ — подходящий отрезок с порождающей последовательностью $\{t_n\}_{n=1}^\infty$, $u_\lambda = h_{1/\lambda}(u)$, $v_\lambda = h_{1/\lambda}(v)$. Тогда $[u_\lambda v_\lambda]_* = h_{1/\lambda}([uv]_*)$ — подходящий отрезок с порождающей последовательностью $\{t_n/\lambda\}_{n=1}^\infty$.

Доказательство. Если $Q^*(u, v)_{t_n}$ — базовая хорда в метрике d_{t_n} , то $h_{1/\lambda}(Q^*(u, v)_{t_n})$ — базовая хорда в метрике $d_{\lambda t_n}$ с концами u_λ и v_λ , откуда следует требуемое. $\square$

3. СЛАБО ВЫПУКЛЫЕ УГЛЫ

Определение 7. Множество A в геодезическом пространстве X называется *слабо выпуклым*, если для любых двух точек $x, y \in A$ существует соединяющий их отрезок, целиком содержащийся в A .

Например, объединение двух пересекающихся прямых $|x_1| = |x_2|$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x_1, x_2) , не являющееся выпуклым в линейном смысле, является слабо выпуклым, если метрика плоскости порождена максимум-нормой $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, а пара прямых $x_1 x_2 = 0$, задающая координатные оси, слабо выпукла в нормированной плоскости $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$.

Пусть a_+ и b_+ — образующие лучи в $K_p X$ с натуральными параметризациями $a_+, b_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$. Целью раздела служит доказательство того, что лучи a_+ и b_+ ограничивают слабо выпуклое подмножество в пространстве (X, d_*) , изометричное углу на нормированной плоскости.

Пусть $u = a_+(\sigma)$, $v = b_+(\tau)$ — две точки на заданных лучах, $[uv]_*$ — подходящий отрезок. Обозначим

$$A = \{p\} \cup \bigcup_{k>0} h_k([uv]_*) \quad (3.1)$$

множество, полученное объединением образов $[uv]_*$ при гомотетиях h_k и вершины конуса p .

Лемма 6. Множество A является слабо выпуклым.

Доказательство. Достаточно убедиться, что для любых $x, y \in A$ найдется точка $w \in A$, которая является серединой между x и y . Это утверждение очевидно в двух случаях: когда точки x и y лежат на одном образующем луче, или когда они принадлежат одному отрезку вида $h_k([uv]_*)$.

Прежде, чем рассматривать общий случай, докажем утверждение в случае, когда $x = u$ и $y = h_k(v)$, где $k \neq 1$ — произвольный положительный параметр. Определим следующие точки. Пусть

$$\begin{aligned} m &= h_{(1+k)/2}(u) = h_{(1+k)/2}(x), \quad n = h_{(1+k)/2}(v) = h_{(1+k)/(2k)}(y), \\ q &= h_{1/k}(m) = h_{(1+k)/(2k)}(u), \quad r = h_k(n) = h_{(1+k)/(2k)}(v). \end{aligned}$$

Далее, определим точку w как точку отрезка $[mn]_* = h_{(k+1)/2}([uv]_*)$, делящую его в отношении $d_*(m, w)/d_*(w, n) = k$. Понятно, что $w \in A$. Покажем, что w является серединой в

метрике d_* между x и y . Действительно, отрезок $[mn]_* = h_{(k+1)/2}([uv]_*)$ является подходящим и согласован как с отрезком $[mq]_*$, так и с отрезком $[nr]_*$. Поэтому

$$\frac{d_*(x, w)}{d_*(x, y)} = \frac{k+1}{2k} \frac{d_*(x, w)}{d_*(q, n)} \leq \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{d_*(m, w)}{d_*(m, n)} = \frac{1}{2}$$

и

$$\frac{d_*(w, y)}{d_*(x, y)} = \frac{k+1}{2} \frac{d_*(w, y)}{d_*(m, r)} \leq \frac{k+1}{2} \cdot \frac{d_*(w, n)}{d_*(m, n)} = \frac{1}{2}.$$

Сопоставляя полученные оценки с неравенством треугольника, получаем равенства

$$d_*(x, w) = d_*(w, y) = \frac{d_*(x, y)}{2}.$$

Поскольку в определении множества A вместо отрезка $[uv]_*$ можно воспользоваться отрезком $h_k([u, v]_*)$ при любом $k > 0$, утверждение справедливо в случае $x = a_+(s)$, $y = b_+(t)$ при произвольных $s, t > 0$.

В общем случае рассмотрим множество $A' \subset A$, образованное лучами $a'_+ = [px]$ и $b'_+ = [py]$ и построенное по той же схеме, что и A , но при помощи части $[u'v']_*$ отрезка $[uv]_*$, заключенной между точками $u' = [uv]_* \cap a'_+$ и $v' = [uv]_* \cap b'_+$. Предыдущее рассуждение применительно к множеству A' показывает, что в A' найдется точка w , являющаяся серединой между x и y . Поскольку $A' \subset A$, лемма доказана. $\square$

4. СТРУКТУРА НОРМИРОВАННОГО УГЛА В МНОЖЕСТВЕ A

Здесь мы докажем, что множество A в метрике d_* изометрично углу на нормированной плоскости. Рассмотрим вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$ с заданной на ней системой координат (ξ, η) и угол $V \subset \mathbb{R}^2$, ограниченный положительными полуосями $\xi \geq 0, \eta \geq 0$. Мы определим биекцию $\varphi : V \rightarrow A$, при которой образы прямолинейных отрезков, представляющих один и тот же вектор, будут отрезками в A и иметь равные длины.

Пусть $(\xi, \eta) \in V$. Обозначим $k = \xi + \eta$ и $\lambda = \xi/\eta$ в случае $\eta \neq 0$. В случае $\eta = 0$ будем считать $\lambda = +\infty$. Положим $\varphi(\xi, \eta) = w_{k,\lambda}$, где точка $w_{k,\lambda} \in A$ однозначно определяется следующими условиями.

При $k = 0$ точка $w_{0,\lambda}$ совпадает с p . В случае $k > 0$ точка $w_{k,\lambda}$ принадлежит отрезку $[u_k v_k] = h_k([uv]_*)$ и делит его в отношении λ , т. е.

$$d_*(u_k, w_{k,\lambda})/d_*(w_{k,\lambda}, v_k) = \lambda.$$

В частности, $w_{k,0} = u_k$ и $w_{k,+\infty} = v_k$ при всех $k > 0$. Очевидно, отображение φ биективно. Поскольку гомотетии h_k образуют непрерывное однопараметрическое семейство, отображение φ непрерывно. Следовательно, ограничение $\varphi|_{\Delta_k}$ на треугольник Δ_k с вершинами $(0,0), (k,0), (0,k) \in V$ при произвольном $k > 0$ является гомеоморфизмом Δ_k на $\varphi(\Delta_k)$ как непрерывная биекция компактного множества Δ_k на хаусдорфово подпространство $\varphi(\Delta_k) \subset X$, а само отображение φ — гомеоморфизмом V на A .

Лемма 7. *Отображение φ аффинно: образы точек, лежащих на одной прямой вновь лежат на одной прямой, при этом сохраняется порядок точек и простое отношение.*

Доказательство. Из определения отображения φ и построения середин в лемме 6 следует, что для любых точек $p, q \in V$ середина отрезка $[pq] \subset V$ переходит в середину отрезка в A , соединяющего $\varphi(p)$ и $\varphi(q)$. Утверждение леммы следует из этого факта и непрерывности отображения φ . $\square$

Далее мы показываем, что отображение φ переводит равные векторы пространства V в отрезки с равными длинами.

Лемма 8. Пусть (ξ_i, η_i) , $i = \overline{1, 4}$, — четыре точки в V , являющиеся вершинами параллелограмма так, что $(\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1) = (\xi_4 - \xi_3, \eta_4 - \eta_3)$. Тогда

$$d_*(\varphi(\xi_1, \eta_1), \varphi(\xi_2, \eta_2)) = d_*(\varphi(\xi_3, \eta_3), \varphi(\xi_4, \eta_4)). \quad (4.1)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда

$$(\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1) < 0. \quad (4.2)$$

В этом случае утверждение будет доказано, если для произвольных точек $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in V$, удовлетворяющих условию (4.2), мы покажем выполнение равенства

$$d_*(\varphi(\xi_1, \eta_1), \varphi(\xi_2, \eta_2)) = d_*(\varphi(|\xi_2 - \xi_1|, 0), \varphi(0, |\eta_2 - \eta_1|)).$$

Для определенности будем считать, что $\xi_2 - \xi_1 < 0$ и $\eta_2 - \eta_1 > 0$. Имеем

$$d_*(\varphi(\xi_1, \eta_1), \varphi(\xi_2, \eta_2)) = \frac{(\xi_1 - \xi_2)(\eta_2 - \eta_1)}{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1} \cdot d_*\left(\varphi\left(\frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{\eta_2 - \eta_1}, 0\right), \varphi\left(0, \frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{\xi_1 - \xi_2}\right)\right) =$$

$$\frac{(\xi_1 - \xi_2)(\eta_2 - \eta_1)}{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1} \cdot \frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{(\xi_1 - \xi_2)(\eta_2 - \eta_1)} \cdot d_*(\varphi(\xi_1 - \xi_2, 0), \varphi(0, \eta_2 - \eta_1)),$$

откуда получаем требуемое. Здесь первое равенство следует из аффинности отображения φ и того факта, что точки $\varphi(\xi_1, \eta_1)$ и $\varphi(\xi_2, \eta_2)$ лежат на отрезке в A , соединяющем $\varphi(\xi_0, 0)$ с $\varphi(0, \eta_0)$, где

$$\xi_0 = \frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{\eta_2 - \eta_1}, \quad \eta_0 = \frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{\xi_1 - \xi_2},$$

а второе равенство — из того, что этот отрезок является образом при гомотетии h_k с коэффициентом

$$k = \frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{(\xi_1 - \xi_2)(\eta_2 - \eta_1)}$$

отрезка, соединяющего $\varphi(\xi_1 - \xi_2, 0)$ с $\varphi(0, \eta_2 - \eta_1)$.

В случае $\xi_1 = \xi_2$ при $\eta_1 < \eta_2$ отрезок с концами (ξ_1, η_1) можно при $\delta > 0$ приблизить отрезками с концами $(\xi_1 + \delta, \eta_1)$ и (ξ_2, η_2) , а отрезок с концами (ξ_3, η_3) и (ξ_4, η_4) — отрезками с концами $(\xi_3 + \delta, \eta_3)$ и (ξ_4, η_4) , для которых утверждение (4.1) истинно. В пределе при $\delta \rightarrow 0$ имеем (4.1) и в этом случае. Аналогично получаем равенство (4.1) во всех остальных случаях, когда $(\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1) = 0$.

Наконец, пусть $(\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1) > 0$. В этом случае для доказательства выполнения (4.1) достаточно показать выполнение равенств вида

$$d_*(\varphi(\xi_1, \eta_1), \varphi(\xi_2, \eta_2)) = d_*(p, \varphi(|\xi_2 - \xi_1|, |\eta_2 - \eta_1|)). \quad (4.3)$$

Образующий луч c , проходящий через $\varphi(|\xi_2 - \xi_1|, |\eta_2 - \eta_1|)$, делит A на два угла A' и A'' . Как минимум, один из них содержит обе точки $\varphi(\xi_1, \eta_1)$ и $\varphi(\xi_2, \eta_2)$. Сам луч служит образом при отображении φ луча

$$\frac{\xi}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\eta}{\eta_2 - \eta_1}, \quad \xi, \eta \geq 0,$$

плоскости $\mathbb{R}^2$. Предположим для определенности, что $\varphi(\xi_1, \eta_1), \varphi(\xi_2, \eta_2) \in A'$, и A' получается также, как и A с помощью подходящего отрезка $[uw]_* \subset [uv]_*$. Точка w — это точка пересечения $c \cap [uv]_*$.

Также обозначим $V' = \varphi^{-1}(A') \subset V$ и рассмотрим в V' систему координат (ξ', η') , полученную из координат (ξ, η) линейной заменой так, что координатная ось ξ' совпадает с координатной осью ξ , а координатная ось η' содержит луч $\varphi^{-1}(c)$. Отображение

$$\varphi' = \varphi|_{V'} : V' \rightarrow A'$$

обладает определением, аналогичным определению отображения φ , и к нему применимы все предыдущие рассуждения. В частности, рассматриваемые точки (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) в новой системе координат имеют равные первые координаты: $\xi'_1 = \xi'_2$. Поэтому

$$d_*(\varphi'(\xi'_1, \eta'_1), \varphi'(\xi'_2, \eta'_2)) = d_*(p, \varphi'(0, |\eta'_1 - \eta'_2|)).$$

Возвращаясь к координатам (ξ, η) и учитывая равенство $\varphi|_{V'} = \varphi'$, получаем требуемое равенство (4.3). $\square$

Определив в пространстве $\mathbb{R}^2$ норму равенством

$$\|(\xi, \eta)\| = \begin{cases} d_*(p, \varphi(|\xi|, |\eta|)), & \text{если } \xi\eta \geq 0; \\ d_*(\varphi(|\xi|, 0), \varphi(0, |\eta|)), & \text{если } \xi\eta \leq 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

получим, что φ является изометрией пространства $(V, d_{\|\cdot\|})$ на пространство (A, d_*) . Здесь $d_{\|\cdot\|}$ — метрика на V , индуцированная нормой $\|\cdot\|$.

Необходимо проверить выполнение аксиом нормы. Аксиомы положительности, положительной однородности и симметрии очевидны. Покажем выполнение аксиомы выпуклости

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

В силу леммы 8 норма (4.4) не зависит от выбора точки приложения вектора (ξ, η) . Внутри угла V начальную точку $a \in V$ можно выбрать так, что векторы $\vec{ab} = \vec{u}$ и $\vec{ac} = \vec{u} + \vec{v}$, отложенные от точки a , будут иметь соответственно концы b и c в V . Мы видим, что неравенство (4.4) эквивалентно неравенству треугольника относительно метрики d_* для точек $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ и $\varphi(c)$.

В итоге получается

Теорема 3. Множество A с метрикой d_* изометрично углу на плоскости $\mathbb{R}^2$, оснащенной нормой (4.4).

5. ПРОДОЛЖЕНИЕ НОРМИРОВАННЫХ УГЛОВ

Покажем, что нормированный угол A , построенный в предыдущих разделах, может быть продолжен до нормированной полуплоскости.

Определение 8. Пусть A — слабо выпуклый нормированный угол в пространстве (X, d_*) , определенный равенством (3.1) по образующим лучам a и b и подходящему отрезку $[uv]_*$. Рассмотрим образующие лучи $a', b' : [0, +\infty) \rightarrow X$, содержащиеся в A . Пусть $A' \subset A$ — подмножество, заключенное между a' и b' , $u' = a' \cap [uv]_*$, $v' = b' \cap [uv]_*$. В этом случае A' также является слабо выпуклым нормированным углом, построенным по отрезку $[u'v']_* \subset [uv]_*$. Угол A называется *продолжением* угла A' , соответствующим *подходящему продолжению* $[uv]_*$ подходящего отрезка $[u'v']_*$.

Пусть слабо выпуклый нормированный угол A , ограниченный образующими лучами a и b , построен по подходящему отрезку $[uv]_*$, $u \in a$, $v \in b$, и пусть $[u'v']_*$ — согласованное с $[uv]_*$ подходящее продолжение этого отрезка. Обозначим через a' , b' образующие лучи, содержащие u' и v' соответственно. Тогда угол A' , ограниченный этими лучами и построенный по отрезку $[u'v']_*$, очевидно, является продолжением угла A . В пределе получаем следующее.

Лемма 9. Пусть $A \subset X$ — нормированный угол пространства $K_p X$, образованный объединением вида (3.1), $c \subset X$ — прямая в смысле метрики d_* , являющаяся подходящим продолжением отрезка $[uv]_*$. Тогда замыкание W множества

$$W_0 = \bigcup_{k>0} h_k(c)$$

есть слабо выпуклая нормированная полуплоскость в $K_p X$.

Доказательство. Рассматривая прямую c как объединение бесконечно возрастающего семейства попарно согласованных подходящих отрезков $c = \bigcup_{\tau} [u_{\tau} v_{\tau}]_*$, получаем, что множество W_0 в объединении с $\{p\}$ есть объединение последовательных продолжений нормированных углов в $K_p X$. Каждый такой угол является изометрическим образом некоторого угла в плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (ξ, η) . Пусть в обозначениях леммы 8 отрезок $\varphi^{-1}([uv]_*)$ в плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет концы $(\xi_0, 0)$ и $(0, \eta_0)$. Множество $W_0 \cup \{p\}$ можно рассматривать как объединение образов $F_{\tau}(V_{\tau})$ семейства отображений $F_{\tau} : V_{\tau} \rightarrow X$, заданных на углах $V_{\tau} \subset \mathbb{R}^2$ с возрастающими по включению областями задания V_{τ} , содержащими квадрант $\xi, \eta \geq 0$ и совпадающих на общих частях областей задания. Значит, если $(\xi, \eta) \in V_{\tau}$, при $\tau' > \tau$, то

$$F_{\tau'}(\xi, \eta) = F_{\tau}(\xi, \eta). \quad (5.1)$$

Объединение всех областей задания есть открытая полуплоскость $\alpha_0 \subset \mathbb{R}^2$, определенная неравенством $\xi/\xi_0 + \eta/\eta_0 > 0$, в объединении с началом координат $(0, 0)$. Зададим на α_0 метрику ρ следующим образом. Пусть пары $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in \alpha_0$ таковы, что $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in V_{\tau}$ при некотором $\tau > 0$. Тогда полагаем

$$\rho((\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)) = d_*(F_{\tau}(\xi_1, \eta_1), F_{\tau}(\xi_2, \eta_2)).$$

Метрика ρ определена на α_0 корректно в силу (5.1). Отображение $f_0 : \alpha_0 \rightarrow W_0$, которое в точках (ξ, η) плоскости α_0 совпадает с $F_{\tau}(\xi, \eta)$ при $(\xi, \eta) \in V_{\tau}$, является изометрией и однозначно продолжается по непрерывности на $\bar{\alpha}_0$. $\square$

6. СКЛЕИВАЮЩИЕСЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В этом разделе завершаем доказательство теоремы 1.

Рассматривая образующие лучи a_+ и b_+ как части образующих прямых a и b соответственно, можно предположить, что выполнив построения двух полуплоскостей по схеме, описанной в предыдущих разделах, используя при построении первой заданные лучи, а при построении второй — дополнительные к ним лучи a_- и b_- соответственно, а затем объединив построенные полуплоскости, мы получим в итоге целую нормированную плоскость в $K_p X$. Но аккуратный анализ показывает, что грубая попытка объединения полуплоскостей в общем случае к успеху может не привести. Во-первых, нормы в полученных полуплоскостях не обязаны быть согласованными друг с другом. Во-вторых, границы этих полуплоскостей, вообще говоря, не совпадают. В третьих, даже если границы полуплоскостей совпадают, а нормы согласуются, объединение таких полуплоскостей в общем случае не является слабо выпуклым подмножеством в $K_p X$.

Здесь мы предъявляем конструкцию, приводящую к слабо выпуклой нормированной плоскости в $K_p X$, содержащей две заданные образующие a и b конуса $K_p X$.

Итак, пусть $a, b \subset X$ — две образующие конуса $K_p X$, заданные натуральными параметризациями $a, b : \mathbb{R} \rightarrow X$ так, что $a(0) = b(0) = p$. Примем обозначения $a_+ = a(\mathbb{R}_+)$, $a_- = a(\mathbb{R}_-)$, $b_+ = b(\mathbb{R}_+)$ и $b_- = b(\mathbb{R}_-)$. В этих обозначениях лучи a_+ и a_- — это дополнительные образующие лучи, так же как и лучи b_+ и b_- . Для лучей a_+ и b_+ натуральные параметризации

$a_+, b_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ представляются в виде $a_+(t) = a(t)$ и $b_+(t) = b(t)$ соответственно, а для лучей a_- и b_- — в виде $a_-(t) = a(-t)$ и $b_-(t) = b(-t)$.

Обозначим $v_+ = b(1)$, $v_- = b(-1)$, и также для произвольного $\sigma \geq 1$ обозначим $u_{(\sigma,+)} = a(\sigma)$ и $u_{(\sigma,-)} = a(-\sigma)$. Пользуясь леммой 1, при каждом $\sigma \geq 1$ построим пару согласованных друг с другом подходящих отрезков $[u_{(\sigma,+)}v_+]_*$ и $[u_{(\sigma,-)}v_-]_*$, которые методом последовательного расширения достроим до согласованных подходящих прямых $c_{(\sigma,+)}$ и $c_{(\sigma,-)}$ так, что $[u_{(\sigma,\pm)}v_{\pm}]_* \subset c_{(\sigma,\pm)}$. Порождающая последовательность, общая для прямых $c_{\sigma,\pm}$ при заданном σ , строится с применением диагонального процесса Кантора. Прямые $c_{\sigma,\pm}$ при различных σ согласованными друг с другом могут не быть. Но понятно, что все они согласованы как с прямой a , так и с прямой b (прямые a и b , будучи образующими конуса, согласованы с любой подходящей прямой в $K_p X$).

Обозначим через $\beta_{(\sigma,\pm)}$ пару полуплоскостей, полученных соответственно замыканием множеств

$$\beta_{(\sigma,\pm)_0} = \bigcup_{k>0} h_k(c_{(\sigma,\pm)}).$$

Их границы при $\sigma \rightarrow +\infty$, независимо от выбора знака $+$ или $-$, неограниченно приближаются к предельному положению — прямой $a = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow 0} h_k(c_{(\sigma,\pm)})$. Здесь пределы понимаются в смысле равномерной сходимости на ограниченных областях задания натуральных параметризаций.

Пусть на $\mathbb{R}^2$ задана стандартная евклидова метрика ρ . Для каждого $\sigma \geq 1$ зададим аффинные отображения $\Psi_{(\sigma,\pm)} : \mathbb{R}_{\pm}^2 \rightarrow \beta_{(\sigma,\pm)}$, при которых радиальные лучи $\xi/\eta = \text{const}$ полуплоскостей

$$\mathbb{R}_{\pm}^2 = \{(\xi, \eta) \mid \pm \eta \geq 0\}$$

отображаются на образующие лучи в полуплоскостях $\beta_{(\sigma,\pm)}$, прямые $\eta = \pm 1$ изометрически отображаются на $c_{(\sigma,\pm)}$, лучи $\{\xi = 0, \eta > 0\} \subset \mathbb{R}_+^2$ и $\{\xi = 0, \eta < 0\} \subset \mathbb{R}_-^2$ изометрически отображаются соответственно на лучи $b_+ \subset \beta_{(\sigma,+)}$ и $b_- \subset \beta_{(\sigma,-)}$, а прямая $\partial R_+^2 = \partial R_-^2$ с уравнением $\eta = 0$ изометрически отображается при $\Psi_{(\sigma,+)}$ на $\partial \beta_{(\sigma,+)}$, а при $\Psi_{(\sigma,-)}$ — на $\partial \beta_{(\sigma,-)}$. Из инвариантности полуплоскостей $\beta_{(\sigma,\pm)}$ относительно действия группы H следует, что отображения $\Psi_{(\sigma,\pm)}$ являются изометричными также на каждой из прямых с уравнениями $\eta = \text{const}$, а поскольку каждая пара таких прямых стягивает в $\beta_{(\sigma,\pm)}$ нормированную полосу, отображения $\Psi_{(\sigma,\pm)}$ являются изометричными на лучах $\xi = \text{const}$, $\eta \geq 0$, в $\mathbb{R}_+^2$ и на лучах $\xi = \text{const}$, $\eta \leq 0$, в $\mathbb{R}_-^2$.

Для произвольных точек $x_1(\xi_1, \eta_1), x_2(\xi_2, \eta_2) \in \mathbb{R}_+^2$ имеем оценку

$$d_*(\Psi_{(\sigma,+)}(x_1), \Psi_{(\sigma,+)}(x_2)) \leq |\xi_2 - \xi_1| + |\eta_2 - \eta_1| \leq 2\rho(x_1, x_2),$$

из которой следует равностепенная непрерывность семейства отображений $\Psi_{(\sigma,+)}$. Аналогично, семейство отображений $\Psi_{(\sigma,-)}$ также является равностепенно непрерывным.

Пусть $B_{\pm}$ — пара полукругов плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$B_{\pm} = \{(\xi, \eta) \mid \xi^2 + \eta^2 \leq 1, \pm \eta \geq 0\}.$$

Поскольку образы полукругов B_+ содержатся в единичном шаре пространства $K_p X$, семейство отображений $\Psi_{(\sigma,+)}$, ограниченных на B_+ , является также и равномерно ограниченным семейством. Вследствие обобщенной теоремы Арцела (см. [7], теорема 7, с. 114) оно предкомпактно, т. е. из любой бесконечно возрастающей последовательности σ_n можно выделить подпоследовательность σ_{n_k} , для которой последовательность отображений $\Psi_{(\sigma_{n_k},+)}|_{B_+}$ равномерно сходится к вложению $\Psi_+|_{B_+} : B_+ \rightarrow X$. Для удобства будем считать, что уже

последовательность $\Psi_{(\sigma_n,+)}|_{B_+}$ обладает этим свойством. Продолжив $\Psi_+|_{B_+}$ на всю полуплоскость $\mathbb{R}_+^2$ как аффинное на радиальных лучах отображение $\Psi_+ : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow X$, получим полуплоскость $\Psi_+(\mathbb{R}_+^2) \subset X$, которая является пределом полуплоскостей $\beta_{(\sigma_n,+)}$.

Аналогично, ограничив на полукруг B_- семейство отображений $\Psi_{(\sigma,-)}$, получим семейство $\Psi_{(\sigma,-)}|_{B_-} : B_- \rightarrow X$, которое также предкомпактно. Выделив из последовательности отображений $\Psi_{(\sigma_n,-)}$ сходящуюся подпоследовательность $\Psi_{(\sigma_{n_k},-)}$, перейдя к предельному отображению $\Psi_-|_{B_-}$ и построив его до отображения полуплоскости, которое аффинно на радиальных лучах, получим пару отображений

$$\Psi_{\pm} : \mathbb{R}_{\pm}^2 \rightarrow X,$$

совпадающих на $\mathbb{R}^1 = \partial\mathbb{R}_+^2 = \partial\mathbb{R}_-^2$. При этом $\Psi_+(\mathbb{R}^1) = \Psi_-(\mathbb{R}^1) = a$, и ограничения $\Psi_{\pm}$ на $\mathbb{R}^1$ являются изометриями $\mathbb{R}^1$ на a .

В итоге имеем вложение $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow X$, которое на $\mathbb{R}_+^2$ совпадает с Ψ_+ , а на $\mathbb{R}_-^2$ совпадает с Ψ_- . Далее мы покажем, что образ $\Psi(\mathbb{R}^2)$ является слабо выпуклым подмножеством в $K_p X$ и что метрика на $\mathbb{R}^2$, индуцированная отображением Ψ , порождена нормой.

Заметим, что каждая из двух полуплоскостей $\Psi(\mathbb{R}_+^2)$ и $\Psi(\mathbb{R}_-^2)$ является слабо выпуклой нормированной полуплоскостью. Следовательно, остается показать, что условие слабой выпуклости не нарушается при склейке и нормы двух склеиваемых полуплоскостей совпадают.

Пара прямых $c_{\pm}$, являющихся образами при отображении Ψ прямых $\eta = \pm 1$, будучи пределом последовательности пар согласованных подходящих прямых, также является парой согласованных подходящих прямых. А поскольку эти прямые параллельны a , то они параллельны между собой. Следовательно, при любом $t \in \mathbb{R}$ функция $f(s) = d_*(\Psi(s, -1), \Psi(s + t, 1))$ является константой. Кроме того, обе указанные прямые согласованы и с прямой b как с образующей конуса $K_p X$.

При произвольном $t \neq 0$ рассмотрим точки $m_t = \Psi(-t, -1)$ и $n_t = \Psi(t, 1)$. Обозначим $u_t = \Psi(-2t, -1)$, $v_t = \Psi(2t, 1)$, $x_- = \Psi(0, -1) = c_- \cap b$, $x_+ = \Psi(0, 1) = c_+ \cap b$. Из треугольника $x_- x_+ u_t$ получаем

$$d_*(m_t, p) \leq \frac{1}{2} d_*(u_t, x_+),$$

а из треугольника $x_+ x_- v_t$ —

$$d_*(p, n_t) \leq \frac{1}{2} d_*(x_-, v_t).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d_*(m_t, n_t) &\leq d_*(m_t, p) + d_*(p, n_t) \leq \frac{1}{2} (d_*(u_t, x_+) + d_*(x_-, v_t)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2d_*(m_t, n_t) = d_*(m_t, n_t), \end{aligned}$$

и точка p является серединой между m_t и n_t . Отсюда легко следует, что для любых точек $u \in \Psi(\mathbb{R}_+^2)$ и $v \in \Psi(\mathbb{R}_-^2)$ найдется точка $w \in a$, лежащая между u и v в смысле метрики d_* на X . Это доказывает слабую выпуклость плоскости $\Psi(\mathbb{R}^2)$. Теперь совпадение норм является следствием того факта, что центральная симметрия относительно p сохраняет расстояние d_* на образующих. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Busemann H., Phadke B.B. *Spaces with distinguished geodesics* (Marcel Dekker, New York, 1987).
- [2] Descombes D., Lang U. *Convex geodesic bicomings and hyperbolicity*, *Geom. Dedicata* **177** (1), 367–384 (2015).

- [3] Андреев П.Д., Старостина В.В. *Геометрия касательного конуса к G -пространству неположительной кривизны с выделенным семейством отрезков*, Изв. вузов. Матем., № 1, 3–14 (2016).
- [4] Андреев П.Д. *Доказательство гипотезы Буземана для G -пространств неположительной кривизны*, Алгебра и анализ **26** (2), 1–20 (2014).
- [5] Андреев П.Д., Колчар М.А. *Нормированные плоскости в G -пространствах Буземана неположительной кривизны конического типа*, Вестн. Северного (Арктического) фед. ун-та. Сер. Естественные и точные науки, № 1, 102–106 (2015).
- [6] Андреев П.Д. *Структура нормированного пространства в G -пространстве Буземана конического типа*, Матем. заметки **101** (2), 169–180 (2017).
- [7] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, М., 1976).

Павел Дмитриевич Андреев

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
наб. Северной Двины, д. 17, г. Архангельск, 163002, Россия,

e-mail: pdandreev@mail.ru

Вера Валерьевна Старостина

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
наб. Северной Двины, д. 17, г. Архангельск, 163002, Россия,

e-mail: v.starostina@narfu.ru

P.D. Andreev and V.V. Starostina

Normed planes in tangent cone to chord space of nonpositive curvature

Abstract. We continue the cycle of papers devoted to study of the geometry of Busemann's G -spaces with distinguished family of segments (so-called chord spaces) which have non-positive curvature with respect to this family. We study the geometry of the tangent cone to chord space with non-positive curvature. It is shown that any two straight lines passing through the vertex of the cone span a weak normed plane, i. e., a weakly convex subset isometric to a plane with some norm.

Keywords: chord space, distinguished segments family, basic chord, non-positive curvature, tangent cone, normed plane, weak convexity.

Pavel Dmitrievich Andreev

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
17 Severnaya Dvina emb., Arkhangelsk, 163002 Russia,

e-mail: pdandreev@mail.ru

Vera Valer'evna Starostina

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
17 Severnaya Dvina emb., Arkhangelsk, 163002 Russia,

e-mail: v.starostina@narfu.ru