Общероссийский математический портал

С. Г. Мысливец, О ядрах Сеге и Пуассона в выпуклых областях в $\mathbb{C}^n$, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 1, 42–48

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-42-48>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:00:09

С.Г. МЫСЛИВЕЦ

О ЯДРАХ СЕГЕ И ПУАССОНА В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ В $\mathbb{C}^N$

Аннотация. Строятся ядра Сеге и Пуассона в выпуклых областях в $\mathbb{C}^n$ и изучаются их свойства.

Ключевые слова: выпуклая область, ядро Сеге, ядро Пуассона.

УДК: 517.55

Эта статья содержит некоторые результаты, связанные с построением ядер Сеге и Пуассона в выпуклых областях, которые имеют большое значение для интегральных представлений в этих областях.

1. Построение ядра Сеге. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей и $\mathcal{H}(D)$ — пространство голоморфных функций в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в D , а $\mathcal{H}(\overline{D})$ — пространство голоморфных функций в окрестности $\overline{D}$ с соответствующей топологией. Пространство $\mathcal{H}(\overline{D})$ является естественным подпространством в $\mathcal{L}^2(\partial D)$ по мере $d\mu$ на ∂D , где $d\mu = g(\zeta)d\sigma$, $g(\zeta) \in C^1(\partial D)$, $g(\zeta) > 0$, $d\sigma$ — мера Лебега на ∂D . Отображение $\mathcal{H}(\overline{D}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\partial D)$ инъективно по теореме о максимуме модуля. Обозначим $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2(\partial D)$ замыкание $\mathcal{H}(\overline{D})$ в $\mathcal{L}^2$.

Рассмотрим отображение сужения $r : \mathcal{H}(\overline{D}) \rightarrow \mathcal{H}(D)$. Отображение r продолжается до непрерывного из $\mathcal{H}^2$ в $\mathcal{H}(D)$.

Лемма 1 ([1], лемма 4.1). *Отображение сужения $r : \mathcal{H}(\overline{D}) \rightarrow \mathcal{H}(D)$ непрерывно, если $\mathcal{H}(\overline{D})$ рассматривается в топологии, индуцированной пространством $\mathcal{L}^2$.*

Следовательно, отображение r продолжается до непрерывного отображения $i : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}(D)$. В этом случае говорим, что для функции $f \in \mathcal{H}^2$ существует голоморфное продолжение $\tilde{f} = i(f)$ в D . В дальнейшем будем это продолжение обозначать тем же символом f .

В работе [1] в качестве меры рассматривалась мера Лебега $d\sigma$ на границе области, в нашем случае для меры $d\mu = g(\zeta)d\sigma$ все доказательства совершенно аналогичны.

Поскольку $\mathcal{H}^2$ — гильбертово сепарабельное пространство, то в нем существует ортонормированный базис

$$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \tag{1}$$

Поступила в редакцию 29.11.2017. После доработки 29.11.2017. Принята к публикации 22.03.2018

Благодарности. Работа выполнена за счет гранта 14.Y26.31.0006 Правительства Российской Федерации для поддержки научных школ под руководством ведущего ученого в Сибирском федеральном университете.

в метрике $\mathcal{L}^2$. Поэтому любая функция $f \in \mathcal{H}^2$ раскладывается в ряд Фурье по базису (1), который сходится в топологии пространства $\mathcal{L}^2$:

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(\zeta), \quad (2)$$

где $c_k = (f, \varphi_k) = \int_{\partial D} f(u) \bar{\varphi}_k(u) d\mu(u)$. Тогда

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\partial D} f(u) \bar{\varphi}_k(u) d\mu(u) \varphi_k(\zeta) \right) = \int_{\partial D} f(u) \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\varphi}_k(u) \varphi_k(\zeta) d\mu(u).$$

Обозначим $K(\zeta, \bar{u}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\zeta) \bar{\varphi}_k(u)$ и $K(\zeta, \bar{u}) \in \mathcal{H}(\bar{D})$ по $\zeta \in \bar{D}_u$ при фиксированном $u \in D$.

Лемма 2. *Ортонормированный базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}^2$ можно выбрать состоящим из функций φ_k из пространства $\mathcal{H}(\bar{D})$.*

Доказательство. Поскольку пространство $\mathcal{H}(\bar{D})$ сепарабельное, то в нем существует счетное всюду плотное множество. Оно будет таким же в $\mathcal{H}^2$, так как $\mathcal{H}^2$ — замыкание пространства $\mathcal{H}(\bar{D})$. Применяя к функциям из этого множества процесс ортогонализации Грама–Шмидта, получим ортонормированный базис в $\mathcal{H}^2$, состоящий из функций $\varphi_k \in \mathcal{H}(\bar{D})$. $\square$

Лемма 3. *Если D — ограниченная строго выпуклая область с гладкой границей, то базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать из полиномов.*

Доказательство. Так как область D строго выпуклая, то $\bar{D}$ — полиномиально выпуклый компакт. На полиномиально выпуклом компакте функция, голоморфная в его окрестности, равномерно приближается на нем полиномами [2]. Следовательно, полиномы плотны в классе функций из $\mathcal{H}(\bar{D})$ и поэтому из $\mathcal{H}^2$. Применяя к этому множеству процесс ортогонализации Грама–Шмидта, получим базис в $\mathcal{H}^2$, состоящий из полиномов. $\square$

Назовем функцию $g(\zeta)$ инвариантной относительно поворотов, если $g(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = g(e^{i\varphi}\zeta_1, \dots, e^{i\varphi}\zeta_n)$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Лемма 4. *Если D — ограниченная строго выпуклая круговая область с гладкой границей, а функция $g(\zeta)$ инвариантна относительно поворотов, то базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать из однородных полиномов.*

Доказательство. Действительно, в этом случае мера $d\mu$ также инвариантна относительно поворотов, поэтому однородные полиномы разной степени однородности ортогональны в $\mathcal{H}^2$. $\square$

В дальнейшем будем считать, что базис выбран согласно теореме 5.1 [1]. По этой теореме продолжение ядра $K(\zeta, \bar{u})$ обладает свойством

$$i(f)(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) K(z, \bar{\zeta}) d\mu(\zeta), \quad z \in D,$$

где $K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{k=1}^{\infty} i(\varphi_k)(z) i(\bar{\varphi}_k)(\zeta)$ и ряд равномерно сходится на компактных подмножествах из $D \times D$. Это ядро будем называть *ядром Сеге*. Тогда

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) K(z, \bar{\zeta}) d\mu(\zeta), \quad (3)$$

где $f(z)$ отождествлена с $\tilde{f}(z) = i(f)(z)$ и $f \in \mathcal{H}^2$. Определим ядро Пуассона

$$P(z, \zeta) = \frac{K(z, \bar{\zeta}) \cdot K(\zeta, \bar{z})}{K(z, \bar{z})} = \frac{K(z, \bar{\zeta}) \cdot \overline{K(z, \bar{\zeta})}}{K(z, \bar{z})} = \frac{|K(z, \bar{\zeta})|^2}{K(z, \bar{z})},$$

причем $K(z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2 \geq 0$.

Лемма 5. Ядро $K(z, \bar{z}) > 0$ для любого $z \in D$.

Доказательство. Пусть $K(z, \bar{z}) = 0$ для некоторого $z \in D$. Тогда $\varphi_k(z) = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$, поэтому

$$\varphi_k(z) = \int_{\partial D} \varphi_k(\zeta) K(z, \bar{\zeta}) d\mu(\zeta) = 0. \quad (4)$$

Поскольку любая функция $f \in \mathcal{H}^2$ разлагается в ряд Фурье (2), то $f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(\zeta)$.

Применяя отображение i , получим $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k i(\varphi_k)(z) = 0$ в силу (4), т. е. $f(z) \equiv 0$ в D для любой функции $f \in \mathcal{H}^2$, что невозможно. Поэтому ядро $K(z, \bar{z}) > 0$ для любого $z \in D$. $\square$

Лемма 6. Для функции $f \in \mathcal{H}(\overline{D})$ справедливо интегральное представление

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) P(z, \zeta) d\mu(\zeta), \quad z \in D. \quad (5)$$

Доказательство. По определению ядра $P(z, \zeta)$ и интегрального представления (3) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f(\zeta) P(z, \zeta) d\mu(\zeta) &= \int_{\partial D} f(\zeta) \frac{K(z, \bar{\zeta}) \cdot K(\zeta, \bar{z})}{K(z, \bar{z})} d\mu(\zeta) = \\ &= \frac{1}{K(z, \bar{z})} \int_{\partial D} (f(\zeta) K(\zeta, \bar{z})) K(z, \bar{\zeta}) d\mu(\zeta) = \frac{f(z) K(z, \bar{z})}{K(z, \bar{z})} = f(z). \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 1. Если пространство $\mathcal{H}(\overline{D})$ плотно в пространстве $\mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\partial D) = \mathcal{A}(D)$, то формула (5) справедлива для функции $f \in \mathcal{A}(D)$.

Предположим, что область D удовлетворяет условию (A): для любой точки $\zeta \in \partial D$ и любой окрестности $U(\zeta)$ ядро Сеге $K(z, \bar{\zeta})$ равномерно ограничено по $z \in D$ при $z \notin U(\zeta)$. В дальнейшем будем предполагать, что область D всегда удовлетворяет условию (A).

Теорема 1. Пусть D — строго выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ и при фиксированном $z \in D$ ядро $K(z, \bar{\zeta})$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ по $\zeta \in \partial D$. Тогда область D и ядро $K(z, \bar{\zeta})$ удовлетворяют условию (A).

Доказательство. Пусть

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}, \quad (6)$$

где $\rho \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$ и $\text{grad } \rho|_{\partial D} \neq 0$. Для доказательства воспользуемся следствием 26.13 [3] для интегрального представления Лере для голоморфных функций $f \in \mathcal{A}(D)$ в строго выпуклых областях:

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta}{[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \dots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)]^n},$$

где

$$\delta_k = \begin{bmatrix} \rho'_{\zeta_1} & \cdots & \rho'_{\zeta_n} \\ \rho''_{\zeta_1 \bar{\zeta}_1} & \cdots & \rho''_{\zeta_n \bar{\zeta}_1} \\ & [k] & \\ \rho''_{\zeta_1 \bar{\zeta}_n} & \cdots & \rho''_{\zeta_n \bar{\zeta}_n} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n, \quad d\bar{\zeta}[k] = d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_{k-1} \wedge d\bar{\zeta}_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n.$$

Знаменатель ядра $\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \cdots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n) \neq 0$ для $\zeta \in \partial D$, $z \in \bar{D}$ и $\zeta \neq z$. Действительно, равенство $\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \cdots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n) = 0$ определяет комплексную касательную плоскость к ∂D в точке ζ . Если область D строго выпуклая, то касательная плоскость пересекает границу области D только в точке ζ .

Ядро Сеге $K(z, \bar{\zeta})$ для области D является (обобщенным) ядром Коши–Фанташье (Лере) по следствию 26.13 [3], поэтому такие области удовлетворяют условию (A). $\square$

Рассмотрим сужение формы

$$L(z, \zeta, \bar{\zeta}) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta}{[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \cdots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)]^n}$$

на ∂D , тогда оно примет вид

$$\begin{aligned} L(z, \zeta, \bar{\zeta}) &= \\ &= \frac{\psi(\zeta, \bar{\zeta}) d\sigma(\zeta)}{[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \cdots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)]^n} = \frac{\psi(\zeta, \bar{\zeta}) d\mu(\zeta)}{g(\zeta) [\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \cdots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)]^n} = \\ &= \frac{\psi_1(\zeta, \bar{\zeta}) d\mu(\zeta)}{[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + \cdots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n - z_n)]^n} = \tilde{L}(z, \zeta, \bar{\zeta}) d\mu(\zeta). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1 показывает, что

$$K(z, \bar{\zeta}) = \tilde{L}(z, \zeta, \bar{\zeta}), \quad \zeta \in \partial D. \quad (7)$$

Лемма 7. Функция $K(z, z)$ является неограниченной при $z \rightarrow \zeta$ и $\zeta \in \partial D$, $z \in D$.

Доказательство. Рассмотрим точку $z^0 \in D$. Область D является сильно звездной относительно z^0 , т. е. для любой точки $\zeta^0 \in \partial D$ отрезок $[z^0, \zeta^0] \in \bar{D}$. Пусть этот отрезок имеет вид $\{z \in D : z = \zeta^0 + t(z^0 - \zeta^0), 0 \leq t \leq 1\}$. Тогда

$$\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1^0 - z_1) + \cdots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n^0 - z_n) = t(\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1^0 - z_1^0) + \cdots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n^0 - z_n^0)).$$

Если $z \rightarrow \zeta^0$, то $t \rightarrow 0$ и $(\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1^0 - z_1^0) + \cdots + \rho'_{\zeta_n}(\zeta_n^0 - z_n^0)) \rightarrow 0$. Значит, $K(z, z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \zeta$, $\zeta \in \partial D$. $\square$

2. Интеграл Пуассона и его свойства. Для функции $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ определим интеграл Пуассона

$$\mathbf{P}[f](z) = F(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) P(z, \zeta) d\mu(\zeta).$$

В строго выпуклых областях, удовлетворяющих условию (A), из равенства (7) и вида ядра $P(z, \zeta)$ следует, что это ядро является непрерывной функцией по $z \in D$.

Теорема 2. Пусть D — ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условию (A), тогда

- 1) $P(z, \zeta) \geq 0$ для всех $\zeta \in \partial D$ и $z \in \bar{D}$;

- 2) $\int_{\partial D} P(z, \zeta) d\mu(\zeta) = 1$ для $z \in D$;
 3) для $\zeta^0 \in \partial D$ и для $z^0 \in D$ положим $z = \zeta^0 + t(z^0 - \zeta^0)$ ($0 \leq t < 1$), тогда для всех $\delta > 0$

$$\int_{\zeta \in \partial D, |\zeta - \zeta^0| > \delta} P(z, \zeta) d\mu(\zeta) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 1 \text{ равномерно по } \zeta^0.$$

Доказательство 1) следует из определения ядра Пуассона и леммы 5; 3) следует из того, что выражение $|\zeta - z| = |\zeta - \zeta^0 - t(z^0 - \zeta^0)|$ отделено от нуля по теореме 1 и лемме 7 равномерно по ζ при таких $\zeta \in \partial D$, что $|\zeta - \zeta^0| > \delta$.

2) Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P(z, \zeta) d\mu(\zeta) &= \int_{\partial D} \frac{|K(z, \bar{\zeta})|^2}{K(z, \bar{z})} d\mu(\zeta) = \\ &= \frac{1}{K(z, \bar{z})} \int_{\partial D} K(\zeta, \bar{z}) \cdot K(z, \bar{\zeta}) d\mu(\zeta) = \frac{K(z, \bar{z})}{K(z, \bar{z})} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 2 показывает, что ядро $P(z, \zeta)$ является аппроксимативной единицей (приближением единицы) ([4], гл. II).

Теорема 3. Пусть D — ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условию (A), и $f \in \mathcal{C}(\partial D)$, тогда функция $F(z)$ является непрерывной функцией по z вплоть до границы ∂D и $F(z)|_{\partial D} = f(z)$.

Доказательство. Пусть $\zeta, \zeta^0 \in \partial D$ и $\zeta \neq \zeta^0$, $z = \zeta^0 + t(z^0 - \zeta^0)$ для $z^0 \in D$ и $t \rightarrow 1$, $U_\delta = \{\zeta : |\zeta - \zeta^0| < \delta\}$ означает окрестность точки ζ^0 и пусть $z \notin U_\delta$, $A_\delta = \{\zeta \in \partial D : |\zeta - \zeta^0| > \delta\}$. Тогда из утверждений 1) и 2) теоремы 2 имеем

$$\begin{aligned} |F(z) - F(\zeta^0)| &= \left| \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(\zeta^0)) P(z, \zeta) d\mu(\zeta) \right| \leq \\ &\leq \int_{A_\delta} |f(\zeta) - f(\zeta^0)| P(z, \zeta) d\mu(\zeta) + \int_{\partial D \setminus A_\delta} |f(\zeta) - f(\zeta^0)| P(z, \zeta) d\mu(\zeta). \end{aligned}$$

Используя утверждение 2) теоремы 2, оценим второе слагаемое

$$\left(\sup_{|\zeta - \zeta^0| \leq \delta} |f(\zeta) - f(\zeta^0)| \right) \int_{\partial D \setminus A_\delta} P(z, \zeta) d\mu(\zeta) \leq \left(\sup_{|\zeta - \zeta^0| \leq \delta} |f(\zeta) - f(\zeta^0)| \right) \cdot 1,$$

из непрерывности функции $f(\zeta)$ эту оценку можно сделать меньше любого $\varepsilon > 0$, выбрав δ достаточно близким к нулю. При фиксированном δ первое слагаемое оценивается величиной

$$2 \left(\sup_{\zeta \in \partial D} |f(\zeta)| \right) \int_{A_\delta} P(z, \zeta) d\mu(\zeta).$$

Но из утверждения 3) теоремы 2 эта величина стремится к нулю при $t \rightarrow 1$ равномерно по ζ^0 . Таким образом, $|F(z) - F(\zeta^0)| < \varepsilon$ равномерно по ζ^0 , если t достаточно близко к единице.

Следовательно, если $\zeta' \in \partial D$ и $z = \zeta^0 + t(z^0 - \zeta^0)$, то

$$\begin{aligned} |F(\zeta') - F(z)| &\leq |F(\zeta') - F(\zeta^0)| + |F(\zeta^0) - F(z)| \leq \\ &\leq |f(\zeta') - f(\zeta^0)| + |F(\zeta^0) - F(z)| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

при z достаточно близких к ζ' (в этом случае обе величины $1 - t$ и $|\zeta^0 - z|$ малы).

Отсюда следует $F(z)|_{\partial D} = f(z)$. □

Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = c \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \bar{\zeta}_k d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

где $c = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$. Найдем сужение этой формы на ∂D для области D вида (6). Тогда по лемме 3.5 [5] получим

$$d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta = (-1)^{k-1} 2^{n-1} i^n \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_k} \cdot \frac{d\sigma}{|\text{grad } \rho|}.$$

Поэтому сужение ω на ∂D равно

$$d\mu = \omega|_{\partial D} = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \sum_{k=1}^n \bar{\zeta}_k \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_k} \cdot \frac{d\sigma}{|\text{grad } \rho|}.$$

Обозначим

$$g(\zeta) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \sum_{k=1}^n \bar{\zeta}_k \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_k} \cdot \frac{1}{|\text{grad } \rho|}.$$

Предложение 1. Если D — круговая строго выпуклая область, то $g(\zeta)$ — вещественнозначная функция, не обращающаяся в нуль на ∂D .

Доказательство. Так как для круговой области $\rho(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \rho(\zeta_1 e^{i\theta}, \dots, \zeta_n e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, то дифференцируя это равенство по θ , получим

$$0 = \sum_{k=1}^n i \zeta_k e^{i\theta} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_k} - \sum_{k=1}^n i \bar{\zeta}_k e^{-i\theta} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_k}.$$

Тогда при $\theta = 0$ имеем $\sum_{k=1}^n \zeta_k \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_k} = \sum_{k=1}^n \bar{\zeta}_k \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_k}$. Вещественность функции $g(\zeta)$ означает, что

$$\sum_{k=1}^n \bar{\zeta}_k \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_k} = \overline{\sum_{k=1}^n \zeta_k \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_k}} = \sum_{k=1}^n \zeta_k \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_k}.$$

Функция $g(\zeta) \neq 0$ на ∂D , поскольку комплексная касательная плоскость в точке ζ не проходит через нуль. Значит, функция $g(\zeta)$ сохраняет знак на ∂D . $\square$

Поэтому можно считать, что $g(\zeta) > 0$ на ∂D .

Следствие 2. Если D — круговая строго выпуклая область, то функция $g(\zeta)$ инвариантна относительно поворотов.

Предложение 2. Пусть D — $(p_1, \dots, p_n)$ -круговая строго выпуклая область, т. е.

$$\rho(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \rho(\zeta_1 e^{ip_1\theta}, \dots, \zeta_n e^{ip_n\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

где $p_1, \dots, p_n$ — положительные рациональные числа. Тогда функция $\sum_{k=1}^n \bar{\zeta}_k p_k \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_k}$ вещественная и не равна нулю.

Доказательство повторяет доказательство предыдущей леммы. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bungart L. *Boundary kernel functions for domains on complex manifolds*, Pac. J. Math. **14** (4), 1151–1164 (1964).
- [2] Хермандер Л. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных* (Мир, М., 1968).
- [3] Айзенберг Л.А., Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе* (Наука, Новосибирск, 1979).
- [4] Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах* (Мир, М., 1974).
- [5] Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения* (Наука, Новосибирск, 1992).

Симона Глебовна Мысливец

Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, д. 79, г. Красноярск, 660041, Россия,

e-mail: sMyslivets@stu-kras.ru

S.G. Myslivets

On the Szegő and Poisson kernels in the convex domains in $\mathbb{C}^n$

Abstract. We construct the Szegő and Poisson kernel in the convex domains in $\mathbb{C}^n$ and study their properties.

Keywords: convex domain, Szegő kernel, Poisson kernel.

Simona Glebovna Myslivets

*Siberian Federal University,
79 Svobodnyi Ave., Krasnoyarsk, 660041 Russia,*

e-mail: sMyslivets@stu-kras.ru