Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Репин, Нелокальная задача с операторами Сайго для уравнения смешанного типа третьего порядка, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 1, 63–68

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-63-68>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 10:04:37

О.А. РЕПИН

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ОПЕРАТОРАМИ САЙГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация. Для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками исследована внутренне краевая задача с операторами Сайго. При различных значениях параметров обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, гипергеометрическая функция Гаусса, оператор Сайго, интегральное уравнение Фредгольма.

УДК: 517.953

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y, & y > 0; \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $m = \text{const} > 0$ в конечной области Ω , ограниченной отрезками AA_0 , BB_0 , A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно, и характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$.

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, $I \equiv AB$ — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y}^{(3,1)}(\Omega_1) \cap C_{x,y}^{(2,2)}(\Omega_2)$, $u_x \in C(\bar{\Omega}_1)$, являющуюся решением уравнения (1) при $y \neq 0$, удовлетворяющую условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (2)$$

$$A \left(I_{0+}^{a,b,b+2\beta-1} u[\Theta_0(t)] \right) (x) + B \left(I_{0+}^{a+\beta,b,b+\beta-1} u(t, 0) \right) (x) + \\ + C \left(I_{0+}^{a_1,a+b+\beta-a_1,b+\beta-1} u_y(t, 0) \right) (x) = g(x) \quad \forall x \in I, \quad (3)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow 0+} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1,$$

где a, b, β, a_1 — вещественные числа такие, что

$$a > \max\{-\beta, \beta - 1\}, \quad b > 0, \quad \beta = \frac{m}{2m+4}, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad a_1 > a + \beta + 1, \quad (4)$$

$A, B, C \geq 0$ — действительные числа, $g(x)$ и $\varphi_i(y)$ ($i = 1, 2, 3$) — заданные функции такие, что $g(x) \in C^1(\bar{I})$, $\varphi_i(y) \in C(\bar{I})$, $\Theta_0(x)$ — точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in I$ с характеристикой AC ;

$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ — оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования, введенный в [1] (см. также [2], с. 326–327; [3], с. 14) и при действительных α, β, η и $x > 0$, имеющих вид

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}) f(t) dt, & \alpha > 0; \\ (\frac{d}{dx})^n (I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x), & \alpha \leq 0, n = [-\alpha] + 1. \end{cases} \quad (5)$$

Отметим, что данная работа является продолжением исследований для уравнения (1), представленных в статье [4].

2. Единственность решения задачи.

Теорема. В области Ω не может существовать более одного решения задачи (1)–(3), если справедливы условия (4).

Доказательство. Пусть, как и принято,

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad \nu(x) = \lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y).$$

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow +0$, будем иметь функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на $\bar{I}$ из области Ω_1 :

$$\tau'''(x) - \nu(x) = 0.$$

Рассмотрим интеграл

$$I^* = \int_0^1 \tau(x) \nu(x) dx = \int_0^1 \tau(x) \tau'''(x) dx = \int_0^1 \tau(x) d(\tau''(x)).$$

Интегрируя последнее по частям и учитывая, что $\tau(0) = \tau(1) = 0$, получим

$$I^* = -\frac{[\tau'(1)]^2}{2} \leq 0.$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы $I^* \geq 0$.

Выпишем решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω_2 ([5], с. 152)

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt + \\ + \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} y \int_0^1 \nu \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt. \quad (6)$$

Используя (6) и (5), в работе [6] выписано

$$u[\Theta_0(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) \left(I_{0+}^{\beta, 0, \beta-1} \tau(t) \right) (x) - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) \left(I_{0+}^{1-\beta, 2\beta-1, \beta-1} \nu(t) \right) (x),$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Подставляя $u[\Theta_0(x)]$ в краевое условие (3), опираясь на полугрупповое свойство обобщенных операторов ([2], с. 327)

$$\left(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} (I_{0+}^{\gamma, \delta, \eta-\beta-\gamma-\delta} f)(t) \right) (x) = \left(I_{0+}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta-\gamma-\delta} f \right) (x), \quad \gamma > 0,$$

после некоторых преобразований получим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на $\bar{I}$ из гиперболической части Ω_2 смешанной области Ω

$$[A\gamma_1\Gamma(\beta) + B] \left(I_{0+}^{a+\beta, b, b+\beta-1} \tau(t) \right) (x) - A\gamma_2\Gamma(1-\beta) \left(I_{0+}^{a-\beta+1, b+2\beta-1, b-1+\beta} \nu(t) \right) (x) + \\ + C \left(I_{0+}^{a_1, a+b+\beta-a_1, b+\beta-1} \nu(t) \right) (x) = g(x). \quad (7)$$

Поддействуем на обе части равенства (7) оператором $I_{0+}^{-a-\beta, -b, a+b+2\beta-1} f$ и воспользуемся формулой

$$\left(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} (I_{0+}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta} f)(t) \right) (x) = \left(I_{0+}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta} f \right) (x), \quad \gamma > 0.$$

В результате вычислений будем иметь

$$\tau(x) = k_1 \left(I_{0+}^{1-2\beta} \nu(t) \right) (x) + k_2 \left(I_{0+}^{a_1-a-\beta} \nu(t) \right) (x) + \frac{1}{A\gamma_1\Gamma(\beta) + B} g_1(x), \quad (8)$$

где

$$k_1 = \frac{A\gamma_2\Gamma(1-\beta)}{A\gamma_1\Gamma(\beta) + B}, \quad k_2 = -\frac{C}{A\gamma_1\Gamma(\beta) + B}, \quad g_1(x) = \left(I_{0+}^{-a-\beta, -b, a+b+2\beta-1} g(t) \right) (x).$$

Полагая $g(x) = 0$, найдем оценку I^* при $y < 0$, записав (8) в виде

$$\tau(x) = \frac{k_1}{\Gamma(1-2\beta)} \int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta} dt + \frac{k_2}{\Gamma(a_1-a-\beta)} \int_0^x \nu(t)(x-t)^{a_1-a-\beta-1} dt. \quad (9)$$

Воспользуемся известной формулой ([7], с. 385)

$$\int_0^\infty s^{\mu-1} \cos(ks) ds = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu} \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) \quad (k > 0, \quad 0 < \mu < 1).$$

Полагая в первом слагаемом (9) $k = |x-t|$, $\mu = 2\beta$, а во втором $k = |x-t|$, $\mu = a+\beta+1-a_1$, будем иметь

$$|x-t|^{-2\beta} = \frac{1}{\Gamma(2\beta) \cos(\pi\beta)} \int_0^\infty s^{2\beta-1} \cos(s|x-t|) ds, \\ |x-t|^{a_1-a-\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(1+a+\beta-a_1) \cos\left(\frac{\pi(a+\beta+1-a_1)}{2}\right)} \int_0^\infty s^{a+\beta-a_1} \cos(s|x-t|) ds.$$

Применив эти формулы и формулу Дирихле перестановки порядка интегрирования в повторном интеграле, приходим к соотношению

$$I^* = \frac{k_1 \sin(\pi\beta)}{\pi} \int_0^\infty s^{2\beta-1} \left[\left(\int_0^1 \nu(x) \cos(sx) dx \right)^2 + \left(\int_0^1 \nu(x) \sin(sx) dx \right)^2 \right] ds + \\ + \frac{k_2 \sin \frac{\pi(a+\beta+1-a_1)}{2}}{\pi} \int_0^\infty s^{a+\beta-a_1} \left[\left(\int_0^1 \nu(x) \cos(sx) dx \right)^2 + \left(\int_0^1 \nu(x) \sin(sx) dx \right)^2 \right] ds.$$

Принимая во внимание неравенства (4), будем иметь $I^* \leq 0$. Тогда с учетом $I^* \geq 0$ из области Ω_1 , имеем $I^* = 0$. Так как слагаемые справа в соотношениях I^* неотрицательны, то они также равны нулю.

В частности,

$$\int_0^\infty s^{2\beta-1} ds \left(\int_0^1 \nu(x) \cos(sx) dx \right)^2 = \int_0^\infty s^{2\beta-1} ds \left(\int_0^1 \nu(x) \sin(sx) dx \right)^2 = 0.$$

Поскольку $s^{2\beta-1} \geq 0$, то

$$\int_0^1 \nu(x) \cos(sx) dx = \int_0^1 \nu(x) \sin(sx) dx = 0$$

для всех $s \in (0, \infty)$, в частности при $s = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. При этих значениях s функции $\sin(sx)$ и $\cos(sx)$ образуют полную ортогональную систему функций в L^2 . Следовательно, $\nu(x) = 0$ почти всюду, а так как $\nu(x)$ непрерывна по условию, то $\nu(x) = 0$ всюду.

При $g_1(x) = 0$ подставив в (8) $\nu(x) = 0$, получим $\tau(x) = 0$, отсюда $u(x, y) \equiv 0$ в Ω_2 как решение задачи Коши с нулевыми данными, а в Ω_1 как решение однородной задачи (1), (2), $u(x, 0) = 0$. $\square$

3. Существование решения задачи. Интегрируя равенство $\tau'''(x) = \nu(x)$ трижды от 0 до x и учитывая, что

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(1) = \varphi_2(0), \quad \tau'(x) = \varphi_3(0),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \tau(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-\xi)^2 \nu(\xi) d\xi - \frac{x^2}{2} \int_0^1 (1-\xi)^2 \nu(\xi) d\xi + \\ + \varphi_2(0)x^2 + (x-x^2)\varphi_3(0) + (1-x^2)\varphi_1(0). \end{aligned} \quad (10)$$

Исключив $\tau(x)$ из (8) и (10), получим

$$\begin{aligned} k_1(I_{0+}^{1-2\beta} \nu(t))(x) + k_2(I_{0+}^{a_1-a-\beta} \nu(t))(x) - \frac{1}{2} \int_0^x (x-\xi)^2 \nu(\xi) d\xi + \frac{x^2}{2} \int_0^1 (1-\xi)^2 \nu(\xi) d\xi = \\ = -\frac{1}{A\gamma_1\Gamma(\beta) + B} g_1(x) - [\varphi_2(0)x^2 + (x-x^2)\varphi_3(0) + (1-x^2)\varphi_1(0)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Поддействуем на обе части (11) оператором $D_{0+}^{1-2\beta}$. В результате простых преобразований перепишем (11) в виде

$$\begin{aligned} \nu(x) + \frac{k_2}{k_1} D_{0+}^{1-2\beta} (I_{0+}^{a_1-a-\beta} \nu(t))(x) - \\ - \frac{1}{k_1\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}} \left[\frac{1}{2} \int_0^\xi (\xi-t)^2 \nu(t) dt - \frac{\xi^2}{2} \int_0^1 (1-t)^2 \nu(t) dt \right] = \frac{1}{k_1} f_1(x), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) = -\frac{1}{A\gamma_1\Gamma(\beta) + B} D_{0+}^{1-2\beta} g_1(x) - \\ - \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x ([\varphi_2(0) - \varphi_3(0) - \varphi_1(0)]\xi^2 + \xi\varphi_3(0) + \varphi_1(0)) \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Преобразуем уравнение (12). Для этого рассмотрим интегралы, входящие в (12). Имеем

$$\begin{aligned} D_{0+}^{1-2\beta} (I_{0+}^{a_1-a-\beta} \nu(t))(x) &= \frac{1}{\Gamma(2\beta)\Gamma(a_1-a-\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}} \int_0^\xi \nu(t) (\xi-t)^{a_1-a-\beta-1} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\beta)\Gamma(a_1-a-\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{a_1-a+\beta-1} \nu(t) dt \int_0^1 z^{a_1-a-\beta-1} (1-z)^{2\beta-1} dz = \\ &= \frac{a_1-a+\beta-1}{\Gamma(a_1-a+\beta)} \int_0^x (x-t)^{a_1-a+\beta-1} \nu(t) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}} \int_0^\xi (\xi-t)^2 \nu(t) dt &= \frac{1}{2} B(3, 2\beta) \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2+2\beta} \nu(t) dt = \\ &= (1+2\beta) B(3, 2\beta) \int_0^x (x-t)^{1+2\beta} \nu(t) dt, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi^2 d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}} \int_0^1 (1-t)^2 \nu(t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 \nu(t) dt \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi^2 d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}} = \\ &= (1+\beta) B(3, 2\beta) x^{1+2\beta} \int_0^1 (1-t)^2 \nu(t) dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь исследуем гладкость правой части уравнения (12) $f_1(x)$. Для удобства чтения приведем две леммы, доказанные в работе [8].

Лемма 1. Пусть $0 < \alpha < \lambda < 1$, $\lambda - \alpha < 1$ и $\rho(x) = x^\mu$, где $0 \leq \mu < \lambda - \alpha + 1$. Если $\varphi(x) \in H_0(\rho; [0, 1])$, то $(D_{0+}^\alpha \varphi)(x) \in H_0^{\lambda-\alpha}(\rho; [0, 1])$.

Отметим, что

$$H_0^\lambda[0, 1] = \left\{ \varphi(x) \in H^\lambda[0, 1], \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \right\}.$$

Лемма 2. Пусть $0 < -\alpha < \lambda \leq 1$ и $\beta < \min[0, \eta + 1]$. Если $\varphi(x) \in H^\lambda[0, 1]$, то $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) \in H^{\min[\lambda+\alpha, -\beta]}[0, 1]$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} D_{0+}^{1-2\beta} g_1(x) &= \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g_1(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}}, \\ g_1(x) &= \left(I_{0+}^{-a-\beta, -b, a+b+2\beta-1} g(t) \right)(x), \quad g(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^3(I), \\ \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-2\beta}} &= x^{2\beta-1}, \quad \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}} = (1-2\beta) B(2, 2\beta) x^{2\beta}, \\ \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi^2 d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}} &= (2+2\beta) B(3, 2\beta) x^{1+2\beta}. \end{aligned}$$

Опираясь на леммы 1 и 2 и представленные соотношения, можем записать [4]

$$f_1(x) = x^{2\beta-1} f_1^*(x), \quad \text{где } f_1^*(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I).$$

Учитывая (14)–(16), запишем уравнение (12) в виде

$$\nu(x) + \int_0^1 K(x, t) \nu(t) dt = \frac{1}{k_1} f_1(x), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \begin{cases} k_1(x, t), & x \leq t; \\ k_2(x, t), & x \geq t, \end{cases} \\ k_1(x, t) &= \Phi(x, t) - \frac{k_2}{k_1} \frac{a_1 - a + \beta - 1}{\Gamma(a_1 - a + \beta)} (x-t)^{a_1-a+\beta-2} - \frac{(1+\beta) B(3, 2\beta)}{k_1 \Gamma(2\beta)} (x-t)^{1+2\beta}, \\ k_2(x, t) &= \Phi(x, t) = \frac{(1+\beta) B(3, 2\beta)}{k_1 \Gamma(2\beta)} x^{1+2\beta} (1-t)^2, \end{aligned}$$

$f_1(x)$ задается формулой (13).

Итак, уравнение (17) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре [9]. Оно безусловно разрешимо в требуемом классе функций на основании теоремы единственности. Зная $\nu(x)$, из (8) можно определить $\tau(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Saigo M. *A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function*, Math. Rep. Kyushu Univ. **11** (2), 135–143 (1978).
- [2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Наука и техника, Минск, 1987).
- [3] Репин О.А. *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов* (Саратовск. ун-т, 1992).
- [4] Репин О.А., Кумыкова С.К. *Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами*, Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-матем. науки, № 4(29), 17–25 (2012).
- [5] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа* (Наука, М., 1970).
- [6] Килбас А.А., Репин О.А. *Аналог задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной*, Дифференц. уравнения **39** (5), 638–644 (2003).
- [7] Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных* (Ин. лит., М., 1957).
- [8] Saigo M., Kilbas A.A. *Generalized fractional integrals and derivatives in Hölder spaces* In: Rusev P. (ed.) et al., Transform methods and special functions. Proc. 1-st internat. workshop, Bankya, Bulgaria, August 12–17, 1994. Sofia, SCT Publishing, 282–293 (1995).
- [9] Килбас А.А. *Интегральные уравнения: курс лекций* (Изд-во БГУ, Минск, 2005).

Олег Александрович Репин

Самарский государственный экономический университет,
ул. Советской Армии, д. 141, г. Самара, 443090 Россия,

e-mail: Matstat@mail.ru

O.A. Repin

Nonlocal problem with Saigo operators for mixed type equation of the third order

Abstract. For a third order equation with multiple characteristics we investigate a boundary-value problem with Saigo operators. We prove the unique solvability of the problem for various values of the parameters of generalized fractional integro-differentiation operators.

Keywords: boundary-value problem, the hypergeometric function of Gauss, Saigo operator, Fredholm integral equation.

Oleg Aleksandrovich Repin

Samara State Economic University,
141 Sovetskoi Armii str., Samara, 443090 Russia,

e-mail: Matstat@mail.ru