Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Х. Салихов, М. Г. Башмакова, О показателе иррациональности $\arctg \frac{1}{3}$, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 1, 69–75

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-69-75>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:12:18

В.Х. САЛИХОВ, М.Г. БАШМАКОВА

О ПОКАЗАТЕЛЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ $\arctg \frac{1}{3}$

Аннотация. Исследуются арифметические свойства значения $\arctg \frac{1}{3}$. Построена специализированная интегральная конструкция для оценки меры иррациональности данного числа, использующая свойство симметричности. Исследована линейная форма, возникающая на основе данного интеграла. Доказана оценка для показателя иррациональности числа $\arctg \frac{1}{3}$, улучшающая предыдущий результат.

Ключевые слова: мера иррациональности, линейная форма.

УДК: 511.36

ВВЕДЕНИЕ

Для каждого иррационального числа можно оценить качество его приближения рациональными числами с помощью характеристики, называемой мерой иррациональности. Для произвольного иррационального числа γ мера (показатель) иррациональности $\mu(\gamma)$ определяется как нижняя граница чисел μ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $q_0(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство $|\gamma - \frac{p}{q}| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$ выполняется для всех целых чисел p, q при $q \geq q_0(\varepsilon)$. Точное значение этого показателя известно лишь для немногих чисел, для большинства известны только оценки сверху, уточнение которых является одной из постоянно исследуемых проблем теории чисел.

Для получения оценок конструируются рациональные приближения рассматриваемых значений. Обычно для этого используются различные однократные и многократные вещественные и комплексные интегралы, дающие функциональные приближения исследуемых величин. Чем лучшее приближение удастся построить, тем лучшую оценку можно получить. В последние десятилетия в этой области было получено много значительных результатов, например, улучшены оценки для $\ln 2$, $\ln 3$, π . В настоящее время для исследования активно используются интегральные конструкции, обладающие свойством симметричности относительно какой-либо замены параметров.

Впервые интегральная конструкция, качественно использующая свойство симметричности, была применена В.Х. Салиховым в работе [1] и позволила улучшить оценку для $\ln 3$. В дальнейшем с помощью применения симметричных интегралов различного типа был получен ряд новых результатов, например, для значений логарифмической функции. В 2014 г. К. Ву и Л. Ванг несколько улучшили оценку для $\ln 3$, предложив новый тип симметричной интегральной конструкции [2]. В настоящее время эта идея развивается и применяется

Поступила в редакцию 20.11.2017. После доработки 20.11.2017. Принята к публикации 22.03.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 18-01-00296А.

для других чисел. В данной работе также будет использован подобный интеграл, имеющий свойство симметричности.

1. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Мера иррациональности значений функции $\operatorname{arctg} x$ оценивалась неоднократно, в основном общими методами. Первые конкретные результаты были получены в 1987 г. М. Хуттнером [3], он доказал общую теорему об оценках мер иррациональности значений гипергеометрической функции Гаусса вида $F_2^1(1, \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k} | \varepsilon x^k)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\varepsilon = \pm 1$. Позже, в работах Т. Матала-Ахо, А. Хеймонена и К. Ваананена [4], [5] был построен метод, использовавший приближение гипергеометрической функции полиномами Якоби, и также позволявший получать оценки для значений вида $F_2^1(1, \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k} | z)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $z \in \mathbb{R}$, в частности, для чисел $F_2^1(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | -z^2) = \frac{1}{z} \operatorname{arctg} z$. В [5] был приведен ряд конкретных оценок, послуживших отправной точкой для дальнейших исследований. Многие из этих результатов были впоследствии улучшены, так, в работе [6] был применен метод, использовавший симметризованный комплексный интеграл, и позволявший оценивать значения $\operatorname{arctg} \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Данный подход, в частности, дал результат $\mu(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}) \leq 6.635 \dots$. Это значение было усилено в [7] при помощи интегральной конструкции, использующей симметричность другого вида, и составило $\mu(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}) \leq 6.199 \dots$. Основным результатом данной работы является

Теорема. *Справедлива оценка $\mu(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}) \leq 6.096755 \dots$.*

Для получения этой оценки в дальнейшем будет использоваться стандартный прием, использующий подход, впервые сформулированный в работе М. Хата [8].

Лемма 1 ([8], лемма 2.1). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ иррационально, $l_n = g_n \gamma + p_n$, где $g_n, p_n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |l_n| = \delta$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |g_n| \leq -\tau$, $\tau > 0$, тогда $\mu(\gamma) \leq 1 + \frac{\delta}{\tau}$.*

Позже, в [9] было доказано более общее утверждение, но для получения результата данной работы достаточно приведенного выше. Необходимая для получения оценки линейная форма будет построена на основе интеграла вида

$$Y(\bar{\alpha}) = \frac{1}{i} \int_3^{3+i} \frac{\prod_{j=0}^k P_j(x)^{\alpha_j n} dx}{x^{n+1} (6-x)^{n+1}}, \quad (1)$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j n \in \mathbb{N}$, $j = 0, \dots, k$, $P_j(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами вида $P_j(x) = \tilde{P}_j((x-3)^2)$. Симметричность относительно точки $x = 3$ является главной особенностью, позволившей получить новый результат. Интегральная конструкция подобного вида впервые была использована в работе [2]. Выбор многочленов в числителе подинтегральной функции (1) является основным фактором, определяющим свойства интеграла. Используемые многочлены должны как улучшать асимптотику интеграла, так и давать необходимые сокращения простых чисел, входящих в коэффициенты линейной формы.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО УТВЕРЖДЕНИЯ

Введем необходимые обозначения. Пусть $A \in \mathbb{N}$, $B \in \mathbb{Z}^+$ при $B \neq 0$, $(A, B) = 1$. Рассмотрим $t = (x-d)^2$, где $d = 3$, и многочлены вида

$$\tilde{P}(t) = At + B = A(x-d)^2 + B = P(x). \quad (2)$$

Ясно, что $P(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$, где $A_2 = A$, $A_1 = -2Ad$, $A_0 = Ad^2 + B$.

Определим для любой несократимой дроби $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{N}$, показатель $\nu_p(\frac{a}{b}) = \nu_p$ для простого числа p так, что $\frac{a}{b} = p^{\nu_p} \frac{a_1}{b_1}$, $(a_1, b_1) = 1$, $(a_1, p) = 1$, $(b_1, p) = 1$.

Теперь для каждого многочлена $\tilde{P}(t)$ вида (2) определим величину $\nu_p(\tilde{P}(t))$ при $p = 2, 3, 5$: $\nu_2(\tilde{P}(t)) = \min(2; \nu_2(A_0))$, $\nu_3(\tilde{P}(t)) = \min(2; \nu_3(A_0))$, $\nu_5(\tilde{P}(t)) = \min(1; \nu_5(A_0))$.

Для любой аналитической в точке $x = 0$ функции $f(x)$ обозначим $D_0(f(x)) = f(0)$, $D_N(f(x)) = \frac{f^{(N)}(0)}{N!}$, $N \in \mathbb{N}$, — дифференцирование Лейбница.

Лемма 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{Z}^+$, $N \leq 2m$. Тогда для $p = 2, 3, 5$ выполняются следующие оценки: $\nu_p(D_N(P^m)) \geq m\nu_p(P) - N$.

Доказательство. Имеем $P^m(x) = \sum_{\substack{|\overline{m}|=m \\ m_1+2m_2=N}} \gamma(\overline{m}) A_0^{m_0} A_1^{m_1} A_2^{m_2} x^{m_1+2m_2}$, где $|\overline{m}| = m_0 + m_1 + m_2$; $m_j \in \mathbb{Z}^+$, $j = 0, 1, 2$, $\gamma(\overline{m}) = \frac{m!}{m_0!m_1!m_2!} \in \mathbb{N}$. Тогда

$$D_N(P^m(x)) = \sum_{\substack{|\overline{m}|=m \\ m_1+2m_2=N}} \gamma(\overline{m}) A_0^{m_0} \overline{A}_3 d^{m_1} 2^{m_1}, \overline{A}_3 = (-1)^{m_1} A^{m_1+m_2}.$$

При $p = 2$

$$\begin{aligned} \nu_2(D_N(P^m(t))) &\geq m_0\nu_2(A_0) + m_1 = (m_0\nu_2(A_0) + 2m_1 + 2m_2) - 2m_1 - 2m_2 + m_1 \geq \\ &\geq \nu_2(P)(m_0 + m_1 + m_2) - (2m_2 + m_1) = m\nu_2(P) - N. \end{aligned}$$

Аналогично, при $p = 3$

$$\nu_3(D_N(P^m(t))) \geq m_0\nu_3(A_0) + m_1 \geq \nu_3(P)(m_0 + m_1 + m_2) - (2m_2 + m_1) = m\nu_3(P) - N.$$

При $p = 5$

$$\begin{aligned} \nu_5(D_N(P^m(t))) &\geq m_0\nu_5(A_0) = (m_0\nu_5(A_0) + m_2 + m_1) - (m_2 + m_1) \geq \nu_5(P)(m_0 + m_1 + m_2) - \\ &- m_1 - m_2 \geq m\nu_5(P) - N. \quad \square \end{aligned}$$

Перейдем к построению основной конструкции. Рассмотрим многочлены вида (2)

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(t) &= t = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \equiv P_0(x), \\ \tilde{P}_1(t) &= t + 1 = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10 \equiv P_1(x), \\ \tilde{P}_2(t) &= 19t + 9 = 19(x^2 - 6x) + 180 \equiv P_2(x), \\ \tilde{P}_3(t) &= 11t + 9 = 11(x^2 - 6x) + 108 \equiv P_3(x), \\ \tilde{P}_4(t) &= 13t + 3 = 13(x^2 - 6x) + 120 \equiv P_4(x), \\ \tilde{P}_5(t) &= 37t + 27 = 37(x^2 - 6x) + 360 \equiv P_5(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Интеграл (1) примет вид

$$\begin{aligned} Y(\overline{\alpha}) &= \frac{1}{i} \int_3^{3+i} R(x, \overline{\alpha}) dx = \\ &= \frac{1}{i} \int_3^{3+i} \frac{(P_0(x))^{\alpha_0 n} (P_1(x))^{\alpha_1 n} (P_2(x))^{\alpha_2 n} (P_3(x))^{\alpha_3 n} (P_4(x))^{\alpha_4 n} (P_5(x))^{\alpha_5 n} dx}{x^{n+1} (6-x)^{n+1}}, \end{aligned}$$

где $\alpha_j n \in \mathbb{N}$, $j = 0, \dots, 5$.

Имеем

$$Y(\bar{\alpha}) = \left[\begin{array}{l} t = (x-3)^2, \quad x(6-x) = 9-t \\ dt = 2(x-3)dx, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ x = 3, \quad t = 0; \quad x = 3+i, \quad t = -1 \end{array} \right] = \\ = \frac{1}{i} \int_0^{-1} \frac{t^{\alpha_0 n} (1+t)^{\alpha_1 n} (19t+9)^{\alpha_2 n} (11t+9)^{\alpha_3 n} (13t+3)^{\alpha_4 n} (37t+27)^{\alpha_5 n} dt}{2\sqrt{t}(9-t)^{n+1}}.$$

Обозначим $g(t, \bar{\alpha}) = \frac{t^{\alpha_0} (1+t)^{\alpha_1} (19t+9)^{\alpha_2} (11t+9)^{\alpha_3} (13t+3)^{\alpha_4} (37t+27)^{\alpha_5}}{(9-t)^n}$, тогда

$$Y(\bar{\alpha}) = \frac{1}{i} \int_0^{-1} \frac{1}{2\sqrt{t}(9-t)} (g(t, \bar{\alpha}))^n dt. \quad (4)$$

Возьмем $\alpha_0 = 0.58519$, $\alpha_1 = 0.58173$, $\alpha_2 = 0.38987$, $\alpha_3 = 0.00050$, $\alpha_4 = 0.00792$, $\alpha_5 = 0.02048$, n — натуральное число, кратное 10^5 .

Подинтегральная функция $R(x, \bar{\alpha})$ симметрична относительно точки $x = 3$, следовательно, ее разложение на сумму простейших дробей имеет вид $R(x, \bar{\alpha}) = P_m(x) + \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(6-x)^j} \right)$,

где $m = 2n \sum_{j=0}^5 \alpha_j - 2n - 2$ и $P_m(x) = b_m x^m + \dots + b_0$, $b_j \in \mathbb{Z}[x]$.

Тогда

$$\frac{1}{i} \int_3^{3+i} R(x, \bar{\alpha}) dx = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{j+1} x^{j+1} \Big|_3^{3+i} + A_1 \arctg \frac{1}{3} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{-j+1} \left(\frac{1}{x^{j-1}} - \frac{1}{(6-x)^{j-1}} \right) \Big|_3^{3+i},$$

т. е.

$$\frac{1}{i} \int_3^{3+i} R(x, \bar{\alpha}) dx = \sum_{j=0}^m \frac{\tilde{b}_j}{j+1} + A_1 \arctg \frac{1}{3} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{-j+1} \frac{\tilde{c}_j}{2^{j-1} 5^{j-1}}, \quad (5)$$

где $A_1 = 2a_1$, $\tilde{b}_j, \tilde{c}_j \in \mathbb{Z}$.

Лемма 3. Для любого $j=1, \dots, n+1$ справедливо представление $a_j = 2^{-0.58073n+j-2} 3^{j-2} 5^{j-1} M_j$, $M_j \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Введем обозначение $\Pi_k = \prod_{j=1}^3 p_j^{\gamma_{p_j}(\tilde{P}_k(t))}$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$. В соответствии с определением (3) многочленов $\tilde{P}_k(t)$ имеем

$$\Pi_0 = 3^2, \quad \Pi_1 = 2^1 \cdot 5^1, \quad \Pi_2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1, \quad \Pi_3 = 3^2 \cdot 2^2, \quad \Pi_4 = 3 \cdot 5 \cdot 2^2, \quad \Pi_5 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5.$$

Найдем коэффициенты a_j . Рассмотрим $\overline{m} = \{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$,

$|\overline{m}| = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$, тогда

$$a_j = D_{n+1-j}(x^{n+1} R(x)) = \sum_{|\overline{m}|=n+1-j} \prod_{k=0}^5 D_{m_k}(P_k(x))^{\alpha_k n} \cdot D_{m_6}(6-x)^{-n-1}.$$

Очевидно, $D_{m_6}(6-x)^{-n-1} = \binom{n+m_6}{m_6} 2^{-n-m_6-1} 3^{-n-m_6-1}$. Тогда в силу леммы 2

$$\begin{aligned} \nu_2(\alpha_j) &\geq \alpha_1 n - m_1 + 2\alpha_2 n - m_2 + 2\alpha_3 n - m_3 + 2\alpha_4 n - m_4 + 2\alpha_5 n - m_5 - n - m_6 - 1 = \\ &= n(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5) - m_1 - m_2 - m_3 - m_4 - m_5 - m_6 - 1 \geq \\ &\geq n(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5) - 2n - 2 + j = 1.41927n - 2n - 2 + j = -0.58073n - 2 + j \end{aligned}$$

при заданных значениях параметров α_k .

Аналогично,

$$\begin{aligned}\nu_3(\alpha_j) &\geq 2\alpha_0n - m_0 + 2\alpha_2n - m_2 + 2\alpha_3n - m_3 + \alpha_4n - m_4 + 2\alpha_5n - m_5 - n - m_6 - 1 = \\ &= n(2\alpha_0 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5) - m_1 - m_2 - m_3 - m_4 - m_5 - m_6 - n - 1 \geq \\ &\geq 2n - 2n - 2 + j = j - 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_5(\alpha_j) &\geq a_1n - m_1 + \alpha_2n - m_2 + \alpha_4n - m_4 + \alpha_5n - m_5 \geq n(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5) - \\ &- (n + 1 - j) = j - 1. \quad \square\end{aligned}$$

Перейдем к доказательству заявленной в теореме оценки.

Доказательство. Обозначим $d_N = \text{НОК}\{1, \dots, N\}$. Ясно, что $\frac{1}{j+1}d_N \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, N - 1$.

Так как $m = 2n \sum_{j=0}^5 \alpha_j - 2n - 2 = 1.17138n - 2 > n + 1$, то из представления (5) и леммы 3 имеем

$$2^2 3^2 5 d_{1.17138n} 2^{0.58073n} Y(\bar{\alpha}) = \tilde{A} \arctg \frac{1}{3} + \tilde{B}, \quad \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{Z}.$$

Используем для полученной линейной формы лемму 1. Оценим асимптотику коэффициентов.

Интеграл в левой части равенства приводится к виду (4), его асимптотика может быть исследована при помощи метода Лапласа. Максимальное значение подинтегральной функции $g(t, \bar{\alpha})$ на отрезке $[-1, 0]$ достигается в точке $t_0 = -0.7685514\dots$, $\ln |g(t_0, \bar{\alpha})| = -2.5901773\dots$. Тогда в силу $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln d_{mn} = m$ получим

$$-\tau = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln d_{1.17138n} 2^{0.58073n} Y(\bar{\alpha}) = 1.17138 + 0.58073 \cdot \ln 2 - 2.5901773 \dots = -1.016266\dots$$

Асимптотика старшего коэффициента $\tilde{A} = 2^2 3^2 5 d_{1.17138n} 2^{0.58073n} A_1$ может быть оценена с помощью метода перевала. Процедура оценивания хорошо известна и применяется постоянно при оценке подобных линейных форм (например, [7]), опуская подробности, получим точку перевала

$$t_1 = 25.197915\dots, \quad \ln |g(t_1 \bar{\alpha})| = 3.6057478\dots$$

Тогда

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln d_{1.17138n} 2^{0.58073n} A_1 = 1.171038 + 0.58073 \cdot \ln 2 + 3.6057478\dots = 5.179659\dots$$

Соответственно, по лемме 1 получаем $\mu(\arctg \frac{1}{3}) \leq \frac{\delta}{\tau} + 1 = 6.096755\dots$, что и требовалось. $\square$

Отметим, что многочлены $P_0(x)$, $P_1(x)$ обеспечивают равенство функции нулю в крайних точках отрезка, а остальные многочлены должны выбираться таким образом, чтобы входящие в свободный член простые множители компенсировали множители, возникающие в знаменателях коэффициентов a_j . Кроме того, выбираемые многочлены должны обеспечивать малость подинтегральной функции на отрезке интегрирования, стандартным образом улучшая свойства коэффициентов линейной формы.

Следует заметить, что даже более простой вариант данного интеграла

$$\begin{aligned} Y_1(\bar{\alpha}) &= \frac{1}{i} \int_3^{3+i} R_1(x, \bar{\alpha}) = \frac{1}{i} \int_3^{3+i} \frac{(P_0(x))^{\alpha_0 n} (P_1(x))^{\alpha_1 n} (P_2(x))^{\alpha_2 n} (P_3(x))^{\alpha_3 n} dx}{x^{n+1} (6-x)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{i} \int_3^{3+i} \frac{((x-3)^2)^{\alpha_0 n} ((x-3)^2 + 1)^{\alpha_1 n} (19(x-3)^2 + 9)^{\alpha_2 n} (11(x-3)^2 + 9)^{\alpha_3 n} dx}{x^{n+1} (6-x)^{n+1}} \end{aligned}$$

при $\alpha_0 = 0.56041$, $\alpha_1 = 0.57005$, $\alpha_2 = 0.42995$, $\alpha_3 = 0.00964$ позволяет получить оценку $\mu(\arctg \frac{1}{3}) \leq 6.1467\dots$, что уже несколько лучше предыдущего известного результата. Дополнительно введенные многочлены $P_4(x)$, $P_5(x)$ служат уменьшению подинтегральной функции.

Поиск оптимальных параметров, как обычно в таких случаях, осуществлялся с помощью компьютерной программы.

Предыдущие исследования, в которых были получены оценки показателя иррациональности значений функции $\arctg x$, в основном использовали обобщенные подходы. В работах [4], [6], [7] и др. использовались общие интегральные конструкции, позволяющие найти результаты для целого класса значений. Некоторые из этих результатов оказывались лучше, а некоторые – хуже уже известных. Интеграл, рассмотренный в данной работе, сконструирован для единственного значения функции и не может быть эффективно обобщен, поскольку выбор многочленов для каждого отдельного значения будет абсолютно различен. Как и во многих случаях, в которых было достигнуто усиление оценки [2], [10], [11], конкретный интеграл, построенный именно для данной задачи, дает лучший результат, поскольку наилучшим образом учитывает ее свойства.

В настоящее время область теории чисел, связанная с построением оценок показателя иррациональности, активно исследуется научными школами разных стран, что подтверждает интерес к этой проблеме. Увеличение мощностей современной вычислительной техники открыло новые возможности исследований в этой области, и, вероятно, в скором времени можно ожидать других интересных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Салихов В.Х. *О мере иррациональности $\ln 3$* , Докл. РАН **417** (6), 753–755 (2007).
- [2] Wu Q., Wang L. *On the irrationality measure of $\log 3$* , J. Number Theory **142**, 264–273 (2014).
- [3] Huttner M. *Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques*, J. Number Theory **26**, 166–178 (1987).
- [4] Heimonen A., Matala-Aho T., Väänänen K. *On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function*, Manuscripta Math. **81** (1–2), 183–202 (1993).
- [5] Heimonen A., Matala-Aho T., Väänänen K. *An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures*, Bull. Austral. Math. Soc. **50** (2), 225–243 (1994).
- [6] Томашевская Е.Б. *О мере иррациональности числа $\ln 5 + \pi/2$ и некоторых других чисел*, Чебышевск. сб. **8** (2), 97–108 (2007).
- [7] Башмакова М.Г. *О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями*, Матем. заметки **88** (6), 785–797 (2010).
- [8] Hata M. *Rational approximation to π and some other numbers*, Acta Arith. **63** (4), 335–349 (1993).
- [9] Wu Q. *On the linear independence measure of logarithms of rational numbers*, Math. Comput. **72** (242), 901–911 (2002).
- [10] Салихов В.Х. *О мере иррациональности числа π* , УМН **63** (3), 163–164 (2008).
- [11] Marcovocchio R. *The Rhin–Viola method for $\ln 2$* , Acta Arith. **139** (2), 147–184 (2009).

Владислав Хасанович Салихов

*Брянский государственный технический университет,
бульвар 50-летия Октября, д. 7, г. Брянск, 241035, Россия,*

e-mail: svdh@ramber.ru

Мария Геннадьевна Башмакова

*Брянский государственный технический университет,
бульвар 50-летия Октября, д. 7, г. Брянск, 241035, Россия,*

e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru

V.Kh. Salikhov and M.G. Bashmakova

On irrationality measure $\arctg \frac{1}{3}$

Abstract. We investigate the arithmetic properties of the value $\arctg \frac{1}{3}$. We elaborate special integral construction with the property of symmetry for evaluating irrationality measure of this number. We research linear form, generated by this integral, and prove a new result for extent of the irrationality of $\arctg \frac{1}{3}$, which improves the previous one.

Keywords: irrationality measure, linear form.

Vladislav Khasanovich Salikhov

*Bryansk State Technical University,
7 50-letiya Oktyabrya blvd., Bryansk, 241035 Russia,*

e-mail: svdh@ramber.ru

Mariya Gennad'evna Bashmakova

*Bryansk State Technical University,
7 50-letiya Oktyabrya blvd., Bryansk, 241035 Russia,*

e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru