Общероссийский математический портал

И. А. Бикчантаев, Двоякопериодическая задача о “скачке” для линейного эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 2, 13–20

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-13-20>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 18:11:52

И.А. БИКЧАНТАЕВ

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА “О СКАЧКЕ” ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. Для однородного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа с постоянными коэффициентами исследуется краевая задача о нахождении двоякопериодических решений по заданным скачкам самих решений и их производных на гладком, а также на неспрямляемом замкнутом контуре. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи, получены явные формулы для ее решения.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, краевая задача, двоякопериодическая функция.

УДК: 517.544

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-2-13-20

Введение. Пусть

$$L = \sum_{k=0}^2 a_k \frac{\partial^2}{\partial x^{2-k} \partial y^k}$$

— эллиптический оператор с постоянными комплексными коэффициентами a_0, a_1, a_2 . Эллиптичность означает, что $a_2 \neq 0$ и характеристический многочлен $a_0 + a_1 s + a_2 s^2$ не имеет вещественных корней. Обозначим корни этого многочлена через s_1 и s_2 . Будем предполагать, что они различны и $\operatorname{Im} s_q > 0$, $q = 1, 2$. Рассмотрим уравнение

$$Lf = 0. \quad (1)$$

Действительная и мнимая части решения f этого уравнения удовлетворяют основному уравнению плоской анизотропной теории упругости ([1], с. 32).

В статье изучается двоякопериодическая задача сопряжения для решений этого уравнения.

1. Двоякопериодические решения уравнения (1). Пусть ω_1 и ω_2 — комплексные числа такие, что $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$. Они порождают двоякопериодическую группу P_2 преобразований $\omega(z) = z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, с основными периодами ω_1 и ω_2 . Чтобы получить одну из фундаментальных областей R_0 группы P_2 возьмем произвольную точку $\xi \in \mathbb{C}$ и построим параллелограмм с вершинами $\xi, \xi + \omega_1, \xi + \omega_1 + \omega_2, \xi + \omega_2$. Противоположные стороны этого параллелограмма связаны преобразованиями $z \rightarrow z + \omega_1$ и $z \rightarrow z + \omega_2$, порождающими всю группу P_2 . Для определенности будем считать, что начало координат находится в R_0 .

Изучим решения уравнения (1), инвариантные относительно группы P_2 .

Пусть Ω — открытое множество в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, инвариантное относительно группы P_2 .

Общее решение уравнения (1) на множестве Ω может быть записано в виде [2]

$$f(z) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2), \quad (2)$$

где $z_q = T_q(z) := x + s_q y$, $q = 1, 2$, — аффинное преобразование плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, сохраняющее ориентацию, φ_q — аналитические функции в $T_q(\Omega)$. Положим $\omega_{kj} := T_j(\omega_k)$, $k, j = 1, 2$. Для единственности представления (2) можно считать, что $\varphi_2(a_2) = 0$, где $a_2 := T_2(a)$, $a \in \Omega$. Если $f(z)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$, то точку a можно брать и на границе $\partial\Omega$ множества Ω .

Следуя Л.И. Чибриковой ([3], с. 213), функцию $g(z)$ будем называть квазипериодической, если при изменении аргумента z на ω она приобретает некоторое постоянное слагаемое η , т. е. $g(z + \omega) - g(z) = \eta$.

Лемма. Если $f(z)$ есть регулярное в Ω решение уравнения (1), инвариантное относительно группы P_2 , то функции $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ квазипериодические с циклическими постоянными $-\varphi_2(a_2 + \omega_{k2})$ и $\varphi_2(a_2 + \omega_{k2})$ соответственно.

Доказательство. Из равенств $f(z + \omega_k) = f(z)$, $k = 1, 2$, и представления (2) получаем

$$\varphi_1(z_1 + \omega_{k1}) + \varphi_2(z_2 + \omega_{k2}) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2), \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Дифференцируя это равенство по $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$ получаем

$$\varphi'_1(z_1 + \omega_{k1}) \frac{\partial z_1}{\partial \bar{z}_2} = \varphi'_1(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial \bar{z}_2}, \quad \varphi'_2(z_2 + \omega_{k2}) \frac{\partial z_2}{\partial \bar{z}_1} = \varphi'_2(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial \bar{z}_1},$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_q} = \frac{i}{2\operatorname{Im} s_q} \left(\frac{\partial}{\partial y} - s_q \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad q = 1, 2, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \bar{z}_2} = \frac{s_2 - s_1}{s_2 - \bar{s}_2}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial \bar{z}_1} = \frac{s_1 - s_2}{s_1 - \bar{s}_1}.$$

Отсюда следует, что функции φ'_1 и φ'_2 двоякопериодические. Из равенств (3) и $\varphi_2(a_2) = 0$ следует квазипериодичность функций φ_1 и φ_2 с циклическими постоянными $-\varphi_2(a_2 + \omega_{k2})$ и $\varphi_2(a_2 + \omega_{k2})$:

$$\varphi_1(z_1 + \omega_{k1}) - \varphi_1(z_1) = -\varphi_2(a_2 + \omega_{k2}), \quad \varphi_2(z_2 + \omega_{k2}) - \varphi_2(z_2) = \varphi_2(a_2 + \omega_{k2}), \quad z \in \Omega. \quad \square$$

2. Двоякопериодическая задача “о скачке” для аналитических функций. Пусть дан гладкий замкнутый контур Γ_0 , лежащий внутри параллелограмма периодов R_0 , Γ есть объединение Γ_0 и всех конгруэнтных ему относительно группы P_2 контуров, D^+ — объединение счетного числа ограниченных односвязных областей, границами которых служат компоненты контура Γ , $D^- = \mathbb{C} \setminus \bar{D}^+$. Рассмотрим следующую задачу ([3], с. 209–232; [4], р. 143–163; [5]).

Найти квазипериодическую ограниченную кусочно аналитическую функцию $\Phi(z)$ с заданными циклическими постоянными α_1 и α_2 , непрерывно продолжимую на Γ из областей D^+ и D^- и имеющую на Γ заданный скачок

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (4)$$

где $g(t) \in H_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu \leq 1$, — функция, инвариантная относительно преобразований группы P_2 .

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (4) является выполнение равенства

$$\int_{\Gamma_0} g(\tau) d\tau = \alpha_2 \omega_1 - \alpha_1 \omega_2. \quad (5)$$

При этом решение поставленной задачи определяется формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} g(\tau) \zeta(\tau - z) d\tau + C + \frac{z}{2\pi i} (\eta_1 \alpha_2 - \eta_2 \alpha_1).$$

Здесь C — произвольная постоянная, $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса с циклическими постоянными $\eta_1 = \zeta(z + \omega_1) - \zeta(z)$ и $\eta_2 = \zeta(z + \omega_2) - \zeta(z)$.

Отсюда при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$ вытекает следующий результат. Условие

$$\int_{\Gamma_0} g(\tau) d\tau = 0 \quad (6)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы задача (4) имела ограниченное двоякопериодическое решение

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} g(\tau) \zeta(\tau - z) d\tau + C. \quad (7)$$

3. Двоякопериодическая задача сопряжения для уравнения (1) на гладком контуре. Пусть Γ_0 — гладкий замкнутый контур, лежащий внутри параллелограмма периодов R_0 и ориентированный против часовой стрелки. Будем считать, что начало координат лежит на Γ_0 . Обозначим через S_0^+ конечную область, ограниченную контуром Γ_0 , $S_0^- = R_0 \setminus \overline{S_0^+}$, S^+ есть объединение S_0^+ и всех конгруэнтных ей областей относительно группы параллельных переносов, порожденной преобразованиями $z \rightarrow z + \omega_k$, $k = 1, 2$, Γ есть объединение Γ_0 и всех конгруэнтных ему контуров и S^- есть дополнение множества $\overline{S^+}$ до $\mathbb{C}$.

Задача формулируется следующим образом. Требуется определить двоякопериодическое ограниченное кусочно регулярное решение $f(z)$ уравнения (1) с линией скачков Γ , предельные значения которого на Γ принадлежат классу $C^1(\Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям

$$f^+(t) = f^-(t) + g_0(t), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} f^+(t) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} f^-(t) + g_1(t), \quad t \in \Gamma, \quad (8)$$

где $g_0, g_1 \in H_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu \leq 1$, — двоякопериодические функции с основными периодами ω_1, ω_2 .

Для единственности представления (2) будем считать, что $\varphi_2(0) = 0$. Из представления (2) и второго из соотношений (8) получаем краевую задачу сопряжения для определения двоякопериодической с основными периодами $\omega_{k2} = T_2(\omega_k)$, $k = 1, 2$, кусочно аналитической функции $\varphi'_2(z_2)$

$$\varphi'^+_2(t_2) = \varphi'^-_2(t_2) + g_1(t) \frac{s_1 - \bar{s}_1}{s_1 - s_2}, \quad t_2 = T_2(t), \quad t \in \Gamma. \quad (9)$$

Согласно формулам (6) и (7) решение задачи (9) имеет вид

$$\varphi'_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \frac{s_1 - \bar{s}_1}{s_1 - s_2} \int_{\Gamma_0} g_1(\tau) \zeta(T_2(\tau) - z_2) d\tau + C \quad (10)$$

при условии, что

$$\int_{\Gamma_0} g_1(\tau) d\tau = 0. \quad (11)$$

Поскольку однородная ($g_0 = g_1 = 0$) задача (8) имеет лишь решение $f = \text{const}$, то $C = 0$. Из (10) с учетом нормировки $\varphi_2(0) = 0$ получаем

$$\varphi_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \frac{s_1 - \bar{s}_1}{s_1 - s_2} \int_{\Gamma_0} g_1(\tau) d\tau \int_0^{z_2} \zeta(\tau_2 - z_2) dz_2, \quad z \in S_0^+ \cup S_0^-, \quad \tau_2 := T_2(\tau). \quad (12)$$

Путь интегрирования в (12) лежит соответственно в $T_2(S_0^+)$, когда $z \in S_0^+$, и в $T_2(S_0^-)$, когда $z \in S_0^-$.

При $t \in \Gamma_0$

$$\varphi_2^+(t_2) - \varphi_2^-(t_2) = \frac{1}{2\pi i} \frac{s_1 - \bar{s}_1}{s_1 - s_2} \int_{\Gamma_0} g_1(\tau) d\tau \left(\int_0^{t_2^+} \zeta(\tau_2 - z_2) dz_2 - \int_0^{t_2^-} \zeta(\tau_2 - z_2) dz_2 \right), \quad (13)$$

где $t_2^\pm$ означает предельное положение точки t_2 на $T_2(\Gamma_0)$ из $T_2(S_0^\pm)$.

Из представления (2), леммы и первого из соотношений (8) получаем задачу сопряжения для определения квазипериодической функции φ_1 с циклическими постоянными $-\varphi_2(\omega_{k2})$, $k = 1, 2$,

$$\varphi_1^+(T_1(t)) = \varphi_1^-(T_1(t)) + g_0(t) + \varphi_2^-(T_2(t)) - \varphi_2^+(T_2(t)), \quad t \in \Gamma. \quad (14)$$

Положим

$$\tilde{g}_0(t) := g_0(t) + \varphi_2^-(t_2) - \varphi_2^+(t_2). \quad (15)$$

Тогда согласно равенству (5) необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (14) имеет вид

$$\int_{\Gamma_0} \tilde{g}_0(\tau) d\tau = -\omega_1 \varphi_2(\omega_{22}) + \omega_2 \varphi_2(\omega_{12}), \quad (16)$$

где

$$\varphi_2(\omega_{k2}) = \frac{1}{2\pi i} \frac{s_1 - \bar{s}_1}{s_1 - s_2} \int_{\Gamma_0} g_1(\tau) d\tau \int_0^{\omega_{k2}} \zeta(\tau_2 - z_2) dz_2, \quad k = 1, 2.$$

Учитывая (13) и (15), соотношение (16) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} g_0(\tau) d\tau - \frac{1}{2\pi i} \frac{s_1 - \bar{s}_1}{s_1 - s_2} \int_{\Gamma_0} g_1(\sigma) d\sigma \int_{\Gamma_0} \left(\int_0^{\tau_2^+} \zeta(T_2(\sigma) - z_2) dz_2 - \int_0^{\tau_2^-} \zeta(T_2(\sigma) - z_2) dz_2 \right) d\tau = \\ = -\omega_1 \varphi_2(\omega_{22}) + \omega_2 \varphi_2(\omega_{12}). \end{aligned} \quad (17)$$

При выполнении условия (17) решение задачи (14) имеет вид

$$\varphi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \tilde{g}_0(\tau) \zeta(T_1(\tau) - z_1) d\tau - \frac{z_1}{2\pi i} (\eta_1 \varphi_2(\omega_{22}) - \eta_2 \varphi_2(\omega_{12})) + C_1, \quad (18)$$

где η_1, η_2 — циклические постоянные дзета-функции Вейерштрасса $\zeta(z)$, C_1 — произвольная постоянная.

Теорема 1. *Для разрешимости задачи (8) необходимо и достаточно, чтобы правые части краевых условий g_0 и g_1 удовлетворяли условиям разрешимости (11) и (17). При их выполнении решение задачи определяется формулами (2), (12), (15), (18). Общее решение задачи (8) зависит от одной произвольной постоянной.*

4. Задача “о скачке” для аналитических функций в случае неспрямляемого контура Γ . Здесь будем опираться на результаты работ Б.А. Каца, Д.Б. Каца и Ф.Н. Гарифьянова [6]–[9].

Пусть Γ — простая замкнутая кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, разбивающая ее на области $D^\pm$, $\infty \in D^-$, а μ — мера на $\mathbb{C}$. Обозначим через $B(t, r)$ открытый круг с центром в точке $t \in \mathbb{C}$ радиуса r , $B^\pm(t, r) = B(t, r) \cap D^\pm$. Показателем Марцинкевича кривой Γ в точке $t \in \Gamma$ относительно меры μ называется величина

$$\mathbf{m}(\Gamma; t; \mu) := \sup \left\{ p : \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(t, r)} \frac{d\mu}{\text{dist}^p(z, \Gamma)} < \infty \right\},$$

а внутренним и внешним показателями Марцинкевича — величины

$$\mathbf{m}^{\pm} : (\Gamma; t; \mu) := \sup \left\{ p : \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B^{\pm}(t, r)} \frac{d\mu}{\text{dist}^p(z, \Gamma)} < \infty \right\}.$$

Пусть на кривой Γ задана действительная функция $v : \Gamma \rightarrow (0, 1]$. Заданная на Γ функция $f(t)$ относится к классу $H_v^{\text{loc}}(\Gamma)$, если у каждой точки $t \in \Gamma$ существует окрестность, в которой $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $v(t)$. Положим $\mathbf{m}^*(\Gamma; t) := \max\{\mathbf{m}^+(\Gamma; t); \mathbf{m}^-(\Gamma; t)\}$. В дальнейшем будем считать, что

$$v(t) > 1 - \frac{1}{2}\mathbf{m}^*(\Gamma; t), \quad t \in \Gamma. \quad (19)$$

Пусть на Γ задана еще одна функция $\mu : \Gamma \rightarrow (0, 1]$, а класс $\mathcal{H}_{\mu}(\Gamma)$ состоит из заданных в окрестности Γ функций $\Phi(z)$ со следующим свойством: у каждой точки $t \in \Gamma$ есть окрестность N такая, что $\Phi(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\mu(t)$ в $N \cap D^+$ и в $N \cap D^-$. В дальнейшем будем считать, что

$$\text{dmh}(\Gamma) - 1 < \mu(t) < \frac{m^*(\Gamma; t) + 2v(t) - 2}{m^*(\Gamma; t)}, \quad (20)$$

где $\text{dmh}(\Gamma)$ — размерность Хаусдорфа кривой Γ .

Непрерывная в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функция $F(z)$ называется p -квазирешением задачи “о скачке” для аналитических функций

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (21)$$

если 1) она имеет компактный носитель, 2) в точках контура Γ функция F имеет предельные значения $F^+(t)$ и $F^-(t)$ слева и справа соответственно, удовлетворяющие краевому условию

$$F^+(t) - F^-(t) = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (22)$$

3) дифференцируема в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, а ее производная $\partial F(z)/\partial \bar{z}$ интегрируема в степени p .

В работах [6], [7] дано следующее обобщение понятия контурного интеграла $\int_{\Gamma} f \omega dz$ на случай неспрямляемого контура Γ . Для замкнутой спрямляемой кривой Γ известно тождество

$$\int_{\Gamma} f \omega dz = - \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial F(z) \omega}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z}$$

для любой функции $\omega \in C_0^{\infty}(\mathbb{C})$. Для неспрямляемой кривой правую часть этого равенства можно считать определением левой, т. е. ввести распределение

$$\int_{\Gamma}^{(S)} f \cdot dt : C_0^{\infty}(\mathbb{C}) \ni \omega \mapsto \int_{\Gamma}^{(S)} f \omega dz = - \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial F(z) \omega}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z}. \quad (23)$$

Интеграл типа Коши можно построить как результат применения распределения (23) к функции $\omega \in C^{\infty}(\mathbb{C})$, совпадающей с ядром Коши $(2\pi i)^{-1}(t - z)^{-1}$, $z \notin \Gamma$, в некоторой окрестности Γ . Тогда если $g \in H_v^{\text{loc}}(\Gamma)$ и выполняются неравенства (19) и (20), то задача (21) имеет единственное исчезающее на бесконечности решение, которое дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma}^{(S)} \frac{g(t) dt}{t - z}.$$

Пусть теперь Γ_0 и Γ означают то же, что и в п. 2, за исключением того, что эти кривые гладкие. Здесь они неспрямляемые. В статье [9] фактически доказана следующая теорема.

Если $g \in H_v^{\text{loc}}(\Gamma)$ инвариантна относительно группы P_2 , выполнены условия (19), (20) и

$$\int_{\Gamma_0}^{(S)} g(\tau) d\tau = \alpha_2 \omega_1 - \alpha_1 \omega_2, \quad (24)$$

то задача “о скачке” (4) имеет квазипериодическое решение

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0}^{(S)} g(\tau) \zeta(\tau - z) d\tau + C + \frac{z}{2\pi i} (\eta_1 \alpha_2 - \eta_2 \alpha_1)$$

с заданными циклическими постоянными α_1 и α_2 . Здесь C — произвольная постоянная, η_1, η_2 — циклические постоянные дзета-функции Вейерштрасса. Это решение единственно с точностью до произвольной аддитивной постоянной в классе $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$. В частности, при отыскании двоякопериодических решений условие (24) заменяется на

$$\int_{\Gamma_0}^{(S)} g(\tau) d\tau = 0.$$

В статье [9] задача “о скачке” решена именно в этом случае. Обобщение на случай квазипериодических решений не составляет труда.

5. Двоякопериодическая задача сопряжения для уравнения (1) на неспрямляемом контуре. Для решения $f(z)$ уравнения (1) рассмотрим задачу (8) в случае, когда кривая Γ неспрямляемая. Здесь будем предполагать, что g_0, g_1 — двоякопериодические функции с основными периодами ω_1, ω_2 , принадлежат классу $H_v^{\text{loc}}(\Gamma)$ и выполняются условия (19) и (20). От искомого решения $f(z)$ будем требовать, чтобы $f(z)$ и $\partial f(z)/\partial \bar{z}_1$ принадлежали классу $\mathcal{H}_\mu(\Gamma)$ в окрестности Γ . Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1 с заменой контурного интеграла $\int_{\Gamma_0}$ на обобщенный $\int_{\Gamma_0}^{(S)}$, приходим к следующему результату.

Теорема 2. Пусть $g_0, g_1 \in H_v^{\text{loc}}(\Gamma)$ — двоякопериодические функции с основными периодами ω_1, ω_2 . Для разрешимости задачи (8) необходимо и достаточно, чтобы правые части g_0 и g_1 краевых условий удовлетворяли условиям разрешимости

$$\int_{\Gamma_0}^{(S)} g_1(\tau) d\tau = 0$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0}^{(S)} g_0(\tau) d\tau - \frac{1}{2\pi i} \frac{s_1 - \bar{s}_1}{s_1 - s_2} \int_{\Gamma_0}^{(S)} g_1(\sigma) d\sigma \int_{\Gamma_0}^{(S)} \left(\int_0^{\tau_2^+} \zeta(T_2(\sigma) - z_2) dz_2 - \right. \\ \left. - \int_0^{\tau_2^-} \zeta(T_2(\sigma) - z_2) dz_2 \right) d\tau = -\omega_1 \varphi_2(\omega_{22}) + \omega_2 \varphi_2(\omega_{12}). \end{aligned}$$

При их выполнении решение задачи определяется формулой

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0}^{(S)} \tilde{g}_0(\tau) \zeta(T_1(\tau) - z_1) d\tau - \frac{z_1}{2\pi i} (\eta_1 \varphi_2(\omega_{22}) - \eta_2 \varphi_2(\omega_{12})) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \frac{s_1 - \bar{s}_1}{s_1 - s_2} \int_{\Gamma_0}^{(S)} g_1(\tau) d\tau \int_0^{z_2} \zeta(\tau_2 - z_2) dz_2 + C, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная.

Различные варианты теоремы единственности для решений уравнения (1) были установлены в статьях [10]–[14].

При $s_1 = s_2 = i$ уравнение (1) определяет полианалитические функции порядка 2. Для однопериодических полианалитических функций краевая задача сопряжения была рассмотрена в статьях [15], [16].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лехницкий С.Г. *Анизотропные пластинки* (ОГИЗ, М.–Л., 1947).
- [2] Бикчантаев И.А. *Некоторые краевые задачи для одного эллиптического уравнения*, ДАН СССР **209** (5), 1013–1016 (1973).
- [3] Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1977).
- [4] Lu Jian-Ke. *Boundary value problems for analytic functions* (World Sci, Singapore, 1993).
- [5] Васильев А.В. *Периодический аналог краевой задачи Римана*, Вестн. Тамбовск. ун-та **18** (5), 2466–2468 (2013).
- [6] Кац Д.Б. *Показатели Марцинкевича и их приложение в краевых задачах*, Изв. вузов. Матем., №3, 68–71 (2014).
- [7] Кац Д.Б. *Новые метрические характеристики непрямоугольных кривых и их приложения*. Сиб. матем. журн. **57** (2), 364–372 (2016).
- [8] Kats B.A., Katz D.B. *Jump problem for differentiable functions with applications*, Lobachevskii J. Math. **38** (3), 456–465 (2017).
- [9] Garifyanov F.N., Kats B.A., Katz D.B. *Doubly periodic Riemann boundary value problem for nonrectifiable curves*, Lobachevskii J. Math. **36** (2), 120–126 (2015).
- [10] Бикчантаев И.А. *О множествах единственности для эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами*, Дифференц. уравнения **47** (2), 278–282 (2011).
- [11] Бикчантаев И.А. *О граничных теоремах единственности для линейного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами*, Дифференц. уравнения. **50** (2), 217–222 (2014).
- [12] Бикчантаев И.А. *Об одной внутренней теореме единственности для линейного эллиптического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*, Изв. вузов. Матем., №5, 17–21 (2015).
- [13] Бикчантаев И.А. *Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка во внешности эллипса*, Дифференц. уравнения **53** (5), 630–636 (2017).
- [14] Бикчантаев И.А. *Теорема единственности для линейного эллиптического уравнения второго порядка*, Изв. вузов. Матем., №7, 14–18 (2017).
- [15] Wang Yufeng and Wang Yanjin. *On Riemann problems for single-periodic polyanalytic functions*, Math. Nachr. **287** (16), 1886–1915 (2014).
- [16] Han Pengju, Wang Yufeng. *A note on Riemann problems for single-periodic polyanalytic functions*, Math. Nachr. **289** (13), 1594–1605 (2016).

Ильдар Ахмедович Бикчантаев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: ibikchan@kpfu.ru

*I.A. Bikchantaev***Doubly periodic problem “on a jump” for linear elliptic second order equation with constant coefficients**

Abstract. For homogeneous differential equation of the second order with constant coefficients we investigate boundary-value problem of finding the doubly periodic solutions for a given jump, and for their derivatives on smooth and nonrectifiable closed contour. We obtain necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem and explicit formulas for its solving.

Keywords: elliptic equation, boundary-value problem, doubly periodic function.

Il'dar Akhmedovich Bikchantaev

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: ibikchan@kpfu.ru