Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Х. Бурчаев, Г. Ю. Рябых, О приближении неаналитических функций аналитическими, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 1, 18–28

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-18-28>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:36:15

Х.Х. БУРЧАЕВ, Г.Ю. РЯБЫХ

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКИМИ

Аннотация. Изучаются свойства элементов наилучшего приближения для суммируемых по единичному кругу функций функциями из пространства Бергмана. Для приближаемых функций специального вида дано достаточно точное описание свойств этих элементов в терминах классов Харди и Липшица. Полученный результат основан на проведении анализа соответствующего соотношения двойственности для экстремальных задач. Разработанный метод применим и относительно достаточно гладких (в терминах пространств Соболева) приближаемых функций.

Ключевые слова: пространство Бергмана, пространство Харди, элемент наилучшего приближения, линейный функционал, экстремальная задача.

УДК: 517.53

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $D = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, $\zeta = \xi + i\eta$, $dA = \frac{d\xi d\eta}{\pi}$ — плоская нормированная мера Лебега. Пространство $L_q(D)$, $1 \leq q < \infty$, состоит из комплексных функций w , наделенных конечной нормой

$$\|w\|_q = \left(\int_D |w(\zeta)|^q dA \right)^{1/q}.$$

Через A_q (пространства Бергмана) обозначаем замкнутое подпространство пространства $L_q(D)$, образованное функциями, аналитическими в D .

Говорят, что функция ψ , аналитическая в D , принадлежит пространству Харди H_q , если

$$\|\psi\|_{H_q}^q = \sup_{0 < \rho < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi(\rho e^{i\theta})|^q d\theta < \infty.$$

Пусть $\mathcal{A}$ — замкнутое подпространство пространства $L_q(D)$, $w \in L_q(D) \setminus \mathcal{A}$. Допустим, что существует такая функция $H \in \mathcal{A}$, что

$$\inf\{\|w - a\|_q : a \in \mathcal{A}\} = \|w - H\|_q. \quad (1)$$

В общей постановке нас интересует вопрос, как те или иные свойства функции w в (1) отражаются на свойствах функции H . Например, если $w \in W^{1,q}(D)$ (пространство Соболева), $\mathcal{A} = A_q$, то $H \in H_q$ (см. [1], теорема 4.1).

Поступила в редакцию 09.12.2017. После доработки 09.12.2017. Принята к публикации 22.03.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00017.

В данной работе задачу (1) изучаем для $\mathcal{A} = A_q$ при достаточно гладкой в терминах пространства Соболева приближаемой функции вида $(1 - |\zeta|^2)d$, где $d \in L_q(D)$.

Функцию H в (1) называем *элементом наилучшего приближения* (э. н. п.) для приближаемой функции w .

Пусть $p : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $A_p^\perp = \{\varphi \in L_p(D) : \int_D \varphi \psi dA = 0 \text{ для всех } \psi \in A_q\}$ — пространство, ортогональное пространству A_q .

В исследовании поставленной задачи находит применение следующий хорошо известный факт: если $w \in L_q(D)$, $1 < q < \infty$, то существуют единственные функции $F \in A_p^\perp$, $\|F\|_p = 1$, и $X \in A_q$, для которых (двойственность)

$$\begin{aligned} \lambda &= \sup \left\{ \left| \int_D \varphi w dA \right| : \varphi \in A_p^\perp, \|\varphi\|_p \leq 1 \right\} = \\ &= \int_D F w dA = \inf \{ \|w - x\|_q : x \in A_q \} = \|w - X\|_q. \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношение (2) выполняется тогда и только тогда, когда почти всюду (п. в.)

$$F(\zeta) = \frac{1}{\lambda^{q-1}} \frac{|w(\zeta) - X(\zeta)|^q}{w(\zeta) - X(\zeta)} \quad (3)$$

(см., например, [1], теоремы 2.1 и 3.1).

Различным экстремальным задачам в пространствах A_q и H_q посвящено большое количество работ. Но поставленная в данной работе основная задача остается менее изученной.

Основной результат этой статьи сводится к нижеслеующим теоремам 1 и 2.

Теорема 1. Пусть в равенстве (2) $1 < q < 2$ и $w(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\bar{k}(\zeta)$, где $k \in A_{q^*}$, $q \leq q^* < 2$. Тогда $X \in \bigcap_{\gamma < q^*} H_\gamma$, где $q^* = q^*/(2 - q^*)$.

Теорема 2. Пусть в равенстве (2) $1 < q < \infty$ и $w(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)^{m+1}\bar{k}(\zeta)$, где $m = 0, 1, \dots$, $k \in A_{s^*}$, $s^* > 2$, $q \leq s^* < \infty$. Тогда $X = BX_*$, где X_* — внешняя функция, $(|X_*(t)|^q)^{(m)} \in \text{Lip}(1 - 2/s^*)$, B — произведение Бляшке.

В доказательствах теорем 1 и 2 существенное применение находит вид приближаемой функции, используются сведения из [1]–[5].

После доказательства теоремы 1 даны некоторые ее обобщения (предложения 1 и 2). О степени точности описания э. н. п. говорится в замечаниях 1 и 2 в конце работы.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть $a \in A_p$, $c \in A_q$, $c^{\{1,0\}} = \zeta c' + 2c$, тогда

$$\int_D a \bar{c} dA = \int_D a (1 - |\zeta|^2) \overline{c^{\{1,0\}}} dA. \quad (4)$$

Формула (4) легко устанавливается с помощью рядов Тейлора функций $a(\zeta)$ и $c(\zeta)$ (например, [2], следствие 1.3.3, с. 14). Соответственно

$$c \in A_q \iff (1 - |\zeta|^2)c^{\{1,0\}} \in L_q(D). \quad (5)$$

Доказательство этого утверждения тривиально (частный случай теоремы 1.8.1 из [2], с. 29).

Всюду далее $\zeta = \rho t$, $0 \leq \rho < 1$, $t = e^{i\theta}$, $\mathbb{T} = \partial D$.

Лемма 1. Пусть $\omega' \in A_{q^*}$, $1 < q \leq q^* < 2$, тогда

- 1) функция $\omega \in H_{q^*}$, где $q^* = q^*/(2 - q^*)$;
- 2) функция $\omega(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\overline{\omega}'(\zeta) \in L_{2q^*}(D)$;
- 3) $\omega(\rho t) \rightarrow 0$ в $L_{q^*}(D)$, когда $\rho \rightarrow 1$.

Доказательство. В силу (4) имеем $(\omega^{\{1,0\}} = \zeta\omega' + 2\omega)$

$$\overline{\omega}(z) = \int_D \frac{\overline{\omega}(\zeta)}{(1 - \zeta\overline{z})^2} dA = \int_D \frac{(1 - |\zeta|^2)\overline{\omega^{\{1,0\}}}(\zeta)}{(1 - \zeta\overline{z})^2} dA.$$

Умножим обе части предыдущего равенства на $a(e^{i\varphi})$, где $a \in H_\beta$, $1/\beta + 1/q^* = 1$, и проинтегрируем по φ . Меняя порядок интегрирования, $z = re^{i\varphi}$, используя формулу $\left(\int_0^{2\pi} (\cdot) d\varphi = \int_{\mathbb{T}} (\cdot) d\varphi\right)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{a(e^{i\varphi}) d\varphi}{(1 - \zeta\overline{z})^2} = (\zeta a)'(r\zeta),$$

получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} a(e^{i\varphi}) \overline{\omega}(re^{i\varphi}) d\varphi = \int_D \overline{\omega^{\{1,0\}}}(1 - |\zeta|^2) (\zeta a)'(r\zeta) dA.$$

Интеграл в правой части этого равенства оценим с помощью неравенства Гёльдера. Так как $a \in H_\beta$, $\beta = q^*/2(q^* - 1)$, то $a \in A_{2\beta}$ в силу вложения H_s в A_{2s} (например, [3], теорема 2.8, с. 34). Соответственно с учетом, что условие $a \in A_{2\beta}$ равносильно $(1 - |\zeta|^2)(\zeta a)' \in L_{2\beta}(D)$ согласно (5), $1/2\beta + 1/q^* = 1$, получим

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} a(e^{i\varphi}) \overline{\omega}(re^{i\varphi}) d\varphi \right| \leq C(\beta, q^*) \|\omega^{\{1,0\}}\|_{q^*} \|a\|_{H_\beta},$$

где константа $C > 0$ зависит только от β и q^* . Поэтому интеграл в левой части последнего неравенства является линейным функционалом над H_β . Следовательно, функция $\omega \in H_{q^*}$ (см., например, [4], п. 6, с. 96), т. е. выполняется утверждение 1). Тогда $\omega \in A_{2q^*}$, откуда вытекает 2). Утверждение 3) является следствием 1) (если $c \in H_s$, то $(1 - \rho)\|c'(\rho t)\|_{H_s} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1$; доказательство последнего не вызывает особых затруднений (например, [2], лемма 2.10.2, с. 84)). $\square$

Пусть $0 < \delta_n < 1$, $\delta_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, $x_n(\zeta) = x(\delta_n \zeta)$, $x \in A_q$, функция $w \in L_q(D)$.

Следуя стандартным рассуждениям, проведенным, например, в [1], при выводе равенства (2), заключаем, что существует единственная функция $X_n(\zeta) = X^{(\delta_n)}(\delta_n \zeta)$, где функция $X^{(\delta_n)}$ аналитична в D , для которой

$$\lambda_n = \inf\{\|w - x_n\|_q : x_n(\zeta) = x(\delta_n \zeta), x \in A_q\} = \|w - X_n\|_q. \quad (6)$$

При этом

$$F_n(\zeta) = \frac{1}{\lambda_n^{q-1}} \frac{|w(\zeta) - X_n(\zeta)|^q}{w(\zeta) - X_n(\zeta)} \in A_q^\perp \quad (7)$$

(например, [5], п. 1.5, теорема А, с. 12).

Лемма 2. Пусть в равенстве (2) $1 < q < \infty$ и $w = (1 - |\zeta|^2)\overline{k}$, где $k \in A_q$. Тогда $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $F_n \rightarrow F$ в $L_p(D)$, $X_n \rightarrow X$ в A_q .

Доказательство основано на соответствующих стандартных рассуждениях, проведенных в [1] и [5]. Действительно, последовательность $\{x_n\} \in AC$ и множество AC (функций, аналитических на $\bar{D}$) плотно в A_q . Теперь в силу хода доказательства теоремы 2.1 из [1] о существовании э. н. п. в (2) и (6) следует

$$\lambda_n = \|w - X_n\|_q \rightarrow \lambda. \quad (8)$$

Более того, $X_n \rightarrow X$ в A_q . Но пространство $L_p(D)$ равномерно выпуклое, поэтому из (8), (3) и (7) вытекает $F_n \rightarrow F$ в $L_p(D)$ (см. [5], теорема 2.6, с. 19). $\square$

Лемма 3. Пусть в равенстве (2) $w = (1 - |\zeta|^2)\bar{k}$, где $k \in A_q$, $1 < q < \infty$. Тогда если $h(\zeta)$ — алгебраический полином, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |X_n|^q h d\theta = \lambda_n^q \int_D \left[-\frac{q}{2} F_n \bar{\zeta} k(\zeta h) + \frac{q}{2} \bar{F}_n (\bar{\zeta} k + (1 - |\zeta|^2)k')(\zeta h) + \right. \\ \left. + F_n \bar{k}((1 - |\zeta|^2)(\zeta h)') \right] dA. \end{aligned} \quad (9)$$

Доказательство. Согласно лемме 1 (3), $k = \omega'$, $q < q_*$, имеем, что $w(\rho t) \rightarrow 0$ в $L_q(\mathbb{T})$ при $\rho \rightarrow 1$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{T}} |X_n(t)|^q h(t) d\theta = \lim_{\rho \rightarrow 1} \int_{\mathbb{T}} |w(\rho t) - X_n(\rho t)|^q h(t) d\theta. \quad (10)$$

В условиях леммы функция $w \in W^{1,q}(D)$ на основании (5). Тогда относительно функции $|w(\zeta) - X_n(\zeta)|^q \zeta$ применима формула Стокса (этот факт для общего случая $w \in W^{1,q}(D)$ обоснован в начале доказательства теоремы 4.1 из [1]). Аналогично эта формула применима и относительно функции $|w(\zeta) - X_n(\zeta)|^q h(\zeta)$. Далее, имея ввиду (10) и (7), получим (аналог равенства 4.2 из ([1], теорема 4.1))

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |X_n(t)|^q h(t) d\theta &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |w(\rho t) - X_n(\rho t)|^q t h d\bar{t} = \\ &= \int_D \frac{\partial}{\partial \zeta} (|w(\zeta) - X_n(\zeta)|^q (\zeta h)) dA = \int_D \frac{\partial}{\partial \zeta} [(w - X_n)^{q/2} (\bar{w} - \bar{X}_n)^{q/2}] \zeta h dA + \\ &\quad + \int_D |w - X_n|^q (\zeta h)' dA = \frac{q}{2} \int_D \left[\frac{|w - X_n|^q}{w - X_n} \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} - X_n' \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|w - X_n|^q}{\bar{w} - \bar{X}_n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} \right] \zeta h dA + \int_D \frac{|w - X_n|^q}{w - X_n} (w - X_n) (\zeta h)' dA = \\ &= \lambda_n^{q-1} \int_D \left(\frac{q}{2} F_n \frac{\partial w}{\partial \zeta} (\zeta h) + \frac{q}{2} \bar{F}_n \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} (\zeta h) + F_n w (\zeta h)' \right) dA - \\ &\quad - \lambda_n^{q-1} \left(\int_D F_n X_n' \zeta h dA + \int_D F_n X_n (\zeta h)' dA \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\bar{\zeta} \bar{k}$, $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} = -\bar{\zeta} k + (1 - |\zeta|^2)k'$. Поскольку $X_n' \zeta h$ и $X_n (\zeta h)'$ принадлежат A_q в силу $X_n \in AC$, функция $F_n \in A_p^\perp$, заключаем, что последние два интеграла в правой части равенства (11) равны нулю. Теперь, после соответствующего преобразования, получим равенство (9). $\square$

Доказательство основной части теоремы 1. Положим в равенстве (9) $h = 1$. С помощью неравенства треугольника и неравенства Гёльдера получим ($\|F_n\|_p = 1$)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |X_n(t)|^q d\theta \leq \lambda_n^{q-1} C(q) \|k\|_q. \quad (12)$$

По лемме 1 последовательность $\lambda_n \rightarrow \lambda$, поэтому на основании оценки (12) последовательность $\{X_n\}$ ограничена в H_q , значит, и в A_{2q} . В силу (7) п. в.

$$|F_n(\zeta)|^p = \frac{1}{\lambda_n^q} |w(\zeta) - X_n(\zeta)|^q. \quad (13)$$

Согласно лемме 1 ($\omega' = k$) функция $w \in L_{2q}(D)$, где $q < q/(2-q) \leq q^*/(2-q^*) = q_*$. Отсюда и из (13) следует, что последовательность $\{F_n\}$ ограничена в $L_{2p}(D)$ в силу $2q < 2q_*$.

Положим $p_1 = p$, $q_1 = q^*/2$, $m_1(\beta) = 1/2p_1 + 1/2q_1 + 1/2\beta_1$. Функция $m_1(\beta)$ непрерывна относительно $1 \leq \beta < \infty$. Так как $q^* < 2$, то $m_1(1) > 1/2p_1 + 1/2 + 1/2 = 1$, при этом $\lim_{\beta \rightarrow \infty} m_1(\beta) = 1/2p_1 + 1/q^* < 1$. Поэтому по непрерывности найдется $1 < \beta_1 < \infty$ такое, что $m_1(\beta_1) = 1/2p_1 + 1/2q_1 + 1/2\beta_1 = 1$. Правую часть равенства (9) оценим с помощью неравенства треугольника. Принимая во внимание, что H_{β_1} вложено в $A_{2\beta_1}$, $\|(1-|\zeta|^2)(\zeta h)'\|_{2\beta_1} \leq d_1(\beta_1) \|h\|_{2\beta_1} \leq d_2(\beta_1) \|h\|_{H_{\beta_1}}$, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |X_n|^q h d\theta \right| \leq C(p, q^*) \|F_n\|_{2p_1} \|k\|_{q^*} \|h\|_{H_{\beta_1}}. \quad (14)$$

С учетом

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |X_n|^q \operatorname{Re}(h) d\theta \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |X_n|^q h d\theta \right| \quad (15)$$

и

$$\|h\|_{H_{\beta_1}} \leq \|\operatorname{Re}(h)\|_{L_{\beta_1}(\mathbb{T})} + \|\operatorname{Im}(h)\|_{L_{\beta_1}(\mathbb{T})} \leq (1 + C_{\beta_1}) \|\operatorname{Re}(h)\|_{L_{\beta_1}(\mathbb{T})}$$

(см. [6], с. 215), оценку (14) с помощью (15) сводим к оценке

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |X_n|^q \operatorname{Re}(h) d\theta \right| \leq C_1(p, q^*) \|F_n\|_{2p_1} \|k\|_{q^*} \|\operatorname{Re}(h)\|_{L_{\beta_1}}. \quad (16)$$

Множество тригонометрических полиномов плотно в $L_{\beta_1}(\mathbb{T})$, $\beta_1 > 1$ (см. [6], с. 42). Поэтому линейный функционал из левой части (16) можно с сохранением нормы продолжить на все пространство $L_{\beta_1}(\mathbb{T})$, т. е. для любого $b \in L_{\beta_1}(\mathbb{T})$ имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |X_n|^q b d\theta \right| \leq C_1(p, q^*) \|F_n\|_{2p_1} \|k\|_{q^*} \|b\|_{L_{\beta_1}(\mathbb{T})}. \quad (17)$$

Откуда, опираясь на теорему об аналитическом представлении линейного функционала над $L_{\beta_1}(\mathbb{T})$, $\beta_1 > 1$ (см. [7], теорема 1, с. 252), заключаем, что последовательность X_n ограничена в H_{q_2} , $q_2 = \alpha_1 q$, значит, и в A_{2q_2} .

Пусть $n \geq 2$, $\mu_{n-1}p = 1/\gamma_n$, где

$$\gamma_n = \left(\frac{1}{p}\right)^n + \left(\frac{1}{q_1} - 1\right) \left[\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{1}{p}\right) \right],$$

тогда $\gamma_{n+1} = (1/p)^n (1/p + 1/q_1 - 2) + \gamma_n$. Отсюда с учетом $q_1 = q^*/2$, $q \leq q^*$, $1/p_1 + 1/q_1 - 2 < -1/q + 2/q^* - 1 \leq 1/q - 1 < 0$ видим, что последовательность $\{\mu_{n-1}p\}$ возрастает, поэтому $\mu_{n-1}p < \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n-1}p = (p-1)q^*/(2-q^*)$. Следовательно, $\mu_{n-1}q < q^*/(2-q^*) = q_*$. Ниже мы воспользуемся этим замечанием.

Ввиду $p_1 = p$, $1/\alpha_1 + 1/\beta_1 = 1$, $1/p_1 + 1/q_1 + 1/\beta_1 = 2$ определяем, что число

$$p_2 = \alpha_1 p = \frac{p_1}{1 - \frac{1}{\beta_1}} = \frac{p_1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{q_1} - 1\right)\left(\frac{1}{p}\right)} = \mu_1 p < (p-1)q_*. \quad (18)$$

Соответственно, как это следует из (18), $\alpha_1 q = q_2 < q_*$. Причем, как отмечалось, $\{X_n\}$ ограничена в A_{2q_2} . Теперь из (13) и $w \in L_{2q_*}(D)$ по лемме 1 (2), $\omega' = k$ заключаем, что последовательность $\{F_n\}$ ограничена в $L_{2q_2}(D)$. Аналогично предыдущему функция $m_2(\beta) = 1/2p_2 + 1/2q_1 + 1/2\beta$ такова, что $m_2(1) > 1$. Так как $p_1 < p_2$, то $m_2(\beta) < m_1(\beta)$, где $m_1(\beta) < 1$ для достаточно больших β . Поэтому найдется $\beta_2 > 1$ такое, что $m_2(\beta_2) = 1/2p_2 + 1/2q_1 + 1/2\beta_2 = 1$. Рассуждая как при выводе оценки (17), получим оценку

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} b |X_n|^q d\theta \right| \leq C_2(p, q^*) \|F_n\|_{2p_2} \|k\|_{q^*} \|b\|_{L_{\beta_2}(\mathbb{T})}.$$

Отсюда также по аналогии следует, что последовательность $\{X_n\}$ ограничена в H_{q_3} , где $q_3 = \alpha_2 q$, $1/\alpha_2 + 1/\beta_2 = 1$. При этом аналогично (18) число

$$p_3 = \alpha_2 p = \frac{p_2}{1 - \frac{1}{\beta_2}} = \frac{p_2}{\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_1} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{p}\right)^3 + \left(\frac{1}{q_1} - 1\right)\left[\left(\frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{p}\right)\right]} = \mu_2 p < (p-1)q_*.$$

Следовательно, $q_3 < q_*$, соответственно последовательность $\{F_n\}$ ограничена в $L_{2p_3}(D)$ на основании (13) и $w \in L_{2q_*}(D)$.

После m -кратного повторения аналогичных вычислений по индукции заключаем, что последовательность $\{X_n\}$ ограничена в H_{q_m} , где возрастающая последовательность $q_m = \alpha_{m-1} q \rightarrow q_*$. Соответственно последовательность $\{F_n\}$ ограничена в $L_{2p_m}(D)$, $p_m < (p-1)q_*$, $p_m \rightarrow (p-1)q_*$. Теперь ввиду $X_n \rightarrow X$ в D в силу $X_n \rightarrow X$ в A_q по лемме 2, переходя в $\|X_n(\rho t)\|_{H_{q_m}}$ к пределу при $n \rightarrow \infty$, заключаем, что $X \in \bigcap_{\gamma < q_*} H_\gamma$. $\square$

Из хода доказательства теоремы 1 видно, что для получения аналогичного результата относительно э. н. п. в задаче (2) при $w = (1 - |\zeta|^2)d$ достаточно потребовать от функции d определенной гладкости. При этом приближаемую функцию необязательно связывать, как в теореме 1, с аналитической функцией. Именно, справедливо

Предложение 1. Если в равенстве (2) $1 \leq q \leq q^* < 2$ и $w = (1 - |\zeta|^2)k$, где $k \in L_{2q_*}(D) \cap W^{1,q^*}(D)$, $q_* = q^*/(2 - q^*)$, то э. н. п. $X \in \bigcap_{\gamma < q_*} H_\gamma$.

Доказательство. При $1 = q = q^*$ функция $k \in W^{1,1}(D)$, значит, $(1 - |\zeta|^2)k = w \in W^{1,1}(D)$. Откуда по ([1], теорема 4.1) следует $X \in H_1$. Тогда тем более $X \in \bigcap_{\gamma < q_*} H_\gamma$.

Пусть $1 < q \leq q_* < 2$, $k_r(\zeta) = k(r\zeta)$, $0 < r < 1$. Так как $k \in W^{1,q^*}(D)$, то $k_r \in W^{1,q}(D)$, а на основании неравенства Соболева

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |k(rt)|^q d\theta \leq C \|k_r\|_{W^{1,q}(D)}$$

(например, [1], неравенства (4.3) и (4.4)). Откуда, $\|k_\rho\|_{W^{1,q}(D)} \rightarrow \|k\|_{W^{1,q}(D)}$ при $\rho \rightarrow 1$, следует

$$\int_{\mathbb{T}} |(1 - \rho)k(\rho t)|^q d\theta = \int_{\mathbb{T}} |w(\rho t)|^q d\theta \rightarrow 0.$$

Отсюда вытекает условие (10) для соответствующего X_n .

Далее, фактически дословно повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве теоремы 1, получаем требуемое. $\square$

Класс функций, для которых э. н. п. в равенстве (2) принадлежит $\bigcap_{\gamma < q^*} H_\gamma$, достаточно широк. В частности, функция w в условии теоремы 1, $1 < q \leq q^* < 2$, принадлежит этому классу. Отметим, что теорема 1 верна и при $q = 1$. Подробности опускаем.

Предложение 1 является одной из вариаций теоремы 1. Интересной представляется и нижеследующая вариация этой теоремы.

Рассмотрим последовательность $\{q_m\}_2^\infty$, построенную в ходе доказательства теоремы 1.

Предложение 2. *Если в равенстве (2) $1 < q \leq q^* < 2$ и $w = (1 - |\zeta|^2)k$, где $k \in L_{2q_m}(D) \cap W^{1,q^*}(D)$, то $X \in H_{q_m}$.*

Доказательство. Последовательность $\{q_m\}_2^\infty$ возрастает и построена по индукции. При этом условие $k \in L_{2q_m}(D)$ позволяет перейти к следующему шагу, при котором последовательность $\{X_n\}$ в доказательстве теоремы 1 (предложения 1) ограничена в H_{q_m} . Если нарушается указанное условие, то процедура наращивания q_m в доказательстве предложения 1 прерывается. И в крайнем случае соответствующий э. н. п. $X \in H_{q_m}$. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Лемма 4. *Пусть в равенстве (2) $1 < q < \infty$ и $w = (1 - |\zeta|^2)\bar{k}$, где $k \in A_{s^*}$, $s^* > 2$, $q \leq s^* < \infty$. Тогда последовательности $\{F_n\}$ и $\{X_n\}$ ограничены в $L_\gamma(D)$ для любого $0 < \gamma < \infty$.*

Доказательство. Пусть $q < 2$, тогда в условии леммы тем более $k \in A_\mu$, где $q < \mu < 2$. Воспользовавшись равенством (9), получим оценку (14), в которой положено, что $q^* = \mu$. Теперь, следуя ходу доказательства теоремы 1, беря μ сколь угодно близким к двум, получим требуемое. Если $q \geq 2$, то тем более $k \in A_\mu$ для любого $1 < \mu < 2$. Далее, как и выше, опираясь на равенство (9), завершаем доказательство.

Лемма 5. *В условиях леммы 4 последовательность $\{|X_n(t)|^q = |X^{(\delta_n)}(\delta_n t)|^q\}$ компактна в $\text{Lip}(1 - 2/s^*, \mathbb{T})$.*

Доказательство. Положим в равенстве (9) $h(\zeta) = 1/(1 - \zeta\bar{z})$, $z \in D$. После соответствующего преобразования получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{|X_n(t)|^q}{1 - t\bar{z}} d\theta &= \lambda_n^{q-1} \int_D \left[\frac{-qF_n\bar{k}|\zeta|^2}{2(1 - \zeta\bar{z})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{qF_n(-\bar{\zeta}k + (1 - |\zeta|^2)k')\zeta}{2(1 - \zeta\bar{z})} + \frac{F_n\bar{k}(1 - |\zeta|^2)}{(1 - \zeta\bar{z})^2} \right] dA. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как по лемме 4 последовательность $\{F_n\}$ ограничена в $L_\gamma(D)$, $0 < \gamma < \infty$, $s^* > 2$, то можно подобрать числа $\gamma_1 > 1$ и $1 < \beta < 2$ такие, что $1/\gamma_1 + 1/s^* + 1/\beta = 1$. Применяя неравенство Гёльдера, (19) сводим к оценке

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{|X_n(t)|^q}{1 - t\bar{z}} d\theta \right| \leq C_1(q, \gamma_1, s^*) \|F_n\|_{\gamma_1} \|k\|_{s^*} \left(\int_D \frac{dA}{|1 - \zeta\bar{z}|^\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (20)$$

в которой интеграл в правой части сходится в силу $\beta < 2$. Следовательно, последовательность из левой части (20) ограничена в D , тогда последовательность $\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{|X_n(t)|^q t\bar{z}}{1 - t\bar{z}} d\theta \right\}$

ограничена в D . Далее, воспользовавшись представлением ядра Пуассона

$$P(r, \theta - \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} = \frac{1}{1 - t\bar{z}} + \frac{\bar{t}z}{1 - \bar{t}z}, \quad (21)$$

закключаем, что последовательность интегралов Пуассона

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |X_n(t)|^q P(r, \theta - \varphi) d\theta = (P_r * |X_n|^q)(\varphi)$$

ограничена в D . Следовательно, по теореме о граничных значениях интеграла Пуассона последовательность $\{|X_n(t)|^q\}$, принадлежащая $C(\mathbb{T})$, ограничена в $C(\mathbb{T})$ (см. [8], теорема 1, с. 418). Теперь из (7) и $w \in L_\infty(D)$ (на основании оценки роста функций $k \in A_{s^*}$, $s^* > 2$) вытекает, что последовательность $\{F_n\}$ ограничена в D .

Заменим в равенстве (19) $\bar{z}$ на z , затем продифференцируем обе части по z . Аналогично оценке (20), $1/s^* + 1/\nu = 1$, получим

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{|X_n(t)|^q}{1 - tz} d\theta \right)' \right| &\leq C_2(q, s^*) \|F_n\|_\infty \|k\|_{s^*} \left(\int_D \frac{dA}{|1 - \zeta z|^{2\nu}} \right)^{\frac{1}{\nu}} \leq \\ &\leq \frac{C(q, s^*)}{(1 - |z|)^{2-2/\nu}} = \frac{C(q, s^*)}{(1 - |z|)^{1-(1-2/s^*)}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Пользуясь разложением $L_s(\mathbb{T}) = H_s \oplus \overline{H_s}^0$, $s > 1$ (см. [6], с. 213), имеем представление $|X_n(t)|^q = x_{n,1}(t) + \overline{x_{n,0}}(t)$, где $x_{n,1} \in H_s$, $x_{n,0} \in H_s^0$ (здесь $x_{n,0} = x_{n,1} - x_{n,1}(0)$ в силу неотрицательности $|X_n(t)|^q$). Относительно левой части (22) воспользуемся указанным представлением. Получим оценку

$$|x'_{n,0}(z)| \leq \frac{C(q, s^*)}{(1 - |z|)^{1-\alpha}}, \quad (23)$$

где $\alpha = 1 - 2/s^*$, т.е. функция $x_{n,0} \in \text{Lip } \alpha$ (см. [8], теорема 3, с. 453). Значит, функция $|X_n(t)|^q \in \text{Lip } \alpha$, более того, в силу оценки (23) последовательность $\{|X_n(t)|^q\}$ ограничена в $\text{Lip } \alpha$, т.е. найдется $M > 0$ такое, что

$$||X_n(t)|^q - |X_n(t')|^q| \leq M|t - t'|^\alpha. \quad (24)$$

Таким образом, ограниченная в $C(\mathbb{T})$ последовательность $\{|X_n(t)|^q\}$ равномерно непрерывна в силу (24). Тогда по теореме Арцела–Асколи эта последовательность компактна в $C(\mathbb{T})$ (см. [7], теорема 4, с. 47). Теперь из (24) следует, что последовательность $\{|X_n(t)|^q\}$ компактна в $\text{Lip}(1 - 2/s^*)$. $\square$

Доказательство основной части теоремы 2. Пусть в условии теоремы $n = 0$ и сама последовательность $\{|X_n(t)|^q\} \rightarrow g(t) \in \text{Lip } \alpha$, $\alpha = 1 - 2/s^*$, согласно лемме 5. Тогда последовательность $\{X_n(\zeta)\}$ ограничена в D . Так как $X_n \rightarrow X$ в A_q в силу леммы 2, то $X_n(\zeta) \rightarrow X(\zeta)$ внутри D , поэтому $X \in H_\infty$. Функция X_n аналитична на $\mathbb{T}$, значит, $X_n(\zeta) = B_n(\zeta)x_n(\zeta)$, где $B_n(\zeta)$ — произведение Бляшке, x_n — внешняя функция для X_n (см. [6], сс. 101, 103). Так как $X = BX_*$, а произведение Бляшке однозначно определяется нулями данной функции, то $B_n(\zeta) \rightarrow B(\zeta)$ в D . Значит, $x_n(\zeta) \rightarrow X_*(\zeta)$ в D . Поскольку в совокупности $X_n(\zeta)$ ограничены в H_∞ , то последовательность $\{\log |X_n(t)|\}$ ограничена в $L_1(\mathbb{T})$ (см. [8], теорема 2, с. 435). В силу $\log(|X_n(t)|^q + \mu) \rightarrow \log(g(t) + \mu)$, $0 < \mu < 1$, $\log^+(|X_n(t)|^q + \mu) \leq |X_n(t)|^q + 1$ получим

$$\int_{\mathbb{T}} |\log(g(t) + \mu)| d\theta \leq \sup_n \left\{ \int_{\mathbb{T}} (|X_n(t)|^q + 1 + |\log(|X_n(t)|^q + 1)|) d\theta \right\} < \infty.$$

Откуда в силу произвольности $0 < \mu < 1$ заключаем, что $|\log g(t)|$ суммируем. Тогда п. в. $g(t) = |g^*(t)|$, где $g^* \in H_\infty$ (см. [6], с. 81), следовательно, $g(t) > 0$ п. в.

Пусть $t_0 = e^{i\theta_0}$, $g(t_0) > 0$, тогда по непрерывности $g(t) > 0$ в некоторой открытой окрестности точки θ_0 . Опираясь на оценку (24), получим

$$\begin{aligned} |X_n(t)|^q &= g(t_0) + (|X_n(t)|^q - |X_n(t_0)|^q) + (|X_n(t_0)|^q - g(t_0)) \geq \\ &\geq g(t_0) - (M|t - t_0|^\alpha + |X_n(t_0)|^q - g(t_0)). \end{aligned}$$

Отсюда, $|X_n(t_0)|^q \rightarrow g(t_0)$, заключаем, что можно выбрать δ_0 , $0 < \delta_0 < \pi$, и номер $N_0 = N(\delta_0)$ такие, что при $\theta \in l_0 = \{\theta : |\theta - \theta_0| < \delta_0\}$, $N \geq N_0$, имеем $g(t) > 0$ и $|X_n(t)| > 0$. Тогда $\log |X_n(t)|$, $n \geq N_0$, и $\log g(t)$ непрерывны при $\theta \in l_0$. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ можно выбрать δ , $0 < \delta < \delta_0$, такое, что при $\theta \in l_1 = \{\theta : |\theta - \theta_0| < \delta\}$

$$|\log g(t) - \log g(t_0)| = q \lim_{n \rightarrow \infty} |\log |X_n(t)| - \log |X_n(t_0)|| < \varepsilon. \quad (25)$$

Так как $x_n(\zeta)$ — внешняя функция, $|x_n(t)| = |X_n(t)|$ п. в., то имеет место представление

$$\log |x_n(\rho e^{i\theta_0})| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |X_n(t)| P(\rho, \theta - \theta_0) d\theta,$$

из которого с учетом $x_n(\zeta) \rightarrow X_*(\zeta)$ в D , $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\rho, \theta - \theta_0) d\theta = 1$ следует

$$\log |X_*(\rho t_0)| - \frac{1}{q} \log g(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\log |X_n(e^{i\theta})| - \log |X_n(e^{i\theta_0})|) P(\rho, \theta - \theta_0) d\theta. \quad (26)$$

Пусть $l = \{\theta : |\theta - \theta_0| < \delta/2\}$, интеграл в правой части (26) разобьем на сумму интегралов $I_{n,1}(\rho)$ и $I_{n,2}(\rho)$ соответственно по l и $[-\pi, \pi] \setminus l = l_*$. Относительно интеграла по l , пользуясь оценкой (25), сразу получим $|I_{n,1}(\rho)| < \varepsilon$, как только $n \geq N_0$. Так как на l_* имеем $|\theta - \theta_0| \geq \delta/2$, то $\cos(\delta/2) < 1$ в силу $0 < \delta < \pi$. При этом

$$|I_{n,2}(\rho)| \leq \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\delta/2) + \rho^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\log |X_n(t)| - \log |X_n(t_0)|| d\theta \right).$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_{n,2}(\rho)| \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1$ в силу ограниченности $\{\log |X_n(t)|\}$ в $L_1(\mathbb{T})$, $X_n(t_0) \rightarrow g^{1/q}(t_0)$. Из предыдущих рассуждений и равенства (26) вытекает оценка

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} |\log |X_*(\rho t_0)|^q - \log g(t_0)| < \varepsilon q.$$

Последнее в силу произвольности $\varepsilon > 0$ означает, что $|X_*(t_0)| = g(t_0)$, если $g(t_0) \neq 0$. Следовательно, $|X_*(t)| = g(t)$ п. в. Когда $g(t_0) = 0$, то из неравенства

$$0 \leq |X_*(\rho t_0)|^q \leq (P_\rho * g)(\theta_0)$$

сразу вытекает $|X_*(\rho t_0)|^q \rightarrow g(t_0) = 0$, $\rho \rightarrow 1$. Это вместе с предыдущим доказывает, что $|X_*(t)|^q = g(t) \in Lip(1 - 2/s^*)$. Теорема 2 доказана при $m = 0$.

Если в условии теоремы $n \geq 1$, то равенство (19) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{|X_n(t)|^q}{1 - t\bar{z}} d\theta &= \lambda_n^{q-1} \int_D (1 - |\zeta|^2)^m \left[\frac{-qF_n \bar{k} m |\zeta|}{2(1 - \zeta \bar{z})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q\bar{F}_n (-m\bar{\zeta} k + (1 - |\zeta|^2)k')\zeta}{2(1 - \zeta \bar{z})} + \frac{F_n \bar{k}(1 - |\zeta|^2)}{(1 - \zeta \bar{z})^2} \right] dA. \end{aligned}$$

Заменим в этом равенстве $\bar{z}$ на z , затем возьмем производную $(m+1)$ -го порядка от обеих частей. Фактически повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве леммы 5,

устанавливаем, что последовательность $\{|X_n(t)|^q\}^{(m)}$ компактна в $\text{Lip}(1 - 2/s^*)$. Далее рассуждая как в случае $n = 0$, завершаем доказательство при $m \geq 1$. $\square$

Замечание 1. Пусть в равенстве (2) $w = (1 - |\zeta|^2)\bar{k}$, $k = \omega' \in A_{q^*}$, $1 < q \leq q^* < 2$. Тогда в силу теоремы 1 $X \in \bigcap_{\gamma < q_*} H_\gamma$, где $q_* = q^*/(2 - q^*)$. Согласно лемме 1 $\omega \in H_{q_*}$. Это говорит о достаточно полном наследовании э. н. п. X свойства функции ω быть принадлежащей H_{q_*} , когда $\omega' = k \in A_{q^*}$. В указанном смысле в теореме 1 дано достаточно точное описание э. н. п.

На основании теоремы о росте функции $f \in A_\gamma$, имеем

$$|f(\zeta)| \leq \frac{\|f\|_\gamma}{(1 - |\zeta|^2)^{2/\gamma}} \quad (27)$$

(см. [3], теорема 7.10, с. 160).

Замечание 2. Если $k \in A_{s^*}$, $s^* > 2$, и

$$K(\zeta) = \int_0^\zeta k(\zeta) d\zeta,$$

то на основании оценки (27) имеем $|K'(\zeta)| = O(1 - |\zeta|^{-(1-\alpha)})$, где $\alpha = 1 - 2/s^*$, т. е. $K \in \Lambda_\alpha A$. При этом по теореме 2, $m = 0$, функция $|X_*|^q \in \text{Lip } \alpha$. Выполнением последнего условия э. н. п. $X = BX_*$ через функцию X_* отражает рост функций из A_γ , $\gamma > 2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Khavinson D., Shapiro H.S. *Best approximation in the supremum norm by analytic and harmonic functions*, Arc. Mat. **39** (2), 339–359 (2001).
- [2] Бурчаев Х.Х., Рябых В.Г., Рябых Г.Ю. *Интегродифференциальные операторы в пространствах аналитических функций и некоторые их приложения* (ИЦ ДГТУ, Ростов-на-Дону, 2014).
- [3] Пожарский Д.А., Рябых В.Г., Рябых Г.Ю. *Интегральные операторы в пространствах аналитических функций и близких к ним* (ИЦ ДГТУ, Ростов-на-Дону, 2011).
- [4] Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции* (Мир, М., 1984).
- [5] Ferguson T. *Extremal problems in Bergman spaces and extension of Ryabykh's theorem*: A dissertation submitted partial fulfilment of the requirement for the degree of Doctor of Philosophy (Math.) (Univ. of Michigan, Michigan, 1–76, 2011).
- [6] Гофман М. *Банаховы пространства аналитических функций* (Ин. лит., М., 1963).
- [7] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1984).
- [8] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* (Гостехиздат, М.–Л., 1952).

Хайдар Хасанович Бурчаев

Чеченский государственный университет,
Бульвар Дудаева, д. 17а, г. Грозный, 364000, Россия,
e-mail: bekhan.burchaev@gmail.com

Галина Юрьевна Рябых

Донской государственный технический университет,
пл. Гагарина, д. 1, г. Ростов-на-Дону, 344000, Россия,
e-mail: ryabich@aaanet.ru

*H.H. Burchaev, G.Y. Ryabykh***On approximation of non-analytic functions by analytical ones**

Abstract. We study the properties of the elements of best approximation for functions summed up over the unit circle of functions by functions from the Bergman space. For approximable functions of a special type, we give a sufficiently accurate description of the properties of these elements in terms of the Hardy and Lipschitz classes. The result obtained is based on an analysis of the corresponding duality relation for extremal problems. The developed method is also applicable to relatively smooth (in terms of Sobolev spaces) approximable functions.

Keywords: Bergman space, Hardy space, element of best approximation, linear functional, extremal problems.

Haidar Hasanovich Burchayev

*Chechen State University,
17a Dudaev blvd., Grozny, 364000 Russia,*

e-mail: bekhan.burchaev@gmail.com

Galina Yuryevna Ryabykh

*Don State Technical University,
1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344000 Russia,*

e-mail: ryabich@aaanet.ru