Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Темиргалиев, А. Ж. Жубанышева, Компьютерный (вычислительный) попечник в контексте общей теории восстановления, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 1, 89–97

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-89-97>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:47:59

Краткое сообщение

Н. ТЕМИРГАЛИЕВ, А.Ж. ЖУБАНЫШЕВА

**КОМПЬЮТЕРНЫЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ) ПОПЕРЕЧНИК
В КОНТЕКСТЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ**

Аннотация. Обсуждается К(В)П-постановка, состоящая из известного и в течении десятилетий разрабатываемого К(В)П-1, которую можно и должно воспринимать как количественную постановку теории приближений и вычислительной математики, что вместе с новыми продолжениями К(В)П-2, К(В)П-3 в совокупности предлагается как естественная теоретическая и вычислительная схема дальнейшего развития численного анализа.

Ключевые слова: компьютерный (вычислительный) поперечник, теория приближений в количественной постановке, вычислительная математика, восстановление по точной и неточной информации, предельная погрешность, новая схема численного анализа.

УДК: 519.6

Во времена стремительно надвигающейся четвертой промышленной революции, вызванной развитием компьютерных технологий, особую значимость приобретают методы оптимальной обработки информации на вычислительных средствах в математических моделях.

Математическим эквивалентом этого является предложенный в 1996 г. [1] и сразу же поддержанный академиком АН СССР и России С.М. Никольским представлением в Доклады РАН *компьютерный (вычислительный) поперечник* (К(В)П), смысл которого состоит в, надеемся, новом осмыслении теории приближений, вычислительной математики и, в целом, численного анализа.

О том, как новые идеи и подходы очень трудно приживаются в науке можно проследить на примере, когда совершенно прозрачная идея 1936 г. А.Н. Колмогорова [2] с подтверждающим иллюстративным результатом в модельной ситуации о поиске оптимального подпространства заданной размерности спустя восемнадцать лет была осознана и в математический обиход в качестве элитного направления введена С.Б. Стечкиным [3]. Тем же, но только в случае К(В)П, фактическим продолжением [2], объясняется данная статья.

В К(В)П начальным является определение

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; D_N)_Y \equiv \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N \left(\varepsilon_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N \right) \right)_Y, \quad (1)$$

где

$$\delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y \equiv$$

Поступила в редакцию 26.09.2017. После доработки 17.07.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, гранты №№ AP05136219, AP05132938.

$$\equiv \sup_{\substack{f \in F \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 (\tau=1, \dots, N)}} \|Tf(\cdot) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)}; \cdot)\|_Y.$$

Здесь *математическая модель* задается посредством оператора $T : F \mapsto Y$, где X и Y — нормированные пространства функций, заданных соответственно на Ω_X и Ω_Y , $F \subset X$ — класс функций. Числовая информация $l^{(N)} \equiv l^{(N)}(f) = (l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f))$ объема $N = 1, 2, \dots$ об f из класса F снимается с определенных на нем линейных функционалов $l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}$ (в общем случае не обязательно линейных). *Алгоритм переработки информации* $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; \cdot) : C^N \times \Omega_Y \mapsto C$ есть соответствие, которое при всяком фиксированном $(z_1, \dots, z_N) \in C^N$ как функция от $(\cdot)$ есть элемент Y . Запись $\varphi_N \in Y$ означает, что φ_N удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, а $\{\varphi_N\}_Y$ — множество, составленное из всех $\varphi_N \in Y$. Далее $(l^{(N)}, \varphi_N)$ есть *вычислительный агрегат* восстановления по точной информации для функции $f \in F$, действующий по правилу $\varphi_N(l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}; \cdot)$.

Восстановление $T(f)$ по неточной информации проводится следующим образом. Сначала задаются границы неточности — вектор $\varepsilon_N = (\varepsilon_N^{(1)}, \dots, \varepsilon_N^{(N)})$ с неотрицательными компонентами. Затем точные значения $l_N^{(\tau)}(f)$ заменяются с заданной точностью $\varepsilon_N^{(\tau)} \geq 0$ на приближенные значения $z_\tau \equiv z_\tau(f)$, $|z_\tau - l_N^{(\tau)}(f)| \leq \varepsilon_N^{(\tau)}$ ($\tau = 1, \dots, N$), числа $z_\tau \equiv z_\tau(f)$ ($\tau = 1, \dots, N$) перерабатываются посредством алгоритма φ_N до функции $\varphi_N(z_1(f), \dots, z_N(f); \cdot)$, которая и будет составлять вычислительный агрегат $(l^{(N)}, \varphi_N) \equiv \varphi_N(z_1(f), \dots, z_N(f); \cdot)$, построенный по информации точности $\varepsilon_N = (\varepsilon_N^{(1)}, \dots, \varepsilon_N^{(N)})$.

Пусть $D_N \equiv D_N(F)_Y$ — данный набор комплексов $(l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}; \varphi_N) \equiv (l^{(N)}, \varphi_N)$, подчеркнем, операторов восстановления “по точной информации”.

Записи $A \ll B$ ($B \geq 0$) и $A \asymp B$, ($A, B \geq 0$) для $A \equiv \{A_n\}$ и $B \equiv \{B_n\}$ соответственно означают $|A_n| \leq cB_n$ ($c > 0$, $n = 1, 2, \dots$) и одновременное выполнение $A \ll B$ и $B \ll A$.

Величину (1) будем называть “*информативной мощностью набора вычислительных агрегатов (комплексов) $D_N \equiv D_N(F)_Y$ точности $\varepsilon_N = (\varepsilon_N^{(1)}, \dots, \varepsilon_N^{(N)})$* ” (сокращенно “*вычислительный агрегат $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N) \in D_N$ поддерживает оценку снизу $\vartheta_N \ll \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$* ”, если выполнено неравенство $\delta_N(0; T; F; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y \ll \vartheta_N$).

В рамках приведенных обозначений и определений проблема оптимального восстановления по неточной информации, оформленная под названием “*компьютерный (вычислительный) перечень*”, заключается в собирательном смысле последовательном решении нижеследующих трех задач: К(В)П-1, К(В)П-2 и К(В)П-3.

При заданных T, F, Y, D_N (фиксированных всюду по последующему контексту):

К(В)П-1: находится порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y \equiv \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$ — *информативная мощность набора вычислительных агрегатов $D_N \equiv D_N(F)_Y$* с построением конкретного вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ из $D_N \equiv D_N(F)_Y$, поддерживающего порядок

$$\asymp \delta_N(0; D_N)_Y;$$

К(В)П-2: для $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ исследуется задача существования и нахождения последовательности $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N(D_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y \equiv (\tilde{\varepsilon}_N^{(1)}, \dots, \tilde{\varepsilon}_N^{(N)})$ с неотрицательными компонентами

К(В)П-2-предельной погрешности (соответствующей оптимальному вычислительному агрегату $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$) такой, что

$$\begin{aligned} \delta_N(0; D_N)_Y &\asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y \equiv \\ &\equiv \sup\{\|Tf(\cdot) - \bar{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; \cdot)\|_Y : f \in F, |\bar{l}_\tau(f) - z_\tau| \leq \tilde{\varepsilon}_N^{(\tau)}(\tau = 1, \dots, N)\}, \end{aligned}$$

с одновременным выполнением выражения

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty) : \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \delta_N(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty;$$

К(В)П-3: устанавливается *массивность* предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N \left(D_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N) \right)_Y$: находится как можно большое множество $M_N \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N \right)$ из D_N (обычно связанное со структурой исходного $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$) вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N)$, построенных по функционалам $l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}$ (в общей постановке не обязательно линейным), таких, что для каждого из них выполнено

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty) : \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \delta_N(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty.$$

Если окажется, что в К(В)П-1 экстремальных вычислительных агрегатов будет больше одного, то по каждому из них проводится К(В)П-2, К(В)П-3 анализ, поскольку их вычислительные качества определяются не только по величине предельной погрешности, но и по приспособленности структуры вычислительного агрегата к особенностям объекта применения.

Приведем краткий анализ постановок К(В)П-1, К(В)П-2, К(В)П-3 в контексте развитой до настоящего времени общей теории восстановления. Сама величина $\delta_N(0; T, F, D_N)_Y$ была определена десятилетия тому назад, причем вряд ли можно установить первого из авторов в этом ряду. Особо отметим, что несмотря на большое количество работ, здесь не установились единые обозначения и терминология. В обоснование приведем несколько формулировок (разумеется, в своих обозначениях, смысл которых можно восстановить по текстам статей):

— К.Ю. Осипенко [4], 1976 г.: “погрешностью данного метода естественно назвать величину $r_n(S) = \sup_{x \in W} |L(x) - S(l_1(x), \dots, l_n(x))|$. Назовем метод $S_0(l_1(x), \dots, l_n(x))$ наилучшим методом приближения, если имеет место равенство $r_n(S_0) = \inf_S r_n(S)$ ”,

— С. Хенрик [5], 1993 год: “погрешность приближения $A \in A_n(\Lambda)$ оператора S определяется как $e(S, A) = \sup_{x \in X_0} \|S(x) - A(x)\|$, n -я минимальная детерминистическая ошибка определяется как $e_n^{\det}(S, \Lambda) = \inf_{A \in A_{n-1}(\Lambda)} e(S, A)$ ”.

В наших обозначениях особо подчеркнем роль D_N — множества вычислительных агрегатов, различные конкретизации которого обеспечивают получение практически всех изучаемых в теории приближений и численном анализе задач, что, по-видимому, ранее в должной мере не акцентировалось. Более того, многие специальные случаи поглощаются общим. В случае линейных функционалов $l(f)$ и произвольных алгоритмов φ_N вычислительный агрегат $\varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f), \cdot)$ сводится к широко изучаемым в математике средствам приближений и вычислений: *ряды Фурье* — тригонометрические ряды, ряды по системе Хаара, Франклина, Уолша и т.д., где функционалы — коэффициенты Фурье по соответствующей

системе $\{g_k\}$, вычислительные агрегаты — частичные суммы рядов Фурье $\sum_{k=1}^N \langle f, g_k \rangle g_k(x)$ с $l_k = \langle f, g_k \rangle$ и $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; x) = \sum_{k=1}^N z_k g_k(x)$.

Аналогично можно получить: линейные методы суммирования рядов Фурье по той или иной ортогональной системе [6]–[8], линейное восстановление по дискретной информации ([9], § 8.3), базисы ([8], гл. 1, § 4), фреймы ([10], а также [11], гл. 4), всплески [12], поперечник Темлякова — ортопоперечник или поперечник Фурье [13], поперечник Тихомирова — линейный поперечник заданного класса в заданном пространстве [14], восстановление функций $Tf = f$ в случае функционалов типа $l(f) = f(\xi)$ значения функции в точке, что включает интерполяцию, собственно восстановление ([15], гл. X), метод конечных разностей ([16], ч. III), жадный (гриди) алгоритм [17] и поперечник по Колмогорову [2] в качестве примеров нелинейной аппроксимации также вписывается в схему К(В)П. Тем самым, приведенные конкретизации D_N доказывают, что тема К(В)П-1 разрабатывалась разумеется, со своими обозначениями, в течение многих десятилетий в неограниченном количестве публикаций, из которых также надлежит назвать работы А.Н. Колмогорова [2] — основоположника направления, А. Сарда [18], С.М. Никольского [19], С.Б. Стечкина [3], Н.С. Бахвалова [20], Н.М. Коробова [21], И.Ф. Шарыгина [22], И. Бабушки и С.Л. Соболева [23], А.Д. Иоффе и В.М. Тихомирова [24], К.И. Бабенко [25], Ч.А. Митчелли и Т.Дж. Равлина [26], С.Д. Фишера и Ч.А. Митчелли [27], Н.П. Корнейчука [9], А. Питча [28], Дж.Ф. Трауба, Г. Васильковского, Х. Вожняковского, Э. Новака [29]–[30], О.В. Локуциевского и М.Б. Гаврикова [31], Л. Плaskоты [32], К.Ю. Осипенко, Г.Г. Магарил-Ильяева и А.Г. Марчука [4], [33], [34], С. Хенрика [5] (и других авторов, полное перечисление которых не представляется возможным в рамках одной статьи) и имеющуюся в них библиографию.

“Теория приближений” и “вычислительная математика” есть по сути замена сложного, в определенном смысле, объекта на простой объект со структурными и вычислительными преимуществами соответственно с обязательной оценкой возникающей при этом погрешности. Как нам представляется, К(В)П-1 в главном должен и может быть количественным описанием этой словесной формулировки. Именно, *теорию приближений* и *вычислительную математику* (линейный аспект) в контексте К(В)П-1 предлагается понимать так: при заданных T, F и $Y \subset D_N$, составленном из всех возможных линейных функционалов над F и из $\{\varphi_N\}_Y$, требуется построить конкретный вычислительный агрегат $\bar{\varphi}_N(\bar{l}_1(f), \dots, \bar{l}_N(f), \cdot)$ со свойством

$$\delta_N(0; T; F; D_N)_Y \asymp \sup_{f \in F} \|Tf - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_1(f), \dots, \bar{l}_N(f), \cdot)\|_Y.$$

Разумеется, дальнейшая конкретизация D_N приводит к специальным задачам типа “аппроксимативные возможности той или иной системы”, “приближенное вычисление интегралов и иных сложных объектов” и т.п. Особый случай *теории приближений* и *вычислительной математики* составляют D_N с нелинейными функционалами.

Задача восстановления К(В)П-1 через оперирование с точными значениями функционалов имеет идеализированную направленность с ответом на теоретический вопрос: “на какую *неулучшаемую скорость приближения ориентироваться?*”.

В К(В)П-1, являющейся исходной для последующего, желательно использовать как можно больше функционалов (но, вообще говоря, не все — при всех линейных и нелинейных функционалах самым лучшим приближением к заданному объекту будет сам объект [35]).

Самостоятельная задача — изучение информативных мощностей отдельных классов линейных функционалов, важнейшие из которых значения функций в точках и коэффициенты Фурье, в первую очередь, тригонометрические с возможностью привлечения мощного аппарата гармонического анализа (например, [36]–[42]).

Отметим, что участие функционалов может быть весьма косвенным. Так для преобразования Радона $R(f, t, \theta)$ имеет место порядковое равенство (Ш.К. Абикинова, Ш.О. Ажгалиев)

$$\inf_{(t_1, \theta^{(1)}), \dots, (t_N, \theta^{(N)}), \varphi_N} \sup_{f \in W_2^r} \|f(x) - \varphi_N(R(f, t_1, \theta^{(1)}), \dots, R(f, t_N, \theta^{(N)}); x)\|_{L^\infty} \asymp N^{-\frac{r}{2} + \frac{1}{2}} \quad (r > 1).$$

Теперь перейдем к задачам К(В)П-2, К(В)П-3, что вместе с К(В)П-1 составляют новую схему исследований в численном анализе.

Полученный в К(В)П-1 оптимальный агрегат $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ подвергается изучению с позиций сервисного обслуживания вычислений через К(В)П-2 и К(В)П-3, в основе которых лежат следующие соображения. Вычисление функционалов — основных носителей числовой информации, за редкими исключениями, не может быть точным. Поэтому, самое лучшее, на что можно рассчитывать — это указание величины погрешности, в пределах которой допускается ошибаться в вычислениях с сохранением итоговых выводов восстановления по точной информации. К тому же излишняя точность вычислений при реализации алгоритма, не улучшая заложенного в нем порядка точности, приводит к неоправданному увеличению количества арифметических операций и объема памяти, что “... часто приводит к расточительству и обеднению наших возможностей” ([31], гл. 4, § 17, п. 2; [25]). И, наконец, чем больше значение разрешенной погрешности, тем меньше цена проводимых вычислений, что делает актуальной задачу установления величины предельной погрешности.

Таким образом, в части К(В)П-2 решается основная вычислительная задача: так или иначе выбирается предназначенный для применений конкретный вычислительный агрегат $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ из К(В)П-1, для которого указывается предельная погрешность $\tilde{\varepsilon}_N$, с которой можно находить числа, вводимые в компьютер, но с сохранением той скорости приближения $\delta_N(0; D_N)_Y$, когда вычисления точны.

В части К(В)П-3 выявляется оптимальность $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ среди других вычислительных агрегатов из D_N с позиций величины предельной погрешности, которых желательно указать как можно больше, начиная с агрегатов вида $\varphi_N(l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f);)$, где функционалы $l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f)$ одного типа с $\bar{l}^{(N)}$. Понятно, что в случае “большого” $\{\varepsilon_N\}$ с $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_N}{\tilde{\varepsilon}_N} = +\infty$ соответствующий агрегат необходимо проверить на оптимальность.

По теме восстановления по неточной информации публикации можно разбить на три группы: 1) работы В.М. Тихомирова, Г.Г. Магарил-Ильяева, К.Ю. Осипенко и А.Г. Марчука [33]–[34] с точными решениями при произвольных $\varepsilon > 0$, и потому без привязки к $\delta_N(0; D_N)_Y$, 2) труды Дж. Трауба, Х. Вожняковского, Л. Плaskоты, Г. Васильковского [29], [32] с минимизацией суммарной стоимости вычисления приближенных значений $z_j(f)$, 3) статьи Н. Темиргалиева и его соавторов [36]–[39]. Все они различаются как по постановкам и, что интересно, так и по употребляемым названиям по сути одних и тех же математических объектов, и, конечно, по формулировкам результатов.

Обозначим через $Q_N \equiv Q_N(F)_Y$ произвольное множество, составленное из N -членных последовательностей функционалов $l^{(N)} \equiv (l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)})$ над F .

Задача К(В)П-1 связана с другими известными задачами и в порядково-эквивалентных формулировках — это поперечники “кодирования” функций $\lambda^N(T, F, Q_N)_Y$, по Гельфанду

$d^N(T, F, Q_N)_Y$, и в рамках двойственности, поперечник по Колмогорову $d_N(T, F)_Y$ представляет собой активно развивающуюся обширную область математики (определения и обозначения см. в [9]). При заданных выше условиях на T , F , Y и Q_N справедлива

Теорема. *Имеют место соотношения*

$$\frac{1}{2} \lambda^N(T, F, Q_N)_Y \leq \delta_N(0; T, F, Q_N \times \{\varphi_N\}_Y)_Y \leq \lambda^N(T, F, Q_N)_Y. \quad (2)$$

Отсюда для центрально-симметрических и $1/2$ -выпуклых классов F в качестве следствия получаем [5]:

$$d^N(T, F, Q_N)_Y \leq \delta_N(0; T, F, Q_N \times \{\varphi_N\}_Y)_Y \leq 2d^N(T, F, Q_N)_Y. \quad (3)$$

Далее, из известных [24] и [28] соотношений двойственности между поперечниками по Гельфанду и по Колмогорову и из (3) следуют порядковые соотношения между $\delta_N(0, T)$ и $d_N(T)$ на языке поляр и сопряженных пространств и операторов (см. также [36]).

Особо отметим, что задача К(В)П-1 требует более точного решения во второй части в том смысле, что точный порядок $\asymp \delta_N(0; T)$ через соотношения (2)–(3) может быть следствием ранее найденных $\asymp \lambda^N$, $\asymp d^N$ или $\asymp d_N$.

Таким образом, в К(В)П предлагается еще одна схема исследований в численном анализе, где все известное выстроено в таком порядке, что ни один ранее известный план исследований полностью с ним не совпадает, во всяком случае по частям К(В)П-2 и К(В)П-3 в контексте установления предельных погрешностей. Имеются лишь частичные пересечения, что, разумеется, естественно, поскольку поле исследований одно и то же — численный анализ и теория приближений. При этом, даже известные, в их числе задача точной оптимизации по неточной информации, в контексте К(В)П-2 звучат по-иному: погрешность неточной $\tilde{\varepsilon}_N$ информации напрямую связана с К(В)П-1 посредством соотношений $\delta_N(0; D_N)_Y \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; D_N)_Y$, именно такое $\tilde{\varepsilon}_N$ находится, а не задается произвольно как в первоначальном случае [33]–[34].

И конечно, К(В)П в полном объеме можно рассматривать как новый взгляд на весь численный анализ.

В заключение отметим, что к К(В)П-подходу относятся и явные формулы типа (см. [43])

$$\begin{aligned} & \left(B^{(1)} \otimes \dots \otimes B^{(s)} \right) (f) - \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega} \left(\theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_s}^{(s)} \right) (f) = \\ & = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu_0}^s \setminus \Omega} \sum_{m \in M} \langle f, \Phi_m \rangle \prod_{j=1}^s \theta_{\nu_j}^{(j)} \left(\varphi_{m_j}^{(j)} \right) = \sum_{m \in M} \langle f, \Phi_m \rangle \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu_0}^s \setminus \Omega} \prod_{j=1}^s \theta_{\nu_j}^{(j)} \left(\varphi_{m_j}^{(j)} \right) \end{aligned}$$

с большим количеством конкретизаций.

В качестве примера (С.С. Кудайбергенов, Н.Ж. Наурызбаев) отметим общую формулу осцилляций (обозначения см. в [44]):

$$\begin{aligned} I_{g(x)}(f) & \equiv \int_{[0,1]^s} f(x) g(x) dx = \Lambda_\Omega(f \cdot g) + \Delta_\Omega(f \cdot g) = \\ & = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega \subset Z_{\nu_0}^s} \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \sum_{|n_1| \leq 2^{\nu_1 - 1}} \dots \sum_{|n_s| \leq 2^{\nu_s - 1}} \hat{g}(n_1, \dots, n_s) \left(\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} \left\{ f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \prod_{j=1}^s \left[\left(\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j) - \operatorname{sgn}(\nu_j - \nu_j^0) \left(1 + (-1)^{k_j} \right) \lambda_{n_j}^{(\nu_j-1)}(j) \right) e^{-\frac{2\pi i n_j k_j}{2^{\nu_j}}} \right] \right\} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu(0)}^s \setminus \Omega} \sum_{\substack{(\rho_1, \dots, \rho_s) : \rho_j = 1, 2, 3 \\ (j = 1, \dots, s)}} \sum_{(\tau_1, \dots, \tau_s) \in A_{\rho_1}^{(\nu_1)} \times \dots \times A_{\rho_s}^{(\nu_s)}} \left\{ \left(\sum_{l_1=1}^3 \dots \sum_{l_s=1}^3 \prod_{j=1}^s \bar{\delta}_{\rho_j, l_j}^{(\nu_j)} \left(\tau_j^{(l_j)} \right) \hat{g} \left(\tau_1^{(l_1)}, \dots, \tau_s^{(l_s)} \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \hat{f} \left(2^{\nu_1} t_1 + \tau_1, \dots, 2^{\nu_s} t_s + \tau_s \right) \right] \right\}.$$

Эффективность этих формул с ядром Дирихле можно продемонстрировать на следующем следствии для системы Хаара

$$\sup_{f(x) \in SW_2^r(0,1)^s} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) \prod_{j=1}^s \chi_{2^{n_j+k_j}}(x_j) dx - \Lambda_{\Omega_q} \left(f(x) \cdot \prod_{j=1}^s \chi_{2^{n_j+k_j}}(x_j) \right) \right| \underset{s,r}{\asymp} \\ \underset{s,r}{\asymp} \frac{2^{\frac{n_1+\dots+n_s}{2}} (\ln N)^{(s-1)(r+1)+s}}{N^r} (N \asymp 2^q q^{s-1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Темиргалиев Н. *Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье*, Вестн. ЕАУ **3**, 90–144 (1997).
- [2] Kolmogorov A.N. *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionen klasse*, Ann. Math. **37** (1), 107–110 (1936).
- [3] Стечкин С.Б. *О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами*, УМН **9** (1), 133–134 (1954).
- [4] Осипенко К.Ю. *Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек*, Матем. заметки **19** (1), 29–40 (1976).
- [5] Heinrich S. *Random approximation in numerical analysis*, in: K.D. Bierstedt, A. Pietsch, W.M. Ruess, D. Vogt (Eds.), Func. Anal. (Marcel Dekker, New York, 1993), 123–171.
- [6] Харди Г. *Расходящиеся ряды* (Ин. лит., М., 1951).
- [7] Волков И.И., Ульянов П.Л. *О некоторых новых результатах об общей теории суммирования рядов и последовательностей*. В кн.: Р. Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей (ГИФМЛ, М., 1960), 363–467.
- [8] Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды* (АФЦ, М., 1999).
- [9] Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения* (Наука, М., 1987).
- [10] Кашин Б.С., Куликова Т.Ю. *О справедливости для фреймов одного результата об ортогональных системах*, Матем. заметки **77** (2), 311–312 (2005).
- [11] Блаттер К. *Вейвлет-анализ. Основы теории* (Техносфера, М., 2004).
- [12] Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. *Теория всплесков* (Физматлит, М., 2005).
- [13] Temlyakov V.N. *Approximation of periodic functions* (Comput. math. and anal. ser.) (Nova Sci. Publ., Commack, NY, 1993).
- [14] Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений* (Изд-во МГУ, М., 1976).
- [15] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды* (Мир, М., 1965).
- [16] Рябенский В.С. *Введение в вычислительную математику* (Наука, М., 1994).
- [17] Temlyakov V.N. *Greedy approximation* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
- [18] Sard A. *Best approximate integration formulas; best approximation formulas*, Amer. J. Math. **71**, 80–91 (1949).
- [19] Никольский С.М. *К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами*, УМН **5** (2(36)) 165–177 (1950).
- [20] Бахвалов Н.С. *О приближенном вычислении кратных интегралов*, Вестн. МГУ. Сер. матем. механ. **4**, 3–18 (1959).
- [21] Коробов Н.М. *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе* (Физматгиз, М., 1963).
- [22] Шарыгин И.Ф. *Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **3** (3), 370–376 (1963).
- [23] Бабушка И., Соболев С. *Оптимизация численных методов*, Apl. Matem. **10**, 96–129 (1965).
- [24] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи*, УМН **23** (6(144)), 51–116 (1968).

- [25] Бабенко К.И. *Основы численного анализа* (Наука, М., 1986).
- [26] Micchelli C.A. and Rivlin T.J. *A survey of optimal recovery*, in: C.A. Micchelli and T.J. Rivlin (Eds.), *Optimal estimation in approximation theory* (Plenum Press, New York, 1977), 1–54.
- [27] Fisher S.D., Micchelli Ch.A. *Optimal sampling of holomorphic functions*, Amer. J. Math. **106** (3), 593–609 (1984).
- [28] Pietsch A. *Eigenvalues and s-numbers* (Geest and Portig, Leipzig and Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987).
- [29] Traub J.F., Wasilkowski G.W. and Wozniakowski H. *Information-based complexity* (Academic Press, New York, 1988).
- [30] Novak E., Wozniakowski H. *Tractability of multivariate problems*. Vol. 1. Linear information, EMS Tracts Math. 6. Zurich (European Math. Soc. Publishing House, 2008).
- [31] Локуцкий О.В., Гавриков М.Б. *Начала численного анализа* (ТОО “Янус”, М., 1995).
- [32] Plaskota L. *Noisy information and computational complexity* (Cambridge University Press, 1996).
- [33] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. *Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье*, Матем. сб. **195** (10), 67–82 (2004).
- [34] Марчук А.Г., Осипенко К.Ю. *Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек*, Матем. заметки **17** (3), 359–368 (1975).
- [35] Ажгалиев Ш., Темиргалиев Н. *Об информативной мощности линейных функционалов*, Матем. заметки **3** (6), 803–812 (2003).
- [36] Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. *Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения*, Изв. вузов. Матем., № 3, 89–95 (2017).
- [37] Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. *Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах Соболева*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **55** (9), 1474–1485 (2015).
- [38] Темиргалиев Н., Шерниязов К.Е., Берикханова М.Е. *Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффициентам Фурье*, Современ. пробл. матем. **17**, 179–207 (2013).
- [39] Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таутынбаева Г.Е. *Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника*, Изв. вузов. Матем., № 8, 86–93 (2013).
- [40] Абикенова Ш., Утесов А., Темиргалиев Н. *О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева*, Матем. заметки **91** (3), 459–463 (2012).
- [41] Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. *Применения квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию коэффициентов Фурье и в задачах восстановления*, Изв. вузов. Матем., № 3, 52–71 (2010).
- [42] Ибатулин И., Темиргалиев Н. *Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона в метрике $L^{2,\infty}$* , Дифференц. уравнения **44** (4), 491–506 (2008).
- [43] Темиргалиев Н. *Тензорные произведения функционалов и их применения*, Докл. РАН **430** (4), 460–465 (2010).
- [44] Наурызбаев Н.Ж., Шоманова А.А., Темиргалиев Н. *О некоторых особых эффектах в теории численного интегрирования и восстановления функций*, Изв. вузов. Матем., № 3, 96–102 (2018).

Нурлан Темиргалиев

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Сатпаева, д. 2, г. Астана, 010008, Республика Казахстан,
e-mail: ntmath10@mail.ru

Аксауле Жанбыршиевна Жубанышева

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева,
ул. Сатпаева, д. 2, г. Астана, 010008, Республика Казахстан,
e-mail: axaulezh@mail.ru

N. Temirgaliyev and A.Zh. Zhubanysheva

Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery

Abstract. We discuss a C(N)D-statement consisting of the known and elaborating in decades C(N)D-1 statement which can be and should be interpreted as quantitative statement of approximation theory and calculus mathematics, which together with new prolongations of C(N)D-2 and -3 in aggregate is suggested as natural theoretical and computational scheme of further developments of numerical analysis.

Keywords: computational (Numerical) Diameter (C(N)D), approximation theory in quantitative statement, calculus mathematics, recovery by exact and inexact information, limiting error, new scheme of numerical analysis.

Nurlan Temirgaliyev

*L.N. Gumilyov Eurasian National University,
2 Satpaev str., Astana, 010008 Republic of Kazakhstan,*

e-mail: ntmath10@mail.ru

Aksaul Zhanbyrshievna Zhubanysheva

*L.N. Gumilyov Eurasian National University,
2 Satpaev str., Astana, 010008 Republic of Kazakhstan,*

e-mail: axaulezh@mail.ru