Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Потапов, Б. В. Симонов, Неравенства различных метрик для тригонометрических полиномов, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 1, 49–62

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-49-62>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:31:29

М.К. ПОТАПОВ, Б.В. СИМОНОВ

НЕРАВЕНСТВА РАЗЛИЧНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Аннотация. Для тригонометрических полиномов хорошо известны неравенства С.М. Никольского в разных метриках. В данной работе доказываются неравенства для сумм тригонометрических полиномов, обобщающие эти неравенства.

Ключевые слова: неравенство Никольского, метрика, тригонометрические полиномы.

УДК: 517.5

1. Обозначим через L_p , $1 \leq p \leq \infty$, множество измеримых 2π -периодических функций $f(x)$ одного переменного, для которых $\|f\|_p < \infty$, где $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, если $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_p = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|$, если $p = \infty$.

Через $C, C_1, \dots$ обозначим произвольные положительные постоянные, вообще говоря, разные в разных формулах.

Лемма 1 (неравенство Никольского [1], с. 243). Пусть $T_n(x)$ — тригонометрический полином порядка $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Тогда

$$\|T_n\|_q \leq 2n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|T_n\|_p.$$

В работе получено следующее обобщение неравенства Никольского.

Теорема 1. Пусть функция T_{2^n} — тригонометрический полином порядка 2^n , $1 \leq p < q \leq \infty$, $q^* = q$, если $q < \infty$, $q^* = 1$, если $q = \infty$. Тогда

$$\left\| \sum_{n=N_1}^{N_2} T_{2^n} \right\|_q \leq C \left(\sum_{n=N_1}^{N_2} 2^{nq^*(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|T_{2^n}\|_p^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}},$$

где постоянная C не зависит от N_1 , N_2 и T_{2^n} .

Доказательство будет проводиться методом Харди–Литтлвуда–Пэли.

а) Пусть $1 \leq p < q < \infty$, $J \equiv \left\| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu} \right\|_q \leq \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu}(x)| \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$

Поступила в редакцию 03.12.2017. После доработки 03.12.2017. Принята к публикации 22.03.2018
Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00457.

Оценим $J_1 \equiv \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu}(x)| \right)^q dx = \int_0^{2\pi} \left[\left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu}(x)| \right)^{\frac{q}{m}} \right]^m dx$, где $m = [q] + 1$, $[a]$ — целая часть числа a .

Применяя неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (1)$$

где $a_k \geq 0$, $0 < \alpha < \beta < \infty$ (например, [2], с. 43), имеем

$$J_1 \leq \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu}|^{\frac{q}{m}} \right]^m dx = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^m |T_{2^{\nu_k}}|^{\frac{q}{m}} dx =$$

(здесь и далее принята условная форма записи:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \alpha_i \beta_j &= \prod_{i=1}^{m-1} \gamma_i, \quad \gamma_i = (\alpha_i \beta_{i+1})(\alpha_i \beta_{i+2}) \dots (\alpha_i \beta_m) \\ &= \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m |T_{2^{\nu_k}} T_{2^{\nu_l}}|^{\frac{q}{m(m-1)}} dx. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера ([3], с. 19) с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{2}m(m-1)$, получаем

$$J_1 \leq \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}} T_{2^{\nu_l}}|^{\frac{q}{2}} dx \right)^{\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha = \frac{q+p}{p}$ и $\alpha_1 = \frac{q+p}{q}$, имеем

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}}|^{\frac{q\alpha}{2}} dx \right)^{\frac{1}{\alpha\mathcal{P}}} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_l}}|^{\frac{q\alpha_1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{\alpha_1\mathcal{P}}} \equiv \\ &\equiv \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \beta_k \hat{\beta}_l. \quad (2) \end{aligned}$$

Оценим β_k . Применяя неравенство Никольского, имеем

$$\begin{aligned} \beta_k &= \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}}|^{\frac{q\alpha}{2}} dx \right)^{\frac{1}{\alpha\mathcal{P}}} = \|T_{2^{\nu_k}}\|_{\frac{q}{\alpha q}}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} \leq C_1 \left\{ \|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p} - \frac{2}{\alpha q})} \right\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} = \\ &= C_1 \left\{ \|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} 2^{\nu_k(\frac{1}{q} - \frac{2}{\alpha q})} \right\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} = C_1 \left\{ \|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_k(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_l &\leq C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p} - \frac{2}{\alpha_1 q})} \right\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} = C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_l(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1})\frac{1}{\mathcal{P}}} = \\ &= C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_l(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}} = C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right\}^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{-\nu_l(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}, \end{aligned}$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от ν_k, ν_l . Тогда

$$\prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \beta_k \widehat{\beta}_l \leq C_3 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right]^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k-\nu_l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}} \right\}.$$

Если $\nu_k \leq \nu_l$, то получаем

$$\prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \beta_k \widehat{\beta}_l \leq C_3 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right]^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k-\nu_l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}} \right\}.$$

Если $\nu_k > \nu_l$, то в формуле (2), применяя неравенство Гёльдера с показателями α_1 и α (в отличие от α и α_1 в (2)), имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \beta_k \widehat{\beta}_l &\leq C_3 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right]^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k-\nu_l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha_1})\frac{1}{\mathcal{P}}} \right\} = \\ &= \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right]^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k-\nu_l)(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}} \right\} = \\ &= \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_{2^{\nu_l}}\|_p 2^{\nu_l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right]^{\frac{q}{2\mathcal{P}}} 2^{(-\nu_k+\nu_l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \beta_k \widehat{\beta}_l \leq C_3 \prod_{k=1}^m \left\{ \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Теперь получаем

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \beta_k \widehat{\beta}_l \leq \\ &\leq C_3 \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^m \left\{ \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right\}^{\frac{1}{m}} = \\ &= C_3 \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^m \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k}}\|_p 2^{\nu_k(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right]^{\frac{q}{m}} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{2\mathcal{P}}} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = m$, имеем

$$J_1 \leq C_3 \prod_{k=1}^m \left\{ \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{m}{2\mathcal{P}}} \right\}^{\frac{1}{m}} \equiv C_3 \prod_{k=1}^m M_k^{\frac{1}{m}}.$$

Рассмотрим

$$M_k = \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_{k-1}=N_1}^{N_2} \sum_{\nu_{k+1}=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k-\nu_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left[\sum_{\nu=N_1}^{N_2} 2^{-|\nu_k-\nu|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right]^{m-1} \leq \\
&\leq \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left[\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 2^{-|\lambda|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right]^{m-1} \leq C_4 \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$J \leq C_5 \left(\left\{ \prod_{k=1}^m \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}}\|_p^q 2^{\nu_k q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right\}^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{q}} = C_5 \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^\nu}\|_p^q 2^{\nu q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

б) Пусть $1 \leq p < q = \infty$. Тогда, применяя свойства нормы функции и неравенство Никольского, имеем

$$J = \left\| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu} \right\|_q \leq \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^\nu}(x)\|_\infty \leq C \sum_{\nu=N_1}^{N_2} 2^{\nu \frac{1}{p}} \|T_{2^\nu}(x)\|_p. \quad \square$$

2. Обозначим через $L_{p_1 p_2}$, $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1, 2$, множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, 2π -периодических по каждому переменному, для которых $\|f\|_{p_1, p_2} = \|\{ \|f\|_{p_1} \}\|_{p_2} < \infty$, где $\|F\|_{p_i} = \left(\int_0^{2\pi} |F|^{p_i} dx_i \right)^{\frac{1}{p_i}}$, если $1 \leq p_i < \infty$, $\|F\|_{p_i} = \sup_{0 \leq x_i \leq 2\pi} |F|$, если $p_i = \infty$.

Лемма 2 (неравенство Никольского [4], с. 133; [5]). Пусть $T_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$ — тригонометрический полином порядка n_1 по переменной x_1 и порядка n_2 ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}$) по переменной x_2 , $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$ ($i = 1, 2$). Тогда

$$\|T_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\|_{q_1 q_2} \leq C n_1^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}} n_2^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}} \|T_{n_1, n_2}(x_1, x_2)\|_{p_1 p_2},$$

где постоянная C не зависит от n_1 и n_2 .

В работе получены следующие обобщения неравенства Никольского.

Теорема 2. Пусть функция $T_{2^{n_1}, \infty} \in L_{p_1 p_2}$, $1 \leq p_i \leq \infty$ ($i = 1, 2$), и является тригонометрическим полиномом порядка 2^{n_1} по переменной x_1 , $1 \leq p_1 < q_1 \leq \infty$, $q_1^* = q_1$, если $q_1 < \infty$, $q_1^* = 1$, если $q_1 = \infty$. Тогда

$$\left\| \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1}, \infty} \right\|_{q_1 p_2} \leq C \left(\sum_{n_1=N_1}^{N_2} 2^{n_1 q_1^* (\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \|T_{2^{n_1}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1^*} \right)^{\frac{1}{q_1^*}},$$

где постоянная C не зависит от N_1 , N_2 и $T_{2^{n_1}, \infty}$.

Доказательство. а) Пусть $1 \leq p_1 < q_1 < \infty$ и $1 \leq p_2 < \infty$, тогда $q_1^* = q_1$. Обозначим $[q_1] + 1 = m$, где $[a]$ — целая часть числа a , $P = \frac{1}{2}m(m-1)$. Тогда

$$J_1 \equiv \left\| \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1}, \infty} \right\|_{q_1 p_2} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu, \infty} \right|^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2\nu,\infty}| \right)^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Рассмотрим

$$B_1 = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2\nu,\infty}| \right)^{q_1} dx_1 = \int_0^{2\pi} \left[\left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2\nu,\infty}| \right)^{\frac{q_1}{m}} \right]^m dx_1.$$

В силу неравенства (1)

$$\begin{aligned} B_1 &\leq \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2\nu,\infty}|^{\frac{q_1}{m}} \right]^m dx_1 = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^m |T_{2\nu_k,\infty}|^{\frac{q_1}{m}} dx_1 = \\ &= \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m |T_{2\nu_k,\infty} T_{2\nu_l,\infty}|^{\frac{q_1}{m(m-1)}} dx_1. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{2}m(m-1)$, получаем

$$B_1 \leq \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{2\nu_k,\infty} T_{2\nu_l,\infty}|^{\frac{q_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha = \frac{q_1+p_1}{p_1}$ и $\alpha_1 = \frac{q_1+p_1}{q_1}$, получаем

$$\begin{aligned} B_1 &\leq \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{2\nu_k,\infty}|^{\frac{q_1\alpha}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha\mathcal{P}}} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2\nu_l,\infty}|^{\frac{q_1\alpha_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha_1\mathcal{P}}} \equiv \\ &\equiv \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m a_k \hat{a}_l = \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^m a_k^{m-k} \hat{a}_k^{k-1} = \prod_{k=1}^m \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} a_k^{m-k} \hat{a}_k^{k-1}. \quad (3) \end{aligned}$$

Тогда

$$J_1^{p_2} \leq \int_0^{2\pi} \left(\prod_{k=1}^m \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} a_k^{m-k} \hat{a}_k^{k-1} \right)^{\frac{p_2}{q_1}} dx_2.$$

Согласно неравенству Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = m$ имеем

$$J_1^{p_2} \leq \prod_{k=1}^m \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} a_k^{m-k} \hat{a}_k^{k-1} \right]^{\frac{p_2 m}{q_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Ввиду неравенства Минковского

$$J_1^{p_2} \leq \prod_{k=1}^m \left\{ \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \left[\int_0^{2\pi} \left(a_k^{m-k} \hat{a}_k^{k-1} \right)^{\frac{p_2 m}{q_1}} dx_2 \right]^{\frac{q_1}{p_2 m}} \right\}^{\frac{p_2}{q_1}} =$$

$$= \left\{ \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^m \left[\int_0^{2\pi} \left(a_k^{m-k} \widehat{a}_k^{k-1} \right)^{\frac{p_2 m}{q_1}} dx_2 \right]^{\frac{q_1}{p_2 m}} \right\}^{\frac{p_2}{q_1}} \equiv \left\{ \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} A_{\nu_1 \dots \nu_m} \right\}^{\frac{p_2}{q_1}}. \quad (4)$$

В силу неравенства Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \frac{m-1}{m-k}$ и $\alpha_2 = \frac{m-1}{k-1}$

$$\begin{aligned} A_{\nu_1 \dots \nu_m} &\leq \prod_{k=1}^m \left(\int_0^{2\pi} a_k^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m} \frac{m-k}{m-1}} \left(\int_0^{2\pi} \widehat{a}_k^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m} \frac{k-1}{m-1}} = \\ &= \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left[\left(\int_0^{2\pi} a_k^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} \left(\int_0^{2\pi} \widehat{a}_l^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} \right] \equiv \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \gamma_k \widehat{\gamma}_l. \end{aligned}$$

Оценим γ_k и $\widehat{\gamma}_l$. Применяя неравенство Никольского, имеем

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \left(\int_0^{2\pi} a_k^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}, \infty}|^{\frac{q_1 \alpha}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha \mathcal{P}} \frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} = \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}, \infty}|^{\frac{q_1 \alpha}{2}} dx_1 \right)^{\frac{2p_2}{\alpha q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{2p_2 \mathcal{P}}} = \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}, p_2}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} \leq \\ &\leq C_1 \left\{ \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{2}{q_1 \alpha})} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} = C_1 \left\{ \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} 2^{\nu_k(\frac{1}{q_1} - \frac{2}{q_1 \alpha})} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} = \\ &= C_1 \left\{ \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_k(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_l &= \left(\int_0^{2\pi} \widehat{a}_l^{\frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_l}, \infty}|^{\frac{q_1 \alpha_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha_1 \mathcal{P}} \frac{p_2 m(m-1)}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{p_2 m(m-1)}} = \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_l}, \infty}|^{\frac{q_1 \alpha_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{2p_2}{\alpha_1 q_1}} dx_2 \right)^{\frac{q_1}{2p_2 \mathcal{P}}} = \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}, p_2}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} \leq \\ &\leq C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1} - \frac{2}{q_1 \alpha_1})} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} = C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} 2^{\nu_l(\frac{1}{q_1} - \frac{2}{q_1 \alpha_1})} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} = \\ &= C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_l(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1})\frac{1}{\mathcal{P}}} = C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{\nu_l(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}} = \\ &= C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{-\nu_l(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}. \quad (6) \end{aligned}$$

Тогда для величины $A_{\nu_1 \dots \nu_m}$ (см. (4)), используя неравенства (5) и (6), имеем

$$A_{\nu_1 \dots \nu_m} \leq C_2 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left[\|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right]^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k - \nu_l)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Если $\nu_k \leq \nu_l$, то

$$A_{\nu_1 \dots \nu_m} \leq C_2 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left[\|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right]^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k - \nu_l)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Если $\nu_k > \nu_l$, то в формуле (3) в силу неравенства Гёльдера с показателями α_1 и α (а было по α и α_1)

$$A_{\nu_1 \dots \nu_m} \leq C_2 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left[\|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right]^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{(-\nu_k + \nu_l)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Следовательно,

$$A_{\nu_1 \dots \nu_m} \leq C_2 \prod_{k=1}^m \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right]^{\frac{q_1}{m}} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k - \nu_l|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{2\mathcal{P}}} \right\}.$$

Теперь получаем

$$\begin{aligned} J_1^{q_1} &\leq \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} A_{\nu_1 \dots \nu_m} \leq \\ &\leq C_2 \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^m \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right]^{\frac{q_1}{m}} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k - \nu_l|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{2\mathcal{P}}} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = m$, имеем

$$J_1^{q_1} \leq C_2 \prod_{k=1}^m \left\{ \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k - \nu_l|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{m}{2\mathcal{P}}} \right\}^{\frac{1}{m}} \equiv C_2 \prod_{k=1}^m M_k^{\frac{1}{m}}. \quad (7)$$

Оценим

$$\begin{aligned} M_k &= \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_{k-1}=N_1}^{N_2} \sum_{\nu_{k+1}=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k - \nu_l|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} = \\ &= \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \left[\sum_{\nu=N_1}^{N_2} 2^{-|\nu_k - \nu|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right]^{m-1} \leq \\ &\leq \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \left[\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 2^{-|\lambda|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right]^{m-1} \leq C_3 \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, из (7) и (8) получаем

$$J_1 \leq C_4 \left(\left\{ \prod_{k=1}^m \sum_{\nu_k=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right\}^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{q_1}} = C_4 \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1} 2^{\nu q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

b) Пусть $q_1 = p_2 = \infty$. Применяя неравенство Никольского, получаем

$$J_1 \equiv \max_{x_1, x_2} \left| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu, \infty} \right| \leq \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^\nu, \infty}\|_{q_1 p_2} \leq C \sum_{\nu=N_1}^{N_2} 2^{\nu \frac{1}{p_1}} \|T_{2^\nu, \infty}\|_{p_1 p_2}.$$

c) Пусть $1 \leq p_1 < q_1 = \infty, 1 \leq p_2 < \infty$. Введем обозначение

$$J_1 = \left\| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu, \infty} \right\|_{\infty, p_2} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\max_{x_1} \left| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \Delta_{\nu \infty} \right| \right)^{p_2} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Отсюда

$$J_1^{p_2} \leq \int_0^{2\pi} \left(\max_{x_1} \sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu, \infty}| \right)^{p_2} dx_2 \leq \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} \max_{x_1} |T_{2^\nu, \infty}| \right)^{p_2} dx_2.$$

В силу неравенства Минковского

$$J_1 \leq \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\max_{x_1} |T_{2^\nu, \infty}| \right)^{p_2} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^\nu, \infty}\|_{\infty, p_2}.$$

Применяя неравенство Никольского, получаем

$$J_1 \leq C_1 \sum_{\nu=N_1}^{N_2} 2^{\nu \frac{1}{p_1}} \|T_{2^\nu, \infty}\|_{p_1 p_2}.$$

d) Пусть $1 \leq p_1 < q_1 < \infty, p_2 = \infty$,

$$\begin{aligned} J \equiv \left\| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu, \infty} \right\|_{q_1 p_2} &= \max_{x_2} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=N_1}^{N_2} T_{2^\nu, \infty}(x_1, x_2) \right|^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq \\ &\leq \max_{x_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu, \infty}(x_1, x_2)| \right)^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{q_1}}. \quad (9) \end{aligned}$$

Оценим интеграл

$$J_1(x_2) \equiv \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu, \infty}(x_1, x_2)| \right)^{q_1} dx_1 = \int_0^{2\pi} \left[\left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu, \infty}(x_1, x_2)| \right)^{\frac{q_1}{m}} \right]^m dx_1,$$

где, как и в п. а), $m = [q_1] + 1$.

Согласно неравенству (1)

$$\begin{aligned} J_1(x_2) &\leq \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu=N_1}^{N_2} |T_{2^\nu, \infty}|^{\frac{q_1}{m}} \right]^m dx_1 = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^m |T_{2^{\nu_k}, \infty}|^{\frac{q_1}{m}} dx_1 = \\ &= \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{m-1} |T_{2^{\nu_k}, \infty}|^{\frac{q_1}{m-1}} \prod_{l=k+1}^m |T_{2^{\nu_l}, \infty}|^{\frac{q_1}{m(m-1)}} dx_1. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{2}m(m-1)$, получаем

$$J_1(x_2) \leq \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}, \infty} T_{2^{\nu_l}, \infty}|^{\frac{q_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha = \frac{q_1+p_1}{p_1}$ и $\alpha_1 = \frac{q_1+p_1}{q_1}$, имеем

$$\begin{aligned} J_1(x_2) &\leq \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}, \infty}|^{\frac{q_1 \alpha}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha \mathcal{P}}} \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_l}, \infty}|^{\frac{q_1 \alpha_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{1}{\alpha_1 \mathcal{P}}} \equiv \\ &\equiv \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \beta_k \hat{\beta}_l. \quad (10) \end{aligned}$$

Оценим β_k . В силу неравенства Никольского имеем

$$\beta_k = \left(\int_0^{2\pi} |T_{2^{\nu_k}, \infty}|^{\frac{q_1 \alpha}{2}} dx \right)^{\frac{1}{\alpha \mathcal{P}}} \leq \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{\frac{q_1}{\frac{2\mathcal{P}}{\alpha q_1}}, \infty} \leq C_1 \left\{ \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1, \infty} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{2}{\alpha q_1})} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}},$$

аналогично,

$$\hat{\beta}_l \leq C_2 \left\{ \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1, \infty} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1} - \frac{2}{\alpha_1 q_1})} \right\}^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}},$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от ν_k, ν_l . Тогда

$$\prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \beta_k \hat{\beta}_l \leq C_3 \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \left\{ \left[\|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_k(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \|T_{2^{\nu_l}, \infty}\|_{p_1 p_2} 2^{\nu_l(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right]^{\frac{q_1}{2\mathcal{P}}} 2^{(\nu_k - \nu_l)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{\mathcal{P}}} \right\}.$$

Меняя роль β_k и $\hat{\beta}_l$ и проведя аналогичные рассуждения, приходим к неравенству

$$\prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \beta_k \hat{\beta}_l \leq C_3 \prod_{k=1}^m \left\{ \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k - \nu_l|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Отсюда на основании (10) получаем оценку

$$\begin{aligned} J_1(x_2) &\leq \sum_{\nu_1=N_1}^{N_2} \dots \sum_{\nu_m=N_1}^{N_2} \prod_{k=1}^{m-1} \prod_{l=k+1}^m \beta_k \hat{\beta}_l \leq \\ &\leq C_3 \prod_{k=1}^m \left\{ \|T_{2^{\nu_k}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1} 2^{\nu_k q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \prod_{l=1}^m 2^{-|\nu_k - \nu_l|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha})\frac{1}{m-1}} \right\}^{\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

Применяя теперь неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = m$ и проводя оценки, как в случае а), получаем

$$J_1(x_2) \leq C_4 \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1} 2^{\nu q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})}.$$

Отсюда и из (9) имеем

$$J \leq C_5 \left(\sum_{\nu=N_1}^{N_2} \|T_{2^{\nu}, \infty}\|_{p_1 p_2}^{q_1} 2^{\nu q_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

□

Теорема 3. Пусть функция $T_{\infty, 2^{n_2}} \in L_{p_1 p_2}$, $1 \leq p_i \leq \infty$ ($i = 1, 2$), и является тригонометрическим полиномом порядка 2^{n_2} по переменной x_2 , $1 \leq p_2 < q_2 \leq \infty$, $q_2^* = q_2$, если $q_2 < \infty$, $q_2^* = 1$, если $q_2 = \infty$. Тогда

$$\left\| \sum_{n_2=M_1}^{M_2} T_{\infty, 2^{n_2}} \right\|_{p_1 q_2} \leq C \left(\sum_{n_2=M_1}^{M_2} 2^{n_2 q_2^* (\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \|T_{\infty, 2^{n_2}}\|_{p_1 p_2}^{q_2^*} \right)^{\frac{1}{q_2^*}},$$

где постоянная C не зависит от M_1 , M_2 и $T_{\infty, 2^{n_2}}$.

Доказательство. а) Пусть $1 \leq p_2 < q_2 < \infty$. Тогда при $1 \leq p_1 < \infty$

$$\begin{aligned} J_1 &\equiv \left\| \sum_{\mu=M_1}^{M_2} T_{\infty, 2^\mu} \right\|_{p_1 q_2}^{q_2} \leq \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\mu=M_1}^{M_2} |T_{\infty, 2^\mu}(x_1, x_2)| \right)^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{q_2}{p_1}} dx_2 = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\left(\sum_{\mu=M_1}^{M_2} |T_{\infty, 2^\mu}(x_1, x_2)| \right)^{\frac{p_1}{m}} \right]^m dx_1 \right\}^{\frac{q_2}{p_1}} dx_2, \end{aligned}$$

где $m = [p_1] + 1$.

Возведя в степень m , получаем

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\left(\sum_{\mu=M_1}^{M_2} |T_{\infty, 2^\mu}(x_1, x_2)| \right)^{\frac{p_1}{m}} \right]^m dx_1 \right\}^{\frac{q_2}{p_1}} dx_2 = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \int_0^{2\pi} \left(\prod_{i=1}^m |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)| \right)^{\frac{p_1}{m}} dx_1 \right\}^{\frac{q_2}{p_1}} dx_2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = m$, имеем

$$J_1 \leq \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \prod_{i=1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{m}} \right\}^{\frac{q_2}{p_1}} dx_2.$$

1) Если $q_2/p_1 \leq 1$, то в силу неравенства (1)

$$J_1 \leq \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{m p_1}} dx_2. \quad (11)$$

2) Если $q_2/p_1 > 1$, то, обозначая $[q_2/p_1] + 1 = \gamma$, имеем

$$J_1 \leq \int_0^{2\pi} \left[\left\{ \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \prod_{i=1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{m}} \right\}^{\frac{q_2}{p_1 \gamma}} \right]^\gamma dx_2.$$

Далее, ввиду неравенства (1)

$$J_1 \leq \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \prod_{i=1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{p_1 \gamma m}} \right]^\gamma dx_2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\mu_1^{(1)}=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m^{(1)}=M_1}^{M_2} \sum_{\mu_1^{(2)}=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m^{(2)}=M_1}^{M_2} \dots \\
 &\dots \sum_{\mu_1^{(\gamma)}=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m^{(\gamma)}=M_1}^{M_2} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^m \prod_{i_k=1}^{\gamma} \left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{p_1 \gamma m}} dx_2.
 \end{aligned}$$

Обозначая $\gamma m = m_1$, получаем

$$J_1 \leq \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_{m_1}=M_1}^{M_2} \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{m_1} \left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{p_1 m_1}} dx_2.$$

Теперь очевидно, что дальнейшие оценки для J_1 в случаях 1) и 2) должны быть одинаковыми с той лишь разницей, что в случае 1) участвует число m , а в случае 2) — число m_1 . Поэтому оценки для J_1 проведем при $q_2/p_1 \leq 1$.

Оценим интеграл

$$\begin{aligned}
 J_2 &\equiv \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{m p_1}} dx_2 = \\
 &= \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{m(m-1)p_1}} \left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_j}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{m(m-1)p_1}} dx_2.
 \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{2}m(m-1)$, имеем

$$J_2 \leq \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right) \left(\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_j}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right) \right]^{\frac{q_2}{2p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{\mathcal{P}}}.$$

Применяя затем неравенство Гёльдера с показателями $\beta = \frac{q_2+p_2}{p_2}$ и $\beta_1 = \frac{q_2+p_2}{q_2}$, находим

$$\begin{aligned}
 J_2 &\leq \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{q_2 \beta}{2p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{\beta \mathcal{P}}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_j}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{q_2 \beta_1}{2p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{\beta_1 \mathcal{P}}} \equiv \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \lambda_i \hat{\lambda}_j. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Оценим λ_i и $\hat{\lambda}_j$. В силу неравенства Никольского имеем

$$\begin{aligned}
 \lambda_i &= \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^{\mu_i}}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{q_2 \beta}{2p_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{\beta \mathcal{P}}} = \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{p_1, \frac{q_2 \beta}{2}}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} \leq \\
 &\leq C_1 \left\{ \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{p_1, p_2} 2^{\mu_i(\frac{1}{p_2} - \frac{2}{\beta q_2})} \right\}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} = C_1 \left\{ \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{p_1, p_2} 2^{\mu_i(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} 2^{\mu_i(\frac{1}{q_2} - \frac{2}{\beta q_2})} \right\}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} = \\
 &= C_1 \left\{ \|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{p_1, p_2} 2^{\mu_i(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \right\}^{\frac{q_2}{2\mathcal{P}}} 2^{\mu_i(\frac{1}{2} - \frac{2}{\beta})\frac{1}{\mathcal{P}}}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_j &\leq C_2 \left\{ \|T_{\infty, 2^{\mu_j}}\|_{p_1, p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2} - \frac{2}{\beta_1 q_2})} \right\}^{\frac{q_2}{2\beta}} = C_2 \left\{ \|T_{\infty, 2^{\mu_j}}\|_{p_1 p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \right\}^{\frac{q_2}{2\beta}} 2^{\mu_j(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta_1})\frac{1}{\beta}} = \\ &= C_2 \left\{ \|T_{\infty, 2^{\mu_j}}\|_{p_1, p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \right\}^{\frac{q_2}{2\beta}} 2^{\mu_j(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{\beta})\frac{1}{\beta}} = C_2 \left\{ \|T_{\infty, 2^{\mu_j}}\|_{p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \right\}^{\frac{q_2}{2\beta}} 2^{-\mu_j(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta})\frac{1}{\beta}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от ν_k , ν_l .

Тогда, подставляя в соотношение (12) неравенства (13) и (14), получаем

$$J_2 \leq C_3 \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \left\{ \left[\|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{p_1, p_2} 2^{\mu_i(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \|T_{\infty, 2^{\mu_j}}\|_{p_1, p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \right]^{\frac{q_2}{2\beta}} 2^{(\mu_i - \mu_j)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta})\frac{1}{\beta}} \right\}.$$

Можно провести аналогичные рассуждения, меняя роль λ_i и $\widehat{\lambda}_j$. Тем самым приходим к неравенству

$$J_2 \leq C_3 \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^m \left\{ \left[\|T_{\infty, 2^{\mu_i}}\|_{p_1, p_2} 2^{\mu_i(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \|T_{\infty, 2^{\mu_j}}\|_{p_1, p_2} 2^{\mu_j(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \right]^{\frac{q_2}{2\beta}} 2^{-|\mu_i - \mu_j|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta})\frac{1}{\beta}} \right\}.$$

Отсюда на основании (11)

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C_3 \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^m \left\{ \|T_{\infty, 2^{\mu_k}}\|_{p_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \prod_{l=1}^m 2^{-|\mu_k - \mu_l|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta})\frac{1}{m-1}} \right\}^{\frac{1}{m}} = \\ &= C_3 \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \prod_{k=1}^m \left\{ \left[\|T_{\infty, 2^{\mu_k}}\|_{p_1, p_2} 2^{\mu_k(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \right]^{\frac{q_2}{m}} \prod_{l=1}^m 2^{-|\mu_k - \mu_l|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta})\frac{1}{2\beta}} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = m$, имеем

$$J_1 \leq C_3 \prod_{k=1}^m \left\{ \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \|T_{\infty, 2^{\mu_k}}\|_{p_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \prod_{l=1}^m 2^{-|\mu_k - \mu_l|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta})\frac{m}{2\beta}} \right\}^{\frac{1}{m}} \equiv C_3 \prod_{k=1}^m M_k^{\frac{1}{m}}. \quad (15)$$

Оценим

$$\begin{aligned} M_k &= \sum_{\mu_k=M_1}^{M_2} \|T_{\infty, 2^{\mu_k}}\|_{p_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \sum_{\mu_1=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_{k-1}=M_1}^{M_2} \sum_{\mu_{k+1}=M_1}^{M_2} \dots \sum_{\mu_m=M_1}^{M_2} \times \\ &\times \prod_{l=1}^m 2^{-|\mu_k - \mu_l|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta})\frac{1}{m-1}} = \sum_{\mu_k=M_1}^{M_2} \|T_{\infty, 2^{\mu_k}}\|_{p_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \left[\sum_{\mu=M_1}^{M_2} 2^{-|\mu_k - \mu|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta})\frac{1}{m-1}} \right]^{m-1} \leq \\ &\leq \sum_{\mu_k=M_1}^{M_2} \|T_{\infty, 2^{\mu_k}}\|_{p_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \left[\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 2^{-|\lambda|(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta})\frac{1}{m-1}} \right]^{m-1} \leq \\ &\leq C_4 \sum_{\mu_k=M_1}^{M_2} \|T_{\infty, 2^{\mu_k}}\|_{p_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})}. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, из (15), (16) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\mu=M_1}^{M_2} T_{\infty, 2^\mu} \right\|_{p_1, q_2} &\leq C_5 \left(\left\{ \prod_{k=1}^m \sum_{\mu_k=M_1}^{M_2} \|T_{\infty, 2^{\mu_k}}\|_{p_1, p_2}^{q_2} 2^{\mu_k q_2 (\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \right\}^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{q_2}} = \\ &= C_5 \left(\sum_{\mu=M_1}^{M_2} 2^{\mu q_2 (\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \|T_{\infty, 2^\mu}\|_{p_1, p_2}^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}. \end{aligned}$$

б) Пусть $1 \leq p_2 < q_2 = \infty$. В силу неравенства Никольского при $1 \leq p_1 < \infty$ получаем

$$\begin{aligned} J_1 = \left\| \sum_{\mu=M_1}^{M_2} T_{\infty, 2^\mu} \right\|_{p_1 \infty} &\leq \max_{0 \leq x_2 \leq 2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\mu=M_1}^{M_2} |T_{\infty, 2^\mu}(x_1, x_2)| \right)^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{1}{p_1}} \leq \\ &\leq \sum_{\mu=M_1}^{M_2} \max_{0 \leq x_2 \leq 2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |T_{\infty, 2^\mu}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{1}{p_1}} \leq C_1 \sum_{\mu=M_1}^{M_2} 2^{\mu \frac{1}{p_2}} \|T_{\infty, 2^\mu}\|_{p_1, p_2}. \end{aligned}$$

Доказательство при $p_1 = \infty$ проводится аналогично. $\square$

Теорема 4. Пусть функция $T_{2^{n_1}, 2^{n_2}}$ является тригонометрическим полиномом порядка 2^{n_1} по переменной x_1 и порядка 2^{n_2} по переменной x_2 , $1 \leq p_i < q_i \leq \infty$, $q_i^* = q_i$, если $q_i < \infty$, $q_i^* = 1$, если $q_i = \infty$ ($i = 1, 2$). Тогда

$$\left\| \sum_{n_2=M_1}^{M_2} \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1}, 2^{n_2}} \right\|_{q_1 q_2} \leq C \left(\sum_{n_2=M_1}^{M_2} 2^{n_2 q_2^* (\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \left(\sum_{n_1=N_1}^{N_2} 2^{n_1 q_1^* (\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \|T_{2^{n_1}, 2^{n_2}}\|_{p_1 p_2}^{q_1^*} \right)^{\frac{q_2^*}{q_1^*}} \right)^{\frac{1}{q_2^*}},$$

где постоянная C не зависит от N_1 , N_2 , M_1 , M_2 и $T_{2^{n_1}, 2^{n_2}}$.

Доказательство проведем на основании теорем 2 и 3.

Сначала применяем теорему 3 для $p_1 = q_1$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n_2=M_1}^{M_2} \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1}, 2^{n_2}} \right\|_{q_1 q_2} &= \left\| \sum_{n_2=M_1}^{M_2} \left\{ \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1}, 2^{n_2}} \right\} \right\|_{q_1 q_2} \leq \\ &\leq C_1 \left(\sum_{n_2=M_1}^{M_2} 2^{n_2 q_2^* (\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \left\| \left\{ \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1}, 2^{n_2}} \right\} \right\|_{q_1 p_2}^{q_1^*} \right)^{\frac{1}{q_2^*}}, \end{aligned}$$

затем к выражению $\left\| \left\{ \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1}, 2^{n_2}} \right\} \right\|_{q_1 p_2}^{q_1^*}$ применяем теорему 2:

$$\left\| \sum_{n_2=M_1}^{M_2} \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1}, 2^{n_2}} \right\|_{q_1 q_2} \leq C_2 \left(\sum_{n_2=M_1}^{M_2} 2^{n_2 q_2^* (\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \left(\sum_{n_1=N_1}^{N_2} 2^{n_1 q_1^* (\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \|T_{2^{n_1}, 2^{n_2}}\|_{p_1 p_2}^{q_1^*} \right)^{\frac{q_2^*}{q_1^*}} \right)^{\frac{1}{q_2^*}}.$$

$\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тиман М.Ф. Теория приближения функций действительного переменного (Физматгиз, М., 1960).
- [2] Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства (Ин. лит., М., 1948).
- [3] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения (Наука, М., 1975).
- [4] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения (Наука, М., 1977).

- [5] Унинский А.П. *Неравенства в смешанной норме для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени*: Матер. Всесоюз. симпозиума по теоремам вложения. Баку, 1966, с. 212–218.

Михаил Константинович Потапов

*Московский государственный университет,
ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,*

e-mail: mkpotapov@mail.ru

Борис Витальевич Симонов

*Волгоградский государственный технический университет,
пр. Ленина, д. 28, г. Волгоград, 400005, Россия,*

e-mail: simonov-b2002@yandex.ru

M.K. Potapov and B.V. Simonov

Nikolskii inequalities for trigonometric polynomes in different metrics

Abstract. S.M. Nikolskii inequalities for trigonometric polynomes in different metrics are well-known. We generalize the inequalities for the sums of trigonometric polynomes.

Keywords: Nikolskii inequality, metric, trigonometric polynomes.

Mikhail Konstantinovich Potapov

*Moscow State University,
GSP-1, Leninskiye Gory, Moscow, 119991 Russia,*

e-mail: mkpotapov@mail.ru

Boris Vital'evich Simonov

*Volgograd State Technical University,
28 Lenin Ave., Volgograd, 400005 Russia,*

e-mail: simonov-b2002@yandex.ru