Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. П. Исаев, Представляющие системы экспонент в проективных пределах весовых подпространств $A^\infty(D)$, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 1, 29–41

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-29-41>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:45:37

К.П. ИСАЕВ

ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДЕЛАХ ВЕСОВЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ $A^\infty(D)$

Аннотация. Вводится нормированное пространство функций, аналитических в ограниченной выпуклой области и бесконечно дифференцируемых вплоть до ее границы, с оценками всех производных, задаваемыми выпуклой последовательностью положительных чисел. Рассматривается наибольшее линейное подпространство, инвариантное относительно дифференцирования, в котором вводится естественная топология проективного предела. Доказана двойственность этого подпространства и некоторого пространства целых функций, на основе чего построена представляющая система экспонент в нем.

Ключевые слова: аналитическая функция, весовое пространство, локально выпуклое пространство, достаточное множество, представляющая система экспонент.

УДК: 517.537

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку 0 и $A^\infty(D)$ — пространство аналитических в D и бесконечно дифференцируемых в $\overline{D}$ функций. Через $H(D)$ обозначаем пространство аналитических в D функций с топологией равномерной сходимости на компактах.

В соответствии с определением из [1] система элементов e_n , $n \in \mathbb{N}$, в локально выпуклом пространстве X называется представляющей, если любой элемент этого пространства представляется в виде ряда

$$x = \sum_n x_n e_n,$$

сходящегося в топологии пространства X . Если для каждого элемента это представление единственное, то представляющая система становится базисом. Если представляющая система не является базисом, то некоторая часть элементов этой системы может быть удалена, а оставшаяся часть продолжает быть представляющей в пространстве X , т. е. представляющие системы, не являющиеся базисом, обладают некоторой избыточностью.

Существование представляющих систем в $H(D)$ утверждает

Теорема (А.Ф. Леонтьев, [2], теорема 5.3.2, с. 382). Пусть D — ограниченная выпуклая область. Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$, зависящая только от области D , такая,

---

Поступила в редакцию 01.12.2017. После доработки 08.04.2018. Принята к публикации 20.06.2018
Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00095 А).

что любую функцию $F(z)$, аналитическую в области D , можно разложить в ряд Дирихле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D.$$

Ряд сходится равномерно на компактах из области D .

Отметим, что топология равномерной сходимости на компактах — самая слабая топология из естественных, обычно рассматриваемых на пространствах аналитических функций. В [3] доказана возможность представления рядами экспонент в гильбертовом пространстве Смирнова $E_2(D)$ для выпуклых многоугольников D (сконструирован (безусловный) базис из экспонент). Этот результат в работе [4] перенесен на пространства Бергмана $B_2(D)$ для выпуклых многоугольников D . В [5] построена минимальная полная система экспонент для пространства Смирнова на области D с гладкой границей и доказана сходимость рядов по этой системе к своей функции, но уже по более слабой норме пространства $E_{1/2}(D)$. В нестрогом изложении пространство $E_{1/2}(D)$ состоит из аналитических функций, для которых “производная порядка $1/2$ ” принадлежит пространству Смирнова.

Существует множество работ, в которых рассматривается вопрос о существовании представляющих систем экспонент в различных локально выпуклых подпространствах $H(D)$. Как правило в этих работах используется метод, основанный на понятии достаточных множеств или слабо достаточных множеств в пространствах целых функций с равномерной структурой в терминологии из работы [6]. Этот метод, разработанный в восьмидесятих годах прошлого века, сводит вопрос конструирования представляющих систем из экспонент к двум аналитическим задачам:

1) описание с помощью весовых оценок сильно сопряженного пространства в терминах преобразования Фурье–Лапласа;

2) построение целых функций с заданными асимптотическими оценками.

Задаче 1) посвящены работы многих математиков. Например, в [7], [8] рассматривается шкала пространств аналитических функций заданного роста вблизи границы. Решению задачи 2) посвящена, например, работа [9].

Полное решение проблемы существования дискретных достаточных множеств было получено в [10], где доказано, что для всех нетривиальных весовых индуктивных пределов последовательностей банаховых пространств голоморфных функций такие множества существуют.

В исследованиях о представляющих системах из экспонент затрагивается вопрос о степени избыточности сконструированных систем. Поскольку степень избыточности по существу зависит от свойств топологии рассматриваемого пространства, то достаточно простого определения этого понятия в общем случае нет. Наиболее систематическое изучение минимальных абсолютно представляющих систем экспонент или двойственных с ними минимальных (слабо) достаточных множеств предпринято в диссертации [11]. Часть результатов этой работы опубликована в [12]. Минимальным абсолютно представляющим системам экспонент посвящены также работы [13]–[15].

В данной работе продолжено изучение локально выпуклых пространств с топологией, “мало” отличающейся от нормированной топологии, но отличие достаточное для существования представляющих систем экспонент. Построенные системы обладают в определенном смысле минимально возможной степенью избыточности.

Пусть E — некоторое нормированное пространство аналитических функций в односвязной комплексной области G . Инвариантным ядром $\mathcal{E}$ пространства E будем называть наибольшее линейное пространство, содержащееся в E и инвариантное относительно дифференцирования. Для ограниченной выпуклой области D на комплексной плоскости и неубывающей логарифмически выпуклой последовательности положительных чисел $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^\infty$ рассмотрим пространство типа классов Карлемана $H(D, \mathcal{M})$, состоящее из аналитических функций f , для которых

$$\|f\|_1 = \sup_n \sup_{z \in D} \frac{|f^{(n)}(z)|}{M_n} < \infty.$$

Инвариантное ядро пространства $H(D, \mathcal{M})$ обозначим через $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$. В разделе 1 в пространстве $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$ будет введена естественная топология проективного предела и доказана двойственность этого пространства и некоторого пространства целых функций. В разделе 2 будет рассмотрен вопрос о представляющих системах экспонент в $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$.

Через $B(z, t)$ будем обозначать круг с центром в точке z радиуса t . Для целой функции L через $N(L)$ будем обозначать множество ее нулей и положим

$$E(L) = \bigcup_{\lambda \in N(L)} B(\lambda, (1 + |\lambda|)^{-1}).$$

Запись $f(x) \prec g(x)$, $x \in X$, для неотрицательных функций f, g будет обозначать, что для некоторой константы C имеет место соотношение $f(x) \leq Cg(x)$, $x \in X$. Соответствующий смысл имеют символы $\succ$ и $\asymp$.

1. ИНВАРИАНТНОЕ ЯДРО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Далее будем считать, что область D содержит начало координат, а последовательность $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty. \quad (1.1)$$

Полагая $M_n = 1$ для $n < 0$, через $\mathcal{M}_k$ обозначим последовательность со сдвигом: $\mathcal{M}_k = (M_{n+k})_{n=0}^\infty$, $k \in \mathbb{Z}$. Норму в пространстве $H(D, \mathcal{M}_k)$ будем обозначать $\|\cdot\|_{1,k}$. Очевидно, $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M}) = \bigcap_{k \leq 0} H(D, \mathcal{M}_k)$. В пространстве $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$ введем естественную топологию проективного предела пространств $H(D, \mathcal{M}_k)$ по $k \leq 0$.

Для построения представляющих систем экспонент в $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$ нам потребуется описание сопряженного пространства в терминах преобразования Фурье–Лапласа. Функция

$$T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}, \quad r \geq 0,$$

называется функцией следа последовательности $\mathcal{M}$. Через $T_k(r)$ обозначим функцию следа последовательности $\mathcal{M}_k$, а через $H_D(\lambda) = \sup_{z \in D} \operatorname{Re} \lambda z$ — опорную функцию области D . Пусть

$$P(D, \mathcal{M}_k) = \{F \in H(\mathbb{C}) : \|F\|_{2,k} = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |F(\lambda)| e^{-H_D(\lambda) - \ln T_k(|\lambda|)} < \infty\}.$$

Через $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$ обозначим индуктивный предел нормированных пространств $P(D, \mathcal{M}_k)$, $k \leq 0$.

Для целой функции экспоненциального типа

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

через γ_F обозначим функцию, ассоциированную с ней по Борелю:

$$\gamma_F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}}.$$

Теорема 1. Пусть D — ограниченная выпуклая область, содержащая начало координат, и неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию (1.1). Тогда существует натуральное число s такое, что для билинейных форм ($q < 1$)

$$\mathcal{A}_q(f, F) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(\frac{1}{q}D)} f(qz) \gamma_F(z) dz$$

на $H(D, \mathcal{M}_k) \times P(D, \mathcal{M}_{k+s})$, где $qD = \{qz, z \in D\}$, существует предел

$$\mathcal{A}(f, F) = \lim_{q \nearrow 1} \mathcal{A}_q(f, F)$$

и форма $\mathcal{A}(f, F)$ непрерывна, т. е. для некоторой постоянной $C > 0$

$$|\mathcal{A}(f, F)| \leq C \|f\|_{1,k} \|F\|_{2,k+s}, \quad f \in H(D, \mathcal{M}_k), \quad F \in P(D, \mathcal{M}_{k+s}).$$

Лемма. Для целой функции F , имеющей вид $F = Gg$, где целые функции G, g при некотором $M > 0$ удовлетворяют оценкам

$$|G(\lambda)| \leq M e^{H_D(\lambda) - 2 \ln(1+|\lambda|)}, \quad |g(\lambda)| \leq M T_{k+1}(|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

для некоторой константы $C > 0$ имеет место оценка

$$|\mathcal{A}_q(f, F)| \leq C M^2 \|f\|_{1,k}, \quad f \in H(D, \mathcal{M}_k), \quad q \in (1/2, 1),$$

и существует предел $\lim_{q \nearrow 1} \mathcal{A}_q(f, F)$.

Доказательство. Функция γ_G будет непрерывной на множестве $\mathbb{C} \setminus D$ и, кроме того,

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{C} \setminus D} |\gamma_G(\zeta)| \leq C_1 M. \quad (1.2)$$

Если

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

то по формулам Коши и по логарифмической выпуклости последовательности $\mathcal{M}_k$ имеем

$$|g_n| \leq \inf_{r \geq 0} \frac{1}{r^n} \max_{|\lambda|=r} |g(\lambda)| \leq M \inf_{r > 0} \frac{T_{k+1}(r)}{r^n} = \frac{M}{M_{n+k+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

В частности,

$$\gamma_F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n \gamma_G^{(n)}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}.$$

Интегрированием по частям получим

$$\mathcal{A}_q(f, F) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(\frac{1}{q}D)} \gamma_G(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} g_n q^n f^{(n)}(q\zeta) d\zeta.$$

Функции $f_n(q, z) = g_n q^n f^{(n)}(qz)$ равномерно непрерывны на компакте $[\frac{1}{2}, 1] \times \overline{D}$, а ряд

$$f(q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n q^n f^{(n)}(qz)$$

в силу оценок (1.3) равномерно на этом компакте сходится, поэтому существует

$$f(1, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(1, z) = \sum_n g_n f^{(n)}(z),$$

причем

$$|f(q, z)| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{n+k}}{M_{n+k+1}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{M_{n+k}} \leq C_2 M \|f\|_{1,k}.$$

Таким образом, учитывая (1.2), получим существование предела $\lim_{q \nearrow 1} \mathcal{A}_q(f, F)$, и

$$|\mathcal{A}_q(f, F)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(\frac{1}{q}D)} |\gamma_G(\zeta)| \cdot |f(q, \zeta)| |d\zeta| \leq C_3 M^2 \|f\|_{1,k}. \quad \square$$

Доказательство теоремы 1. Из теоремы 4 работы [16] следует существование целых функций $L_0(\lambda)$ и $l_0(\lambda)$ таких, что все нули функции $L_0 l_0$ простые, круги $B(\zeta, (1 + |\zeta|)^{-1}) = \{\lambda : |\lambda - \zeta| \leq (1 + |\zeta|)^{-1}\}$, $\zeta \in N(L_0 l_0)$, попарно не пересекаются и для некоторых констант $a > 0$, $b > 0$ выполняются соотношения

$$H_D(\lambda) - a \ln(e + |\lambda|) \leq \ln |L_0(\lambda)| \leq H_D(\lambda), \quad \lambda \notin E(L_0), \quad (L_0 I)$$

$$H_D(\zeta) - a \ln(e + |\zeta|) \leq \ln |L'_0(\zeta)| \leq H_D(\zeta), \quad \zeta \in N(L_0), \quad (L_0 II)$$

$$\ln T_0(|\lambda|) - b \ln(e + |\lambda|) \leq \ln |l_0(\lambda)| \leq \ln T_0(|\lambda|), \quad \lambda \notin E(l_0), \quad (l_0 I)$$

$$\ln T_0(|\zeta|) - b \ln(e + |\zeta|) \leq \ln |l'_0(\zeta)| \leq \ln T_0(|\zeta|), \quad \zeta \in N(l_0). \quad (l_0 II)$$

Положим $s = [a + b] + 5$ и пусть $f \in H(D, \mathcal{M}_k)$. Будем считать, что $k \leq -3$. Как показано ([17], лемма 1.2), для любого m

$$T_0(r) \asymp (r + 1)^m T_m(r), \quad r > 0. \quad (1.4)$$

Пусть ζ_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, — нули функции $L_0 l_0$. Добавим к ним еще $|k| - 3$ точек ζ_j , $j = -1, \dots, k + 3$, так, чтобы круги $B(\zeta_j, (1 + |\zeta_j|)^{-1})$, $j \geq k + 3$, попарно не пересекались и положим

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{-k-3} (\lambda - \zeta_{-j}).$$

Тогда в силу соотношений $(l_0 I)$, $(l_0 II)$ и (1.4) функция $l_1 = l_0 P$ при некотором $c > 0$ удовлетворяет оценкам

$$\ln T_{k+3}(|\lambda|) - b \ln(e + |\lambda|) - c \leq \ln |l_1(\lambda)| \leq \ln T_{k+3}(|\lambda|) + c, \quad \lambda \notin E(l_1), \quad (l_1 I)$$

$$\ln T_{k+3}(|\zeta|) - b \ln(e + |\zeta|) - c \leq \ln |l'_1(\zeta)| \leq \ln T_{k+3}(|\zeta|) + \ln(e + |\zeta|) + c, \quad \zeta \in N(l_1). \quad (l_1 II)$$

Целая функция $L = L_0 l_1$ удовлетворяет соответственно оценкам

$$H_D(\lambda) + \ln T_{k+3}(|\lambda|) - (a + b) \ln(e + |\lambda|) - c \leq \ln |L(\lambda)|, \quad (LI)$$

$$H_D(\zeta) + \ln T_{k+3}(|\zeta|) - (a + b) \ln(e + |\zeta|) - c \leq \ln |L'(\zeta)|, \quad \zeta \in N(L). \quad (LII)$$

Исключительное множество $E(L)$ состоит из непересекающихся кругов, поэтому можно найти замкнутые спрямляемые кривые Γ_m , $m \in \mathbb{N}$, такие, что $|\Gamma_m| = O(\min_{z \in \Gamma_m} |z|) \rightarrow \infty$,

$m \rightarrow \infty$, не пересекающиеся с $E(L)$. Возьмем функцию $F \in P(D, \mathcal{M}_{k+s})$. В силу оценки (LI) выполняется соотношение

$$\left| \frac{F(\lambda)}{L(\lambda)} \right| \leq c_1 \frac{T_{k+s}(|\lambda|)}{T_{k+3}(|\lambda|)} (e + |\lambda|)^{a+b}, \quad \lambda \in \Gamma_m.$$

Отсюда по (1.4) и по выбору числа s

$$\left| \frac{F(\lambda)}{L(\lambda)} \right| \leq c_2 \frac{1}{(1 + |\lambda|)^2}, \quad \lambda \in \Gamma_m.$$

Значит,

$$\int_{\Gamma_m} \frac{F(\lambda) d\lambda}{(\lambda - z)L(\lambda)} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Тогда ряд Лагранжа функции F по функции L сходится к самой функции F :

$$F(\lambda) = \sum_{\zeta \in N(L)} \frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)(\lambda - \zeta)} L(\lambda). \quad (1.5)$$

На основании соотношения (LII) оценим

$$\left| \frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)} \right| \leq c_3 \|F\|_{2,k+s} e^{\ln T_{k+s}(|\zeta|) - \ln T_{k+3}(|\zeta|) + (a+b) \ln(e+|\zeta|) + c}, \quad \zeta \in N(L).$$

Отсюда, учитывая (1.4) и выбор числа s , имеем

$$\left| \frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)} \right| \leq \frac{c_4 \|F\|_{2,k+s}}{(1 + |\zeta|)^2}, \quad \zeta \in N(L). \quad (1.6)$$

Функции $\frac{L(\lambda)}{(\lambda - \zeta)}$ удовлетворяют условию леммы 1. Действительно, если $L_0(\zeta) = 0$ и ζ', ζ'' — нули функции L_0 , отличные от ζ , например, наименьшие по модулю, то положим

$$G(\lambda) = \frac{L_0(\lambda)}{(\lambda - \zeta)(\lambda - \zeta')(\lambda - \zeta'')}, \quad g(\lambda) = (\lambda - \zeta'')(\lambda - \zeta')l_1(\lambda).$$

Тогда по соотношениям $(L_0 I)$, $(l_1 I)$ имеем оценки

$$|G(\lambda)| \leq M e^{H_D(\lambda) - 2 \ln(1 + |\lambda|)}, \quad |g(\lambda)| \leq M T_{k+1}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

причем с постоянной M , не зависящей от точки $\zeta \in N(L)$. По утверждению леммы

$$\left| \mathcal{A}_q \left(f, \frac{L(\zeta)}{\lambda - \zeta} \right) \right| \leq C M^2 \|f\|_{1,k}, \quad f \in H(D, \mathcal{M}_k), \quad q \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right), \quad \zeta \in N(L).$$

Из представления (1.5) следует

$$\mathcal{A}_q(f, F) = \sum_{\zeta \in N(L)} \frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)} \mathcal{A}_q \left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda - \zeta} \right),$$

сходимость этого ряда получим из (1.6) и последней оценки

$$|\mathcal{A}_q(f, F)| \leq \sum_{\zeta \in N(L)} \left| \frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)} \right| \left| \mathcal{A}_q \left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda - \zeta} \right) \right| \leq c_5 M^2 \|f\|_{1,k} \|F\|_{2,k+s} \sum_{\zeta \in N(L)} \frac{1}{(1 + |\zeta|)^2},$$

$$f \in H(D, \mathcal{M}_k), \quad q \in (1/2, 1), \quad F \in P(D, \mathcal{M}_{k+s}).$$

Переходя к пределу при $q \rightarrow 1$, получим утверждение теоремы 1. □

Из теоремы 1 стандартными рассуждениями выводится

Теорема 2. Пусть неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию (1.1). Тогда преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм сильно сопряженного пространства к пространству $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$ и пространства $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$ с топологией проективного предела.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$ И ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$

В этом разделе для краткости будем пользоваться обозначением

$$\psi_k(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T_k(|\lambda|), \quad k \in \mathbb{Z},$$

и нам будет достаточно соотношения между этими функциями

$$\psi_k(\lambda) - \ln(1 + |\lambda|) - t_k \leq \psi_{k+1}(\lambda) \leq \psi_k(\lambda) - \ln(1 + |\lambda|) + t_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $t_k > 0$ — некоторые постоянные.

В пространстве $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$ введем топологию с помощью весовых полунорм. Через $\mathcal{K}$ обозначим совокупность всех непрерывных функций $x(\lambda)$ на $\mathbb{C}$, удовлетворяющих при любом $n \in \mathbb{Z}$ соотношению

$$x(\lambda) \succ e^{\psi_n(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Для подмножества $S \subset \mathbb{C}$ через $\tau(S)$ обозначим топологию в пространстве $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$, определяемую полунормами

$$p_x(F) = \sup_{\lambda \in S} \frac{|F(\lambda)|}{x(\lambda)}, \quad x \in \mathcal{K}.$$

Заметим, что исходная топология индуктивного предела в пространстве $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$ совпадает с топологией $\tau(\mathbb{C})$ (см. [18]). Множество S называется достаточным в пространстве $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$, если $\tau(\mathbb{C}) = \tau(S)$. Если S — достаточное для $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$ множество, то из ([6], теорема 1.6, с. 12) и теоремы 2 следует, что любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$ может быть представлена в виде интеграла

$$f(z) = \int_S \frac{e^{z\lambda}}{k(\lambda)} d\mu(\lambda), \quad z \in D,$$

где μ — мера ограниченной вариации, сосредоточенная на множестве S , $k(\lambda)$ — функция из класса $\mathcal{K}$. Таким образом, если достаточное множество S дискретно, то каждая функция $f \in \mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{\lambda \in S} f_\lambda e^{z\lambda}, \quad z \in D,$$

где $f_\lambda = \mu(\{\lambda\})/k(\lambda)$, сходящегося в топологии этого пространства.

Предложение 1. Пусть $\mathcal{K}_0$ — семейство функций вида $x(\lambda) = e^{\psi_0(\lambda) + v(\lambda)}$, где $v(\lambda)$ — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{v(r)}{\ln r} = \infty. \quad (2.1)$$

Для замкнутого множества $S \subset \mathbb{C}$ определим топологию $\tau_0(S)$ в пространстве $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$ с помощью полунорм p_x , где $x \in \mathcal{K}_0$. Тогда топологии $\tau_0(S)$ и $\tau(S)$ равносильны.

Доказательство. Очевидно, $\tau_0(S) \leq \tau(S)$. Докажем обратное. Пусть $x \in \mathcal{K}$, функция

$$y(r) = \min_{|\lambda|=r} (\ln x(\lambda) - \psi_0(\lambda)), \quad r \geq 0,$$

радиальна и удовлетворяет условию $y(r) \geq n \ln r + C_n$, $r > 0$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда функция $y(e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, обладает свойством $y(e^t) \geq nt + C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$v(e^t) = \sup\{h(t), h(t) \leq y(e^t), t \in \mathbb{R}, h \text{ выпукла}\}.$$

Тогда $v(|\lambda|)$ — радиальная субгармоническая функция на плоскости, удовлетворяющая условию (2.1) и

$$e^{\psi_0(\lambda) + v(|\lambda|)} \leq x(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad \square$$

Для множества M обозначим $E(M) = \bigcup_{z \in M} B(z, (1 + |z|)^{-1})$.

Теорема 3. *Существует дискретное множество $\Lambda \subset \mathbb{C}$, не являющееся достаточным для пространства $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$, такое, что круги $B(z, (1 + |z|)^{-1})$, $z \in \Lambda$, попарно не пересекаются, и для любого неограниченного множества $\Lambda_1 \subset \mathbb{C}$, для которого $E(\Lambda_1) \cap E(\Lambda) = \emptyset$, множество $\Lambda \cup \Lambda_1$ является достаточным для пространства $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Множество Λ будем конструировать в виде множества нулей некоторой целой функции с определенными асимптотическими оценками. Пусть L_0, l_0 — целые функции, удовлетворяющие условиям $(L_0 I)$, $(L_0 II)$, $(l_0 I)$, $(l_0 II)$ и $\psi_0(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T_0(|\lambda|)$. Тогда функция $L_1(\lambda) = L_0(\lambda)l_0(\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$\psi_0(\lambda) - c \ln(e + |\lambda|) \leq \ln |L_1(\lambda)| \leq \psi_0(\lambda), \quad \lambda \notin E(L_1), \quad (L_1 I)$$

$$\psi_0(\zeta) - c \ln(e + |\zeta|) \leq \ln |L_1'(\zeta)| \leq \psi_0(\zeta), \quad \zeta \in N(L_1), \quad (L_1 II)$$

где $c = a + b$. Пусть $\Lambda = N(L_1)$, тогда по построению круги $B(z, (1 + |z|)^{-1})$, $z \in \Lambda$, попарно не пересекаются. Так как $L_1 \in \mathcal{P}_i(\mathcal{M})$, то Λ не будет даже множеством единственности для $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$.

Пусть $\Lambda_1 \subset \mathbb{C}$ — множество, удовлетворяющее условию теоремы. Выберем $\tilde{\Lambda}_1 = \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Lambda_1$ так, чтобы выполнялись условия $|\xi_{k+1}| > |\xi_k|$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} |\xi_k| = \infty$ и

$$\mu(2t) - \mu(t) \leq 1, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

где $\mu(t)$ — считающая функция множества $\tilde{\Lambda}_1$. Докажем, что множество $\Lambda \cup \tilde{\Lambda}_1$ будет достаточным для пространства $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$, тогда тем более будет достаточным и множество $\Lambda \cup \Lambda_1$. Пусть

$$u(\lambda) = \int_0^{|\lambda|} \frac{\mu(t) dt}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

тогда u — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условию (2.1).

Из ([16], лемма 3.1) вытекает

Предложение 2. *Для целой функции*

$$g(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\xi_k}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

и для некоторой постоянной $d > 0$ выполняются оценки

$$u(\lambda) - d \ln(e + |\lambda|) \leq \ln |g(\lambda)| \leq u(\lambda), \quad \lambda \notin E(g), \quad (gI)$$

$$u(\xi) - d \ln(e + |\xi|) \leq \ln |g'(\xi)| \leq u(\xi), \quad \xi \in N(g). \quad (gII)$$

Целая функция $L_2 = L_1 g$ с множеством нулей $\Lambda \cup \tilde{\Lambda}_1$ в силу соотношений $(L_1 I) - (L_1 II)$, $(gI) - (gII)$ удовлетворяет условиям

$$\psi_0(\lambda) + u(\lambda) - \tilde{c} \ln(e + |\lambda|) \leq \ln |L_2(\lambda)| \leq \psi_0(\lambda) + u(\lambda) + \tilde{c} \ln(e + |\lambda|), \quad \lambda \notin E(L_2), \quad (L_2 I)$$

$$\psi_0(\lambda) + u(\lambda) - \tilde{c} \ln(e + |\lambda|) \leq \ln |L'_2(\lambda)| \leq \psi_0(\lambda) + u(\lambda) + \tilde{c} \ln(e + |\lambda|), \quad \lambda \in \Lambda \cup \tilde{\Lambda}_1, \quad (L_2 II)$$

где $\tilde{c} = c + d$.

Для доказательства достаточности множества $\Lambda \cup \tilde{\Lambda}_1$ по предложению 1 необходимо показать, что для любой радиальной субгармонической функции $\alpha(\lambda)$, удовлетворяющей условию (2.1), найдется радиальная субгармоническая функция $\beta(\lambda)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что если функция $F \in \mathcal{P}_i(\mathcal{M})$ и удовлетворяет оценке

$$|F(\lambda)| \leq \varepsilon e^{\psi_0(\lambda) + \beta(\lambda)}, \quad \lambda \in \Lambda \cup \tilde{\Lambda}_1, \quad (2.3)$$

то эта функция будет удовлетворять оценке

$$|F(\lambda)| \leq e^{\psi_0(\lambda) + \alpha(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

Пусть $w(\lambda)$ — некоторая радиальная субгармоническая функция на плоскости и η — мера, ассоциированная с ней по Риссу. В полярных координатах мера η имеет вид

$$d\eta(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} d(w'(r)r) d\varphi,$$

в частности, $w'(r)r$ — неубывающая функция. Через $\eta(t)$ будем обозначать η -меру круга $B(0, t)$, тогда

$$\eta(t) = w'(t)t, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, если ν — мера, ассоциированная по Риссу с функцией u , то $\nu(t) \equiv \mu(t)$. Пусть $\alpha(\lambda)$ — субгармоническая функция в (2.4) и $d\vartheta(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} d(\alpha'(r)r) d\varphi$ — ее ассоциированная мера. Положим

$$\nu_1(t) = \min(\mu(t), \alpha'(t)t), \quad t \geq 0, \quad \alpha_1(\lambda) = \int_1^{|\lambda|} \frac{\nu_1(t)dt}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\nu_1(t)$ — возрастающая до бесконечности функция и α_1 — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условиям

$$\alpha_1(\lambda) \leq \min(u(\lambda), \alpha(\lambda)), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1(t)}{\ln t} = \infty.$$

Сужение ассоциированной меры функции u на кольцо $Q_n = \{\lambda : |\xi_n| \leq |\lambda| < |\xi_{n+1}|\}$ обозначим через γ_n , $n \in \mathbb{N}$. По определению функции u имеем $\gamma_n(\mathbb{C}) = 1$. Выберем подпоследовательность натуральных чисел n_j так, чтобы для меры $\nu_0 = \sum_j \gamma_{n_j}$ выполнялось условие $\nu_0(t) \leq \nu_1(t)$, $t \geq 0$. Такую подпоследовательность можно выбрать потому, что $\nu_1(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть n — наибольший номер такой, что $\nu_1(|\xi_n|) < 1$, т.е. $\nu_1(|\xi_j|) \geq 1$ для $j \geq n + 1$. Можно положить $n_1 = n + 1$. Далее исходя из того, что $\nu_1(t) - 1 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ можно выбрать n_2 и т.д. Функция

$$\alpha_0(\lambda) = \int_0^{|\lambda|} \frac{\nu_0(t)dt}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

радиальна, субгармонична и

$$\alpha_0(r) \leq \int_1^r \frac{\nu_1(t)dt}{t} = \alpha_1(r) \leq \alpha(r), \quad r \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha_0(t)}{\ln t} = \infty.$$

Определим еще меры

$$\chi_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{n_{2j+1}}, \quad \chi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{n_{2j}},$$

и соответствующие радиальные субгармонические функции

$$\beta_1(\lambda) = \int_0^{|\lambda|} \frac{\chi_1(t)dt}{t}, \quad \beta_2(\lambda) = \int_0^{|\lambda|} \frac{\chi_2(t)dt}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

По построению $0 \leq \chi_1(t) - \chi_2(t) \leq 1$, поэтому эти функции удовлетворяют условию (2.1), и

$$\beta_1(t) + \beta_2(t) = \alpha_0(t), \quad \alpha_0(t) \leq 2\beta_1(t) \leq \alpha_0(t) + \ln(1+t), \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

По предложению 2 целая функция

$$g_1(\lambda) = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\xi_{n_{2j+1}}}\right)$$

удовлетворяет условиям

$$\beta_1(\lambda) - \tilde{d} \ln(e + |\lambda|) \leq \ln |g_1(\lambda)| \leq \beta_1(\lambda), \quad \lambda \notin E(g_1), \quad (g_1 I)$$

$$\beta_1(\zeta) - \tilde{d} \ln(e + |\zeta|) \leq \ln |g_1'(\zeta)| \leq \beta_1(\zeta), \quad \zeta \in N(g_1). \quad (g_1 II)$$

Возьмем натуральное число $N = [\tilde{c} + \tilde{d} + d] + 4 \geq (\tilde{c} + \tilde{d} + d) + 3$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a , и положим

$$\chi = \sum_{j=N+1}^{\infty} \gamma_{n_{2j+1}}, \quad \beta(\lambda) = \int_0^{|\lambda|} \frac{\chi(t)dt}{t}.$$

Тогда $\beta(\lambda)$ — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условию (2.1), и для некоторой константы C

$$\beta(t) \leq \beta_1(t) - N \ln(1+t) + C, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

Пусть функция $F \in \mathcal{P}_i(\mathcal{M})$ удовлетворяет оценке (2.3) с некоторым положительным числом ε , которое определим позже.

По определению пространства $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$ функция F принадлежит пространству $P(D, \mathcal{M}_m)$ для некоторого $m < 0$, т.е. $|F(\lambda)| \leq C_0 e^{\psi_0(\lambda) - m \ln(1+|\lambda|)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Функция $\tilde{F}(\lambda) = \frac{F(\lambda)g(\lambda)}{g_1(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, по соотношениям $(g_1 I)$, $(g I)$, $(L_2 I)$ удовлетворяет оценке

$$\left| \frac{\tilde{F}(\lambda)}{L_2(\lambda)} \right| \leq C_0 e^{(-m + \tilde{c} + \tilde{d}) \ln(e + |\lambda|) - \beta_1(\lambda)}, \quad \lambda \notin E(L_2).$$

Поскольку исключительное множество $E(L_2)$ есть объединение попарно непересекающихся кругов, то найдется последовательность замкнутых жордановых кривых Γ_n таких, что

$$\rho_n = \min_{\zeta \in \Gamma_n} |\zeta| \longrightarrow \infty, \quad |\Gamma_n| = O(\rho_n), \quad n \longrightarrow \infty, \quad \Gamma_n \cap E(L_2) = \emptyset.$$

Функция β_1 удовлетворяет условию (2.1), поэтому

$$\max_{\lambda \in \Gamma_n} \left| \frac{\tilde{F}(\lambda)}{L_2(\lambda)} \right| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Таким образом, ряд Лагранжа функции $\tilde{F}$ по функции L_2 сходится (поточечно) к самой функции $\tilde{F}$:

$$\tilde{F}(\lambda) = \sum_{\zeta \in N(L_2)} \frac{\tilde{F}(\zeta)}{L'_2(\zeta)(\lambda - \zeta)} L_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Из (gI) , (g_1I) , (L_2II) и (2.2) следует

$$\left| \frac{\tilde{F}(\zeta)}{L'_2(\zeta)} \right| \leq \varepsilon e^{\beta(\zeta) - \beta_1(\zeta) + (\tilde{c} + \tilde{d}) \ln(e + |\zeta|)}, \quad \zeta \in N(L_2),$$

учитывая соотношение (2.6) и выбор числа N , получаем

$$\left| \frac{\tilde{F}(\zeta)}{L'_2(\zeta)} \right| \leq \varepsilon e^C (e + |\zeta|)^{-3}, \quad \zeta \in N(L_2).$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда Лагранжа и оценка

$$|\tilde{F}(\lambda)| \leq \sum_{\zeta \in \Lambda \cup \tilde{\Lambda}_1} \left| \frac{\tilde{F}(\zeta)}{L'_2(\zeta)} \right| |L_2(\lambda)| \leq \varepsilon e^C \sum_{\zeta \in \Lambda \cup \tilde{\Lambda}_1} (e + |\zeta|)^{-2} |L_2(\lambda)|, \quad \lambda \notin E(L_2).$$

Учитывая определение функции $\tilde{F}$, получим

$$|F(\lambda)| \leq \varepsilon e^C \sigma |L_2(\lambda)| \frac{|g_1(\lambda)|}{|g(\lambda)|}, \quad \lambda \notin E(L_2), \quad \sigma = \sum_{\zeta \in \Lambda \cup \tilde{\Lambda}_1} (e + |\zeta|)^{-2}.$$

Теперь из (L_2I) , (g_1I) , (gI) вытекает оценка

$$|F(\lambda)| \leq \varepsilon e^C \sigma e^{\psi_0(\lambda) + \beta_1(\lambda) + (\tilde{c} + d) \ln(e + |\lambda|)}, \quad \lambda \notin E(L_2),$$

которую можно продолжить на всю плоскость по принципу максимума. Из соотношения (2.5) имеем

$$\beta_1(t) \leq \frac{1}{2} \alpha_0(t) + \frac{1}{2} \ln(1 + t) \leq \alpha(t) - \frac{1}{2} \alpha_0(t) + \frac{1}{2} \ln(1 + t), \quad t \geq 0.$$

Так как функция α_0 удовлетворяет условию (2.1), то для некоторой постоянной C_1

$$\beta_1(t) + (\tilde{a} + \tilde{d}) \ln(1 + t) \leq \alpha(t) + C_1, \quad t \geq 0,$$

и если положить $\varepsilon = \frac{1}{\sigma} e^{-C - C_1 - \tilde{c} - d}$, то

$$|F(\lambda)| \leq e^{\psi_0(\lambda) + \alpha(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, из оценки (2.3) следует (2.4). Достаточность множества $\Lambda \cup \tilde{\Lambda}_1$ установлена. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть D — ограниченная выпуклая область на плоскости, содержащая начало координат, $\mathcal{M}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию (1.1). Тогда существует дискретное множество $\Lambda \subset \mathbb{C}$ такое, что

- 1) круги $B(z, (1 + |z|)^{-1})$, $z \in \Lambda$, попарно не пересекаются;
- 2) система экспонент $\{e^{z\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$ не является представляющей в пространстве $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$;
- 3) для любого неограниченного дискретного множества $\Lambda_1 \subset \mathbb{C}$, для которого

$$E(\Lambda_1) \cap E(\Lambda) = \emptyset,$$

система $\{e^{z\lambda}, \lambda \in \Lambda \cup \Lambda_1\}$ является представляющей в пространстве $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$.

Доказательство. Возьмем множество Λ , построенное в теореме 3. Тогда множество $\Lambda \cup \Lambda_1$ является достаточным для пространства $\mathcal{P}_i(\mathcal{M})$. По ([6], теорема 1.6, с. 12) любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$ может быть представлена в виде интеграла

$$f(z) = \int_{\Lambda \cup \Lambda_1} \frac{e^{z\lambda}}{k(\lambda)} d\mu(\lambda), \quad z \in D,$$

где μ — мера ограниченной вариации, сосредоточенная на множестве $\Lambda \cup \Lambda_1$, $k(\lambda)$ — функция из класса $\mathcal{K}_0$, т. е. $k(\lambda) = e^{\psi_0(\lambda)+v(\lambda)}$ с радиальной субгармонической функцией v , удовлетворяющей условию (2.1). Множество $\Lambda \cup \Lambda_1 = \{\zeta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ дискретное, значит, любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$ может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k e^{-\psi_0(\zeta_k)-v(\zeta_k)} e^{z\zeta_k}, \quad z \in D,$$

где $M_k = |\mu(\{\zeta_k\})|$, $\sup_k M_k = M < \infty$, и ряд сходится в топологии пространства $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$. □

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коробейник Ю.Ф. *Представляющие системы*, УМН **36** (1), 73–126 (1981).
- [2] Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент* (Наука, М., 1976).
- [3] Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с ней разложения в ряды экспонент*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **39** (3), 657–702 (1975).
- [4] Исаев К.П. *Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках*, Уфимск. матем. журн. **2** (1), 71–86 (2010).
- [5] Любарский Ю.И. *Ряды экспонент в пространстве Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **52** (3), 559–580 (1988).
- [6] Ehrenpreis L. *Fourier analysis several complex variables* (Wiley Interscience publishers, New York, 1970).
- [7] Напалков В.В. *Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **51** (2), 287–305 (1987).
- [8] Абузярова Н.Ф., Юлмухаметов Р.С. *Сопряженные пространства к весовым пространствам аналитических функций*, Сиб. матем. журн. **42** (1), 3–17 (2001).
- [9] Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций*, Anal. Math. **11** (3), 257–282 (1985).
- [10] Епифанов О.В. *Вариации слабо достаточных множеств в пространствах аналитических функций*, Изв. вузов. Матем., № 7, 50–56 (1986).
- [11] Абанин А.В. *Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы*, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук (Ростов-на-Дону, 1995).
- [12] Абанин А.В. *Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы*, Матем. заметки **57** (4), 483–492 (1995).
- [13] Абанин А.В. *Характеризация минимальных систем показателей представляющих систем обобщенных экспонент*, Изв. вузов. Матем., № 2, 3–12 (1991).
- [14] Абанин А.В., Налбандян Ю.С. *Абсолютно представляющие системы экспонент минимального типа в пространствах функций с заданным ростом вблизи границы*, Изв. вузов. Матем., № 10, 73–76 (1993).
- [15] Abanin A.V., Le Hai Khoi, Nalbandyan Yu.S. *Minimal absolutely representing systems of exponentials for $A^{-\infty}(\Omega)$* , J. Approx. Theory **163** (10), 1534–1545 (2011).
- [16] Юлмухаметов Р.С. *Приближение субгармонических функций*, Матем. сб. **124** (3), 393–415 (1984).
- [17] Юлмухаметов Р.С. *Квазианалитические классы функций в выпуклых областях*, Матем. сб. **130** (4), 500–519 (1986).
- [18] Напалков В.В. *О сравнении топологий в некоторых пространствах целых функций*, ДАН СССР **264** (4), 827–830 (1982).

Константин Петрович Исаев

*Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской академии наук,
ул. Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия;
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, д. 32, г. Уфа, 450074, Россия,
e-mail: orbit81@list.ru*

K.P. Isaev

Representing systems of exponentials in projective limits of weight subspaces of $A^\infty(D)$

Abstract. We introduce a normed space of functions holomorphic in a bounded convex domain which are infinitely differentiable up to the boundary and have certain estimates of all derivatives given by a convex sequence of positive numbers. We consider its largest linear subspace that is invariant with respect to the operator of differentiation, in which the natural topology of the projective limit is introduced. We prove the duality of this subspace and a certain space of entire functions. Based on this, we construct the representing system of exponentials in it.

Keywords: analytic function, weighted space, locally convex space, sufficient set, representing system of exponentials.

Konstantin Petrovich Isaev

*Institute of Mathematics with Computer Center
of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences,
112 Chernyshevskogo str., Ufa, 450008 Russia;
Bashkirian State University,
23 Z. Validi str., Ufa, 450074 Russia,
e-mail: orbit81@list.ru*