Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Тимергалиев, Р. С. Якушев, О существовании решений пространственных нелинейных краевых задач для произвольного упругого неоднородного анизотропного тела, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 1, 76–85

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-76-85>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:51:36

С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ, Р.С. ЯКУШЕВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Аннотация. Изучается разрешимость нелинейной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Цель работы — доказательство теоремы существования решений. Задача сводится к системе трехмерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений, разрешимость которой устанавливается с использованием символа сингулярного оператора и принципа сжатых отображений.

Ключевые слова: упругое неоднородное анизотропное тело, уравнения равновесия, краевая задача, трехмерные сингулярные интегральные уравнения, символ сингулярного оператора, теорема существования.

УДК: 517.958:539.3

1. Постановка задачи. В произвольной односвязной области V , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью класса C^1 , занятой упругим телом, рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\sigma_{x_j}^{kj} + f_k + X_k = 0, \quad k = \overline{1, 3} \quad (1)$$

(здесь и далее по повторяющимся латинским индексам ведется суммирование от 1 до 3), в которой приняты обозначения:

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma^{j3}\omega_2 - \sigma^{j2}\omega_3), \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma^{j1}\omega_3 - \sigma^{j3}\omega_1), \quad f_3 = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma^{j2}\omega_1 - \sigma^{j1}\omega_2);$$
$$\omega_1 = (u_{3x_2} - u_{2x_3})/2, \quad \omega_2 = (u_{1x_3} - u_{3x_1})/2, \quad \omega_3 = (u_{2x_1} - u_{1x_2})/2. \quad (2)$$

Система уравнений (1) совместно с соотношениями (2) описывает состояние равновесия упругого тела ([1], с. 83–84), при этом $\sigma^{kj} = \sigma^{jk}$ — компоненты напряжений, ω_k — углы поворота элемента тела вокруг оси Ox_k ([1], сс. 14, 56), $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений точек упругого тела, X_k ($k = \overline{1, 3}$) — компоненты объемных внешних сил, действующих на упругое тело.

Предположим, что определяющие соотношения имеют вид $\sigma^{kj} = B^{kjnm}\varepsilon_{nm}$, $n \leq m$, $j, k = \overline{1, 3}$, выражающие закон Гука для неоднородных анизотропных упругих тел ([2], с. 22–23; [3], с. 219), где $\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{jk}$ — компоненты деформаций ([1], с. 56):

$$\varepsilon_{kj} = e_{kj} + \chi_{kj}, \quad e_{jj} = u_{jx_j}, \quad e_{jk} = u_{jx_k} + u_{kx_j},$$
$$\chi_{jj} = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_j^2)/2, \quad \chi_{jk} = -\omega_j\omega_k, \quad j \neq k, \quad j, k = \overline{1, 3};$$

$B^{kjnm} = B^{kjnm}(x)$ — упругие характеристики тела, являющиеся функциями переменной $x = (x_1, x_2, x_3)$ и удовлетворяющие условиям $B^{kjnm} = B^{nmkj} = B^{jknm}$; x_1, x_2, x_3 — прямоугольные декартовы координаты точки x области V .

В системе (1) напряжения и деформации заменим их выражениями. В результате получим систему уравнений равновесия в перемещениях:

$$b_{kj}^{nm} u_{jx_n x_m} + B_{x_j}^{kjq_s} e_{q_s} + g_k(u) + X_k = 0, \quad q \leq s, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

где

$$b_{kj}^{nm} = (B^{knmj} + B^{kmnj})/2, \quad k, j, n, m = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

$$g_k(u) = B^{kjq_s} \chi_{q_s x_j} + B_{x_j}^{kjq_s} \chi_{q_s} + f_k(u).$$

В случае линейных задач $g_k(u) \equiv 0$, $k = \overline{1, 3}$.

Задача I. Требуется найти решение $u = (u_1, u_2, u_3)$ системы (3) в области V , удовлетворяющее на ее границе ∂V условию

$$u = 0. \quad (5)$$

Исследования разрешимости пространственных краевых задач теории упругости ведутся по двум основным направлениям. В первом направлении применяются методы функционального анализа, которые позволяют установить существование обобщенных решений широкого класса задач теории упругости в различных энергетических пространствах. На этом пути доказаны теоремы существования линейных [4], [5] и нелинейных [6] краевых задач для неоднородных анизотропных упругих тел. Исследования второго направления опираются на теории сингулярных интегральных уравнений [2], [3], [7] и рядов [8]. В основе исследований в [2], [3], [7] лежат фундаментальные решения однородных линейных уравнений равновесия. На сегодняшний день такие фундаментальные решения построены для уравнений с постоянными и кусочно-постоянными коэффициентами, описывающих равновесное состояние однородных и кусочно-однородных тел [2], [3]. В [7] путем перехода от пространственных к плоским задачам изучены краевые задачи для изотропных и трансверсально-изотропных однородных тел специальной конфигурации. В [8] с помощью рядов рассмотрены краевые задачи для однородных изотропных шара и цилиндра. Работа [9] посвящена развитию второго направления на случай линейных краевых задач для произвольных неоднородных анизотропных упругих тел. В ней для доказательства существования решения предложен новый метод, в основе которого лежат интегральные представления для перемещений, использующие фундаментальные решения уравнения Лапласа. Такой подход в отличие от [2], [3], [7], [8] не требует знания частных решений исходной системы однородных дифференциальных уравнений и позволяет исследовать уравнения с переменными коэффициентами. В данной статье метод работы [9] применяется к нелинейным краевым задачам для произвольных неоднородных анизотропных тел.

Задачу I будем изучать в обобщенной постановке. Пусть выполнены следующие условия: (а) квадратичная форма $B^{kjnm}(x) \varepsilon_{jk} \varepsilon_{nm}$ положительно определена в $\overline{V}$, т.е. для любого $x \in \overline{V}$ имеет место неравенство $B^{kjnm}(x) \varepsilon_{jk} \varepsilon_{nm} \geq c(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{33}^2)$, $c = \text{const} > 0$; (б) упругие характеристики $B^{kjnm} \in W_p^{(1)}(V)$, $p > 3$, $j, k, n, m = \overline{1, 3}$; (с) внешние силы $X_k \in L_p(V)$, $p > 3$, $k = \overline{1, 3}$.

Определение. Обобщенным решением задачи I назовем вектор перемещений $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_p^{(2)}(V)$, $p > 3$, почти всюду (п.в.) удовлетворяющий системе (3) и поточечно граничному условию (5).

Здесь $W_p^{(j)}(V)$, $j = 1, 2$ — пространства Соболева. В силу теорем вложения для Соболевских пространств $W_p^{(j)}(V)$ ($j = 1, 2$) с $p > 3$ обобщенное решение $u \in C_\alpha^1(\overline{V})$, а упругие характеристики $B^{jknm} \in C_\alpha(\overline{V})$.

Здесь и далее везде $\alpha = (p - 3)/p$, $p > 3$.

2. Сведение задачи I к системе трехмерных сингулярных интегральных уравнений. Пусть $y = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))$ ($y = (y_1, y_2, y_3)$) — взаимно однозначное отображение области V на шар $S_R : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \leq R^2$. Через $x = \psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \psi_3(y))$ обозначим отображение, обратное $y = \varphi(x)$. Будем считать, что

$$\varphi(x) \in W_p^{(2)}(V), \quad \psi(y) \in W_p^{(2)}(S_R), \quad p > 3. \quad (6)$$

В (3) перейдем к новым переменным y_j , $j = \overline{1, 3}$. Оставив для величин $u(\psi(y))$, $X_k(\psi(y))$ прежние обозначения $u(y)$, $X_k(y)$, систему (3) запишем в виде

$$a_{kj}^{nm} u_{jy_n y_m} + h_k(u) + g_k(u) + X_k = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (7)$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned} a_{kj}^{nm} &\equiv a_{kj}^{nm}(y) = b_{kj}^{qs} \varphi_{n x_q}(x) \varphi_{m x_s}(x), \quad h_k(u) = b_{kj}^{nm}(x) \varphi_{q x_n x_m}(x) u_{j y_q} + B_{y_q}^{kjli} \varphi_{q x_j}(x) e_{li}(x), \\ g_k(u) &= B^{kjli} \varphi_{q x_j}(x) \chi_{li y_q} + B_{y_q}^{kjli} \varphi_{q x_j}(x) \chi_{li}(x) + f_k(u), \quad x = \psi(y), \\ e_{ll}(y) &= u_{l y_q} \varphi_{q x_l}, \quad e_{li}(y) = u_{l y_q} \varphi_{q x_i} + u_{i y_q} \varphi_{q x_l}, \quad l \neq i, \quad l, i, n, m, k = \overline{1, 3}, \\ \omega_1 &= (u_{3 y_q} \varphi_{q x_2} - u_{2 y_q} \varphi_{q x_3})/2, \quad \omega_2 = (u_{1 y_q} \varphi_{q x_3} - u_{3 y_q} \varphi_{q x_1})/2, \\ \omega_3 &= (u_{2 y_q} \varphi_{q x_1} - u_{1 y_q} \varphi_{q x_2})/2. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что $h_k(u)$ ($k = \overline{1, 3}$) линейны относительно перемещений u_j и содержат только их частные производные первого порядка.

Итак, задача I свелась к нахождению решения системы (7) в шаре S_R , удовлетворяющего на его границе $\partial S_R : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = R^2$ условию (5).

Пусть $x, y \in S_R$. Через $G(x, y)$ обозначим гармоническую функцию Грина задачи Дирихле, которая в случае шара S_R имеет вид ([10], с. 431–432):

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} - \frac{R}{4\pi|x||x^* - y|}, \quad (9)$$

где $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = R^2 x / |x|^2$ — точка, симметричная точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ относительно сферы ∂S_R ; $|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$.

Решение системы (7), удовлетворяющее граничному условию (5), будем искать в виде

$$u(y) = \iiint_{S_R} G(x, y) \rho(x) dx \equiv u(\rho), \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3, \quad (10)$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ — произвольная вектор-функция, принадлежащая пространству $L_p(S_R)$, $p > 3$.

Найдем производные до второго порядка включительно функции (10). Непосредственным дифференцированием под знаком интеграла в (10) получаем

$$u_{y_j}(y) = \iiint_{S_R} G_{y_j}(x, y) \rho(x) dx \equiv u_{,j}(\rho), \quad j = \overline{1, 3}. \quad (11)$$

Заметим, что $u_{,j}(\rho)$ — линейные вполне непрерывные операторы в $L_p(S_R)$, $p > 3$, отображающие $L_p(S_R)$ в $C_\alpha(\overline{S_R})$.

Для нахождения вторых производных $u(y)$ воспользуемся формулой (15) из ([11], с. 240), для которых п. в. в S_R получим представления

$$u_{jy_n y_m} = -\frac{1}{3}\delta_{nm}\rho_j(y) + \iiint_{S_R} G_{y_n y_m}(x, y)\rho_j(x)dx \equiv u_{,nm}(\rho_j), \quad j, n, m = \overline{1, 3}, \quad (12)$$

где $\delta_{nm} = 1$ при $n = m$ и $\delta_{nm} = 0$ при $n \neq m$.

Дважды дифференцируя соотношение (9), будем иметь

$$G_{y_n y_m} = \frac{1}{4\pi} \frac{3(x_n - y_n)(x_m - y_m) - \delta_{nm}|x - y|^2}{|x - y|^5} - \frac{1}{4\pi} \frac{R}{|x|} \frac{3(x_n^* - y_n)(x_m^* - y_m) - \delta_{nm}|x^* - y|^2}{|x^* - y|^5}, \quad n, m = \overline{1, 3}. \quad (13)$$

Внося выражения (13) в (12), совершая во втором интеграле замену переменных и вводя функцию $\rho_j^*(x) = \rho_j(x)$ при $x \in S_R$ и $\rho_j^*(x) = -(R^5/|x|^5)\rho_j(R^2x/|x|^2)$ при $x \in \overline{S_R}$, соотношения (12) представляем в виде

$$u_{,nm}(\rho_j) = -\frac{1}{3}\delta_{nm}\rho_j(y) + \frac{1}{4\pi} \iiint_{E_3} \frac{f_{nm}((x - y)/|x - y|)}{|x - y|^3} \rho_j^*(x)dx, \quad j, n, m = \overline{1, 3}, \quad (14)$$

$$f_{nm}\left(\frac{x - y}{|x - y|}\right) = \frac{3(x_n - y_n)(x_m - y_m) - \delta_{nm}|x - y|^2}{|x - y|^2},$$

E_3 — трехмерное евклидово пространство.

Заметим, что функция $f_{nm}((x - y)/|x - y|)$ является характеристикой сингулярного оператора $u_{,nm}(\rho_j)$ ([12], с. 8). Обозначив

$$\theta = (x - y)/|x - y| = (\theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad \theta_j = (x_j - y_j)/|x - y|, \quad j = \overline{1, 3},$$

характеристику запишем в виде

$$f_{nm}(\theta) = 3\theta_n\theta_m - \delta_{nm}, \quad n, m = \overline{1, 3}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\iint_{\partial S_1} f_{nm}(\theta)ds = 0, \quad n, m = \overline{1, 3},$$

где ∂S_1 — единичная сфера.

Кроме того,

$$\iint_{\partial S_1} |f_{nm}(\theta)|^q ds \leq \text{const}, \quad n, m = \overline{1, 3}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 3.$$

Следовательно ([12], с. 18), $u_{,nm}$ суть ограниченные операторы в $L_p(S_R)$, $p > 3$.

Выражения перемещений (10) и их производных (11), (14) подставим в (7). В результате получим систему трехмерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений относительно функции $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$:

$$P_{kj}(\rho_j) = g_k(\rho) + X_k, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (15)$$

где

$$P_{kj}(\rho_j) = \frac{1}{3}(a_{kj}^{11} + a_{kj}^{22} + a_{kj}^{33})\rho_j - \frac{1}{4\pi}a_{kj}^{nm} \iiint_{E_3} \frac{f_{nm}(\theta)}{|x - y|^3} \rho_j^*(x)dx - h_k(\rho_j) \quad (16)$$

(по j суммирования нет), $g_k(\rho) \equiv g_k(u(\rho))$, $h_k(\rho) \equiv h_k(u(\rho))$, $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$, $h_k(\rho_j) = h_k(\rho)|_{\rho_i=0}$, $i \neq j$, $i, j, k = \overline{1, 3}$. Заметим, что $h_k(\rho) = h_k(\rho_1) + h_k(\rho_2) + h_k(\rho_3)$.

Лемма. Пусть выполнены условия (b), (c), (6). Тогда 1) P_{kj} ($j, k = \overline{1, 3}$) — линейные ограниченные операторы в $L_p(S_R)$, $p > 3$; 2) $X_k \in L_p(S_R)$, $p > 3$, $k = \overline{1, 3}$; 3) g_k ($k = \overline{1, 3}$) — нелинейные ограниченные операторы в $L_p(S_R)$, $p > 3$, при этом для любых $\rho^j \in L_p(S_R)$ ($j = 1, 2$), принадлежащих шару $\|\rho^j\|_{L_p(S_R)} < r$, имеют место оценки

$$\|g_k(\rho^1) - g_k(\rho^2)\|_{L_p(S_R)} \leq c(1+r)r\|\rho^1 - \rho^2\|_{L_p(S_R)}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (17)$$

где c — известная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик упругого тела.

Доказательство. С учетом отмеченных выше свойств операторов $u_{,j}(\rho)$, $u_{,nm}(\rho_j)$, определенных формулами (11), (12), (14), а также учитывая условия (b) и (6), легко получаем: 1) $e_{li}(\rho)$, $\omega_l(\rho)$ ($l, i = \overline{1, 3}$) суть линейные вполне непрерывные операторы относительно ρ в $L_p(S_R)$, $p > 3$, отображающие это пространство в $C_\alpha(\overline{S_R})$; 2) $\chi_{li}(\rho)$ ($l, i = \overline{1, 3}$) суть а) нелинейные вполне непрерывные операторы в $L_p(S_R)$, $p > 3$ и б) ограниченные операторы из $L_p(S_R)$ в $C_\alpha(\overline{S_R})$, при этом для любых $\rho^j \in L_p(S_R)$ ($j = 1, 2$), принадлежащих шару $\|\rho^j\|_{L_p(S_R)} < r$ справедливы оценки

$$\|\chi_{li}(\rho^1) - \chi_{li}(\rho^2)\|_{C_\alpha(\overline{S_R})} \leq cr\|\rho^1 - \rho^2\|_{L_p(S_R)};$$

3) f_k ($k = \overline{1, 3}$) суть нелинейные ограниченные операторы в $L_p(S_R)$, $p > 3$ и для них имеют место оценки (17). Тогда, принимая во внимание выражение $g_k(u)$ в (8), а также условия (b), (6), приходим к справедливости утверждения третьей части леммы. Аналогично, используя соотношение для $h_k(u)$ в (8), легко получаем, что h_k ($k = \overline{1, 3}$) — линейные вполне непрерывные операторы в $L_p(S_R)$, $p > 3$, отображающие это пространство в $C_\alpha(\overline{S_R})$. Тогда из (16) сразу следует справедливость утверждения первой части леммы. Справедливость второй части леммы непосредственно вытекает из условий (c), (6). $\square$

3. Исследование разрешимости системы (15). При изучении разрешимости системы (15), в которой правую часть временно считаем известной, будем следовать [12]. Через $\Phi_{kj}(y, \theta)$ обозначим символ сингулярного оператора $P_{kj}(\rho_j)$ (по j суммирования нет), определенного формулой (16). Займемся вычислением $\Phi_{kj}(y, \theta)$. Для этого используем формулу ([12], с. 109):

$$\Phi_{kj}(y, \theta) = \frac{1}{3}[a_{kj}^{11}(y) + a_{kj}^{22}(y) + a_{kj}^{33}(y)] - \frac{1}{4\pi}a_{kj}^{nm}(y) \iiint_{E_3} \frac{f_{nm}(\frac{x}{|x|})}{|x|^3} e^{-i(x,z)} dx, \quad y \in S_R, \quad (18)$$

где $\theta = z/|z| \in \partial S_1$, $z = (z_1, z_2, z_3)$, $(x, z) = x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = |x||z| \cos \gamma$ — скалярное произведение векторов x, z ; γ — угол между x, z ; i — мнимая единица. Как видно из (18), вычисление символа $\Phi_{kj}(y, \theta)$ сводится к вычислению интегралов

$$J_{nm} = \iiint_{E_3} \frac{f_{nm}(\frac{x}{|x|})}{|x|^3} e^{-i(x,z)} dx, \quad n, m = \overline{1, 3}.$$

Сначала вычислим J_{11} . С учетом выражения характеристики $f_{nm}(x/|x|)$ в (14) получаем

$$J_{11} = \iiint_{E_3} \frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{|x|^5} e^{-i(x,z)} dx = \lim_{r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\varepsilon < |x| < r} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{1}{|x|} \right) e^{-i(x,z)} dx.$$

К тройному интегралу применяем формулу Остроградского. В результате

$$J_{11} = \lim_{r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{\partial S_\varepsilon \cup \partial S_r} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{|x|} \right) \cos(\vec{n}, x_1) e^{-i(x,z)} ds + \right. \\ \left. + iz_1 \iiint_{\varepsilon < |x| < r} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{|x|} \right) e^{-i(x,z)} dx \right], \quad (19)$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к $\partial S_\varepsilon \cup \partial S_r$; $\partial S_\varepsilon, \partial S_r$ — сферы радиуса ε, r соответственно с центром в начале координат. Заметим, что $\cos(\vec{n}, x_1) = x_1/r$ на ∂S_r , $\cos(\vec{n}, x_1) = -x_1/\varepsilon$ на ∂S_ε .

Для вычисления поверхностных интегралов в (19) совершим замену переменных: $x_j = a_{1j}\xi_1 + a_{2j}\xi_2 + a_{3j}\xi_3$, $j = \overline{1,3}$, при этом ось $O\xi_1$ новой прямоугольной системы $O\xi_1\xi_2\xi_3$ направим вдоль вектора z . Матрица $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ является ортогональной. Переходя после этого к сферическим координатам $\xi_1 = \delta \cos \psi_1$, $\xi_2 = \delta \sin \psi_1 \cos \psi_2$, $\xi_3 = \delta \sin \psi_1 \sin \psi_2$ ($\delta = \varepsilon$ на ∂S_ε и $\delta = r$ на ∂S_r), учитывая при этом $(x, z) = \delta|z| \cos \psi_1$ на $\partial S_r \cup \partial S_\varepsilon$ и ортогональность матрицы A , для поверхностных интегралов в (19) будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{\partial S_r} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{|x|} \right) \cos(\vec{n}, x_1) e^{-i(x,z)} ds = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\partial S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{|x|} \right) \cos(\vec{n}, x_1) e^{-i(x,z)} ds = \frac{4\pi}{3}. \quad (20)$$

Для тройного интеграла в (19) при помощи аналогичных выкладок получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} iz_1 \iiint_{\varepsilon < |x| < r} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{|x|} \right) e^{-i(x,z)} dx = \lim_{r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \left\{ (-iz_1) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\psi \int_\varepsilon^r (a_{11} \cos \psi + a_{21} \sin \psi \cos \varphi + a_{31} \sin \psi \sin \varphi) e^{-i\rho|z| \cos \psi} \sin \psi d\rho \right\} = \\ = -4\pi\theta_1 a_{11} = -4\pi\theta_1^2, \quad \theta_1 = \frac{z_1}{|z|}; \quad (21)$$

при этом дополнительно учитывая, что $a_{11} = \cos(x_1, \xi_1) = \theta_1$.

Если (20), (21) подставить в (19), то

$$J_{11} = 4\pi \left(\frac{1}{3} - \theta_1^2 \right).$$

Аналогично вычисляем остальные интегралы J_{nm} . В результате получим

$$J_{nm} = -4\pi\theta_n\theta_m, \quad n \neq m, \quad J_{nn} = 4\pi \left(\frac{1}{3} - \theta_n^2 \right), \quad \theta_n = \frac{z_n}{|z|}, \quad n, m = \overline{1,3}. \quad (22)$$

Внося (22) в (18), имеем

$$\Phi_{kj}(y, \theta) = a_{kj}^{nm} \theta_n \theta_m, \quad k, j = \overline{1,3}. \quad (23)$$

Как видно из (23), символ $\Phi_{kj}(y, \theta)$ представляет собой квадратичную форму относительно переменных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ при $y \in S_R$ с матрицей $A_{kj} = (a_{kj}^{nm})_{3 \times 3}$, $k, j = \overline{1,3}$. Эта матрица A_{kj} представима в виде

$$A_{kj} = JB_{kj}J^T, \quad k, j = \overline{1,3}, \quad (24)$$

где $J = (\partial\varphi_j/\partial x_k)_{3 \times 3}$ — матрица Якоби преобразований $y_j = \varphi_j(x)$ ($j = \overline{1,3}$), $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$; J^T — транспонированная матрица Якоби, $B_{kj} = (b_{kj}^{nm})_{3 \times 3}$ — матрица с

элементами b_{kj}^{nm} , определенными по формулам (4). В силу (24) выражение (23) можно преобразовать к виду

$$\Phi_{kj}(y, \theta) = b_{kj}^{nm}(x) \gamma_n \gamma_m, \quad k, j = \overline{1, 3}, \quad (25)$$

$$\gamma_n = \varphi_{1x_n}(x) \theta_1 + \varphi_{2x_n}(x) \theta_2 + \varphi_{3x_n}(x) \theta_3, \quad n = \overline{1, 3}, \quad x = \psi(y), y \in S_R, \quad x \in V.$$

Покажем, что квадратичные формы $\Phi_{jj}(y, \theta)$ ($j = \overline{1, 3}$) являются положительно определенными относительно $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ при $y \in \overline{S_R}$. Так как $\delta_1 = b_{11}^{11} = B^{1111}$,

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11}^{11} & b_{11}^{12} \\ b_{11}^{12} & b_{11}^{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B^{1111} & B^{1112} \\ B^{1112} & B^{1122} \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11}^{11} & b_{11}^{12} & b_{11}^{13} \\ b_{11}^{12} & b_{11}^{22} & b_{11}^{23} \\ b_{11}^{13} & b_{11}^{23} & b_{11}^{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B^{1111} & B^{1112} & B^{1113} \\ B^{1211} & B^{1212} & B^{1213} \\ B^{1311} & B^{1312} & B^{1313} \end{vmatrix},$$

то с учетом условия (а) сразу получаем $\delta_j(x) \geq \text{const} > 0 \quad \forall x \in \overline{V}, j = \overline{1, 3}$. Следовательно, $\Phi_{11}(y, \theta)$ — положительно определенная квадратичная форма относительно γ_j ($j = \overline{1, 3}$), т. е.

$$\Phi_{11}(y, \theta) \geq c(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2), \quad c = \text{const} > 0.$$

Но

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \lambda_{nm}(x) \theta_n \theta_m \equiv Q(x, \theta),$$

$$\lambda_{nm}(x) = \varphi_{nx_1} \varphi_{mx_1} + \varphi_{nx_2} \varphi_{mx_2} + \varphi_{nx_3} \varphi_{mx_3}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{V}.$$

Заметим, что $Q(x, \theta)$ — положительно определенная квадратичная форма относительно $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Действительно, так как в данном случае

$$\delta_1 = \lambda_{11}, \delta_2 = \det(\lambda_{jk})_{2 \times 2} = (\varphi_{1x_1} \varphi_{2x_2} - \varphi_{1x_2} \varphi_{2x_1})^2 + (\varphi_{1x_1} \varphi_{2x_3} - \varphi_{1x_3} \varphi_{2x_1})^2 +$$

$$+ (\varphi_{1x_2} \varphi_{2x_3} - \varphi_{1x_3} \varphi_{2x_2})^2, \quad \delta_3 = \det(\lambda_{jk})_{3 \times 3} = |J|^2,$$

то с учетом условия (6) и принимая во внимание тот факт, что якобиан $|J| \neq 0$ в $\overline{V}$, будем иметь $\delta_j(x) \geq c > 0, j = \overline{1, 3}$, в $\overline{V}$. Поэтому $Q(x, \theta) \geq c(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) = c$. Таким образом, $\Phi_{11}(y, \theta) \geq c > 0 \quad \forall y \in \overline{S_R}, \quad \forall \theta \in \partial S_1$. Аналогично поступаем и в случаях $\Phi_{22}(y, \theta), \Phi_{33}(y, \theta)$. В результате приходим к неравенствам

$$\Phi_{jj}(y, \theta) \geq c > 0 \quad \forall y \in \overline{S_R}, \quad \forall \theta \in \partial S_1, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (26)$$

Обозначим

$$\Delta_1 = \Phi_{11}(y, \theta), \quad \Delta_2 = \det(\Phi_{jk}(y, \theta))_{2 \times 2}, \quad \Delta_3 = \det(\Phi_{jk}(y, \theta))_{3 \times 3}.$$

В соответствии с (26) имеем

$$|\Delta_1| \geq c > 0 \quad \forall y \in \overline{S_R}, \quad \forall \theta \in \partial S_1. \quad (27)$$

Кроме того, предположим, что упругие характеристики B^{jknm} таковы, что выполняются условия

$$|\Delta_j| \geq c > 0 \quad (j = 2, 3) \quad \forall y \in \overline{S_R}, \quad \forall \theta \in \partial S_1. \quad (28)$$

Тогда из (27), (28) следует, что точные нижние границы модулей определителей Δ_j ($j = \overline{1, 3}$) положительны. Следовательно ([12], с. 192), индекс системы уравнений (15) равен нулю и к ней применима альтернатива Фредгольма. Покажем, что система (15) при $g_k(\rho) + X_k = 0$ ($k = \overline{1, 3}$) имеет только нулевое решение в $L_p(S_R)$, $p > 3$. Допустим противное: пусть $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in L_p(S_R)$, $p > 3$, — ненулевое решение однородной системы уравнений. Этому решению по формуле (10) соответствует вектор перемещения $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_p^{(2)}(V)$, $p > 3$, удовлетворяющий граничному условию (5) и п. в. в V системе однородных линейных уравнений

$$\sigma_{e, x_j}^{kj} = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (29)$$

где $\sigma_e^{kj} = B^{kjnm}e_{nm}$, $n \leq m$, $k, j = \overline{1, 3}$.

Равенства (29) сначала умножим соответственно на u_1, u_2, u_3 , проинтегрируем по области V , сложим, после чего с учетом (5) интегрируем по частям. В результате получаем

$$\iiint_V B^{kjnm}e_{kj}e_{nm}dx = 0,$$

откуда в силу условия (а) следует $e_{jk} = 0$, $j, k = \overline{1, 3}$. Поэтому $u_k = 0$, $k = \overline{1, 3}$, в $\bar{V}$ и $\rho = 0$ п.в. в S_R . Таким образом, существует обратный оператор P^{-1} , ограниченный в $L_p(S_R)$, $p > 3$, с помощью которого система (15) сведется к эквивалентной. Представим ее в виде

$$\rho - G_*\rho = 0, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} G_*\rho &= P^{-1}(g(\rho) + X), \quad P\rho = (P_1\rho, P_2\rho, P_3\rho), \quad g(\rho) = (g_1(\rho), g_2(\rho), g_3(\rho)), \\ X &= (X_1, X_2, X_3), \quad P_k\rho = P_{kj}(\rho_j), \quad k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (31)$$

Из соотношения для $G_*\rho$ в (31) и леммы легко получаем, что $G_*\rho$ — нелинейный ограниченный оператор в $L_p(S_R)$, $p > 3$, причем для любых ρ^j ($j = 1, 2$) $\in L_p(S_R)$, $p > 3$, принадлежащих шару $\|\rho^j\|_{L_p(S_R)} < r$, справедлива оценка

$$\|G_*\rho^1 - G_*\rho^2\|_{L_p(S_R)} \leq q\|\rho^1 - \rho^2\|_{L_p(S_R)},$$

где $q = cr(1 + r)$; здесь постоянная c зависит от физико-геометрических характеристик упругого тела.

Предположим, что радиус r шара и внешние силы, действующие на упругое тело, таковы, что выполняются условия

$$q < 1, \quad \|G_*0\|_{L_p(S_R)} < (1 - q)r, \quad (32)$$

где $G_*0 = P^{-1}X$.

Отметим, что первое неравенство в (32) выполняется за счет выбора радиуса r , а выполнение второго неравенства при фиксированном таким образом r обеспечивается за счет внешних сил.

В этих условиях к уравнению (30) можно применить принцип сжатых отображений ([13], с. 146), согласно которому уравнение (30) в шаре $\|\rho\|_{L_p(S_R)} < r$ имеет единственное решение $\rho \in L_p(S_R)$, $p > 3$.

Зная $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$, по формуле (10) находим решение $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_p^{(2)}(S_R)$, $p > 3$, задачи I.

В заключение остановимся на условиях (28). Для их иллюстрации рассмотрим частный случай, когда упругое тело изотропно. В этом случае упругие характеристики B^{kjnm} имеют вид:

$$\begin{aligned} B^{jjjj} &= \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \equiv \mu, \quad B^{jjkk} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad B^{jjkk} = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \\ &\quad j \neq k, \quad k = \overline{1, 3}; \end{aligned}$$

остальные $B^{kjnm} = 0$; здесь ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

По формулам (4) находим

$$b_{jj}^{jj} = \mu, \quad b_{jj}^{kk} = \lambda, \quad b_{nm}^{nm} = \lambda/[2(1 - 2\nu)] \equiv \beta, \quad j \neq k, \quad n \neq m, \quad j, k, n, m = \overline{1, 3}; \quad (33)$$

остальные $b_{jk}^{nm} = 0$. Здесь

$$\lambda = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \mu = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

Внося (33) в (25), получаем

$$\begin{aligned}\Phi_{11}(y, \theta) &= \mu\gamma_1^2 + \lambda\gamma_2^2 + \lambda\gamma_3^2, \quad \Phi_{22}(y, \theta) = \lambda\gamma_1^2 + \mu\gamma_2^2 + \lambda\gamma_3^2, \\ \Phi_{33}(y, \theta) &= \lambda\gamma_1^2 + \lambda\gamma_2^2 + \mu\gamma_3^2, \quad \Phi_{jk}(y, \theta) = 2\beta\gamma_j\gamma_k, \quad j \neq k, \quad j, k = \overline{1, 3}.\end{aligned}$$

Пусть коэффициент Пуассона $\nu = \nu(x)$ удовлетворяет условию

$$-1 < \nu(x) \leq \nu_0 < 1/2 \quad \forall x \in \overline{V}, \quad \nu_0 = \text{const.} \quad (34)$$

Вычислим определители

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \gamma_1^2[\lambda\mu\gamma_1^2 + \lambda_0\gamma_2^2 + \lambda(\lambda + \mu)\gamma_3^2/2] + \\ &\quad + \gamma_2^2[\lambda_0\gamma_1^2 + \lambda\mu\gamma_2^2 + \lambda(\lambda + \mu)\gamma_3^2/2] + \\ &\quad + \gamma_3^2[\lambda(\lambda + \mu)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)/2 + \lambda^2\gamma_3^2], \\ \Delta_3 &= \gamma_1^4[\lambda^2\mu\gamma_1^2 + \mu_0(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)] + \gamma_1^2\gamma_2^2[\mu_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \\ &\quad + \beta_0\gamma_3^2] + \gamma_1^2\gamma_3^2[\mu_0(\gamma_1^2 + \gamma_3^2) + \beta_0\gamma_2^2] + \gamma_2^4[\mu_0(\gamma_1^2 + \gamma_3^2) + \lambda^2\mu\gamma_2^2] + \\ &\quad + \gamma_2^2\gamma_3^2[\beta_0\gamma_1^2 + \mu_0(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)] + \gamma_3^4[\mu_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \lambda^2\mu\gamma_3^2], \quad (35)\end{aligned}$$

где

$$\lambda_0 = (\lambda^2 + \mu^2 - 4\beta^2)/2, \quad \mu_0 = \lambda(\lambda\mu + \lambda_0)/2, \quad \beta_0 = 2(\lambda^3 + 8\beta^3 - \mu^3 + 3\mu\lambda_0)/3.$$

Заметим, что в условиях (а), (б) и (34) функции $\lambda = \lambda(x)$, $\mu = \mu(x) \geq c > 0 \quad \forall x \in \overline{V}$. Кроме того, непосредственным вычислением убеждаемся в том, что в этих же условиях $\lambda_0 = \lambda_0(x)$, $\mu_0 = \mu_0(x)$, $\beta_0 = \beta_0(x) \geq c > 0 \quad \forall x \in \overline{V}$. Тогда выражения в квадратных скобках в (35) представляют собой положительно определенные квадратичные формы относительно переменных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Следовательно, $|\Delta_j| \geq c > 0 \quad (j = 2, 3) \quad \forall y \in \overline{S_R}, \quad \forall \theta \in \partial S_1$, т.е. в случае изотропных неоднородных упругих тел условия (28) выполняются.

В общем случае определители Δ_2, Δ_3 также можно представить в виде

$$\Delta_2 = \gamma_j^2 Q_j, \quad \Delta_3 = \gamma_j^2 \gamma_k^2 Q_{jk}, \quad j \leq k,$$

где $Q_j, Q_{jk} \quad (j \leq k, j, k = \overline{1, 3})$ — квадратичные формы относительно переменных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, выражения которых из-за их громоздкости здесь не выписываем. Если упругие характеристики B^{jknm} таковы, что Q_j, Q_{jk} — положительно определенные квадратичные формы, то условия (28) также будут выполнены.

Таким образом, доказана основная

Теорема. Пусть выполнены условия (а), (б), (с), (6) и неравенства (28), (32). Тогда задача I имеет единственное обобщенное решение $u = (u_1, u_2, u_3) \in W_p^{(2)}(V)$, $p > 3$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Новожилов В.В. *Основы нелинейной теории упругости* (Гостехиздат, Л.–М., 1948).
- [2] Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелешвили М.О., Бургуладзе Т.В. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости* (Наука, М., 1976).
- [3] Партон В.З., Перлин П.И. *Методы математической теории упругости* (Наука, М., 1981).
- [4] Фикера Г. *Теоремы существования в теории упругости* (Мир, М., 1974).
- [5] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике* (Наука, М., 1980).
- [6] Съярле Ф. *Математическая теория упругости* (Мир, М., 1992).
- [7] Александров А.Я., Соловьев Ю.И. *Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного)* (Наука, М., 1978).

- [8] Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. *Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2008).
- [9] Тимергалиев С.Н. *Об одном подходе к исследованию разрешимости краевых задач для системы дифференциальных уравнений пространственной теории упругости*, Дифференц. уравнения **52** (4), 544–548 (2016).
- [10] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. 5-е изд. доп. (Наука, М., 1988).
- [11] Михлин С.Г. *Курс математической физики* (Наука, М., 1968).
- [12] Михлин С.Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения* (Физматгиз, М., 1962).
- [13] Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений* (Гостехиздат, М., 1956).

Самат Низаметдинович Тимергалиев

*Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия,*

e-mail: Samat_tim@mail.ru

Ринат Султанович Якушев

*Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

e-mail: Sultanich@km.ru

S.N. Timergaliev and R.S. Yakushev

On existence of solutions to spatial nonlinear boundary-value problems for arbitrary elastic inhomogeneous anisotropic body

Abstract. We study the solvability of a nonlinear boundary-value problem for systems of nonlinear partial differential equations of second order. The aim of the work is the proof the theorem existence for solutions. The problem is reduced to a system of three-dimensional nonlinear singular integral equations, whose solvability can be proved with the use of the symbol of a singular operator and the principle of compressed mappings.

Keywords: elastic inhomogeneous anisotropic body, equilibrium equations, boundary-value problem, three-dimensional singular integral equations, symbol singular operator, existence theorem.

Samat Nizametdinovich Timergaliev

*Kazan State Achitecture and Civil Engineering University,
1 Zelyonaya str., Kazan, 420043 Russia,*

e-mail: Samat_tim@mail.ru

Rinat Sultanovich Yakushev

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: Sultanich@km.ru