Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Н. Кривоносов, В. А. Лукьянов, Основная теорема для (анти)автодуальной конформной связности без кручения на четырехмерном многообразии, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 2, 29–38

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-29-38>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:58:51

Л.Н. КРИВОНОСОВ, В.А. ЛУКЬЯНОВ

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ (АНТИ)АВТОДУАЛЬНОЙ КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ

Аннотация. Получены результаты, имеющие место на четырехмерном многообразии конформной связности без кручения при всевозможных сигнатурах угловой метрики. Доказано, что из четырех слагаемых структурной формулы разложения основного тензора три равнодуальны, одно косодуально. На основе этого результата найдены условия (анти)автодуальности внешних 2-форм, являющихся частью компонент матрицы конформной кривизны. С помощью последнего результата доказана основная теорема: конформная связность без кручения на четырехмерном многообразии при сигнатурах угловой метрики $s = \pm 4; 0$ (анти)автодуальна тогда и только тогда, когда таковы же тензор Вейля угловой метрики и внешняя 2-форма Φ_0^0 , и выполняются уравнения Эйнштейна и Максвелла. В частности, нормальная конформная связность Картана (анти) автодуальна тогда и только тогда, когда таков же тензор Вейля угловой метрики.

Ключевые слова: конформная связность, (анти)автодуальность, тензор Вейля, конформная кривизна, уравнения Эйнштейна, уравнения Максвелла.

УДК: 514.756

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-2-29-38

ВВЕДЕНИЕ

На каждой карте некоторого атласа четырехмерного многообразия задана квадратная матрица 6-го порядка

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_i & 0 \\ \omega^j & \omega_i^j & -\eta^{jk}\omega_k \\ 0 & -\eta_{ik}\omega^k & -\omega_0^0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{ik}\omega_j^k + \eta_{jk}\omega_i^k = 0, \quad (1)$$

состоящая из 1-форм, зависящих от координат карты; $\eta_{ii} = \pm 1$, $\eta_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Матрицы (1) задают на четырехмерном многообразии *конформную связность* сигнатуры s , где s — разность между числом положительных и числом отрицательных η_{ii} . Само многообразие в этом случае называется *пространством конформной связности*. Э. Картан, введший в математику понятие конформной связности, рассматривал пространства произвольной размерности, но только с положительной сигнатурой: $\eta_{ii} = 1$. Понятие (анти)автодуальности возможно только в размерности 4, поэтому все индексы пробегают значения от 1 до 4. Пфаффовы формы ω^j считаются линейно независимыми. Без ограничения общности всегда на каждой карте можно положить $\omega_0^0 = 0$ ([1], с. 175). Матрица конформной связности

(1) порождает матрицу конформной кривизны

$$\Phi \equiv d\Omega + \Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} \Phi_0^0 & \Phi_i^j & 0 \\ \Phi_j^i & \Phi_i^j & -\eta^{jk}\Phi_k^i \\ 0 & -\eta_{ik}\Phi^k & -\Phi_0^0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{ik}\Phi_j^k + \eta_{jk}\Phi_i^k = 0, \quad (2)$$

состоящую из внешних 2-форм. Формы Φ^j образуют геометрический объект, называемый кручением ([1], с. 169). Рассматриваем только пространства *без кручения*, когда на каждой карте $\Phi^j = 0$. В этом случае компоненты связности ω_i^j не играют самостоятельной роли, так как являются формами Кристоффеля квадратичной формы

$$\psi = \eta_{ij}\omega^i\omega^j, \quad (3)$$

называемой угловой метрикой, и вычисляются через ω^j из равенств $\Phi^j = d\omega^j + \omega_k^j \wedge \omega^k = 0$. При $\Phi^j = 0$ внешняя 2-форма Φ_0^0 также образует объект, который называем зарядом. Пространства конформной связности без кручения, в которых $\Phi_0^0 = 0$, называются эквиконформными ([2], с. 46).

Если написать разложение 1-форм ω_i из (1) по базисным 1-формам ω^j в виде $\omega_i = b_{ij}\omega^j$, то для компонент матрицы кривизны Φ (2) получим следующие выражения:

$$\Phi_0^0 = d\omega_0^0 + \omega_i \wedge \omega^i = \omega_i \wedge \omega^i = b_{ij}\omega^j \wedge \omega^i = \frac{1}{2}b_{[ij]}\omega^j \wedge \omega^i, \quad b_{[ij]} \equiv b_{ij} - b_{ji}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_i^j &\equiv \frac{1}{2}\Phi_{ipq}^j \omega^p \wedge \omega^q = d\omega_i^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k + \omega^j \wedge \omega_i + \eta^{jm}\eta_{ik}\omega_m \wedge \omega^k = \\ &= R_i^j + \omega^j \wedge \omega_i + \eta^{jm}\eta_{ik}\omega_m \wedge \omega^k = \frac{1}{2}(R_{ipq}^j + \delta_p^j b_{iq} - \delta_q^j b_{ip} + \eta^{jk}b_{kp}\eta_{iq} - \eta^{jk}b_{kq}\eta_{ip})\omega^p \wedge \omega^q, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Phi_i = d\omega_i - \omega_i^k \wedge \omega_k = \nabla\omega_i = b_{ij|k}\omega^k \wedge \omega^j = \frac{1}{2}b_{i[j|k]}\omega^k \wedge \omega^j. \quad (6)$$

Здесь R_{ipq}^j — тензор Римана квадратичной формы угловой метрики (3), ∇ — внешний ковариантный дифференциал относительно аффинной связности, задаваемой формами ω_i^j , а δ_i^j — символ Кронекера. Пространства без кручения, в которых кроме $\Phi_0^0 = 0$ выполняется условие

$$\Phi_{ijk}^k = 0, \quad (7)$$

Э. Картан ([1], с. 178) назвал *нормальными* пространствами конформной связности.

С помощью величин

$$\varepsilon_{ij}^{kl} \equiv \delta_{1234}^{klpq}\eta_{pi}\eta_{qj} \quad (8)$$

(δ_{1234}^{klpq} — символ Кронекера, равный ± 1 , в зависимости от четности перестановки k, l, p, q чисел 1, 2, 3, 4, и равный 0, если среди чисел k, l, p, q есть одинаковые) определяется оператор $*$ Ходжса, действующий на множестве внешних 2-форм $\theta = a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j$ по правилу

$$*\theta = \frac{1}{2}a_{ij}\varepsilon_{kl}^{ij}\omega^k \wedge \omega^l. \quad (9)$$

Для сигнатур $s = \pm 2$ из (8) имеем $**\theta = -\theta$, а для сигнатур $s = \pm 4; 0$ имеем $**\theta = \theta$. Следовательно, для ненулевой 2-формы θ равенство $*\theta = \pm\theta$ возможно только для сигнатур $s = \pm 4; 0$. Именно этот случай рассматривается в данной статье. 2-форма θ называется *автодуальной* или *антиавтодуальной*, если соответственно $*\theta = \theta$ или $*\theta = -\theta$. Конформная связность (1) на 4-многообразии называется автодуальной или антиавтодуальной, если для матрицы кривизны (2) выполняются соответственно равенства $*\Phi = \Phi$ или $*\Phi = -\Phi$.

Основным аппаратом исследования является структурная формула, доказанная в ([3], с. 29),

$$\Phi_{ijmn} = W_{ijmn} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ E_{mn} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[mn]} - \frac{1}{24}(R - 6b)\eta_{ij} \circ \eta_{mn}. \quad (10)$$

Здесь $\Phi_{ijmn} \equiv \eta_{ik}\Phi_{jmn}^k$, W_{ijmn} — тензор Вейля квадратичной формы (3),

$$E_{mn} \equiv R_{mn} - b_{(mn)} + \frac{1}{2}b\eta_{mn} - \frac{1}{4}R\eta_{mn} \quad (11)$$

— конформный тензор Эйнштейна, $R_{mn} \equiv R_{mnk}^k$ — тензор Риччи, $R \equiv \eta^{mn}R_{mn}$, $b \equiv \eta^{mn}b_{mn}$, $b_{(mn)} \equiv b_{mn} + b_{nm}$,

$$a_{ij} \circ c_{mn} \equiv a_{im}c_{jn} + a_{jn}c_{im} - a_{in}c_{jm} - a_{jm}c_{in}, \quad (12)$$

кружком обозначено произведение Кулкарни–Номидзу двух произвольных двухвалентных тензоров a_{ij} и c_{mn} . Из второго равенства (2) и определения (5) следует, что величины Φ_{ijmn} в (10) кососимметричны как по паре индексов i, j , так и по паре m, n . Как следует из (12), этим же свойством обладает и тензор $a_{ij} \circ c_{mn}$ при любых a_{ij} и c_{mn} . Свертка (10) с $\eta^{in}\eta^{jm}$ ввиду бесследовости тензора Вейля $\eta^{in}W_{ijmn} = 0$ приводит к

$$F \equiv \eta^{jm}\Phi_{jmk}^k = R - 6b. \quad (13)$$

Внешним дифференцированием равенства (2) получаем *тождество Бианки*

$$d\Phi + \Omega \wedge \Phi - \Phi \wedge \Omega \equiv 0. \quad (14)$$

В нормальном пространстве конформной связности по определению имеем $b_{[mn]} = 0$, $\eta^{in}\Phi_{ijmn} = \Phi_{jmn}^n = 0$, поэтому и $F = \eta^{jm}\Phi_{jmk}^k = 0$. Следовательно, свертка (10) с η^{in} дает $\eta^{in}(\eta_{ij} \circ E_{mn}) = 0$. С помощью (12) отсюда получаем $E_{mn} = 0$, тогда (11) приводит к

$$R_{mn} - b_{(mn)} + \frac{1}{2}b\eta_{mn} - \frac{1}{4}R\eta_{mn} = 0.$$

Из (13) в силу $F = 0$ имеем $R = 6b$, поэтому окончательно получаем

$$R_{mn} = b_{(mn)} + \frac{1}{6}R\eta_{mn}, \quad R = 6b. \quad (15)$$

Это *уравнения Эйнштейна*.

Поясним цель данной работы. Вопросам дуальности на псевдоримановых четырехмерных многообразиях или на их частных случаях, например, келеровых многообразиях, посвящено много работ [4]–[9]. В статьях [10], [11] изучается дуальность на четырехмерных многообразиях с конформной структурой сигнатуры 0. Однако нам неизвестны работы, посвященные дуальности на многообразиях конформной связности. Все авторы едины в определении дуальности на многообразиях, допускающих оператор * Ходжа: матрица Φ кривизны связности должна удовлетворять равенству $*\Phi = \pm\Phi$. Но в определении дуальности для 4-псевдометрики согласия нет. В работе [6] риманова метрика называется дуальной, если дуальны внешние 2-формы римановой кривизны $*R_i^j = \pm R_i^j$. Но в [4] метрика называется дуальной, если таков же тензор Вейля конформной кривизны этой метрики. В работах [10], [11] оператор Ходжа вообще не упоминается, а дуальность конформной структуры определяется, как и в [4], через дуальность тензора Вейля. Однако матрица кривизны Φ конформной структуры содержит в качестве компонент помимо внешних 2-форм $\Phi_i^j = \frac{1}{2}W_{ikl}^j\omega^k \wedge \omega^l$, явно выражающихся через тензор Вейля W_{ikl}^j , еще и 2-формы Φ_i , которые хотя и выражаются через тензор Вейля, но сложным образом. Оказывается, из дуальности 2-форм Φ_i^j вытекает такого же вида дуальность 2-форм Φ_i . Это и составляет содержание теоремы 5, полученной как следствие основной теоремы 3. Таким образом, основная теорема показывает, что необходимо лишь одно определение дуальности через оператор Ходжа,

все другие определения дуальности к нему сводятся. Кроме того, основная теорема позволяет получить более простые условия дуальности, чем те, которые упомянуты в главном определении. Они будут указаны в последующих публикациях.

1. РАВНОДУАЛЬНОСТЬ И КОСОДУАЛЬНОСТЬ

Для упрощения работы с оператором Ходжа удобно использовать собирательные индексы так же, как в ([12], с. 109), для сигнатур $s = \pm 4$

$$12 \longrightarrow 1, \quad 13 \longrightarrow 2, \quad 14 \longrightarrow 3, \quad 34 \longrightarrow 4, \quad 42 \longrightarrow 5, \quad 23 \longrightarrow 6,$$

а для сигнатуры $s = 0$

$$12 \longrightarrow 1, \quad 13 \longrightarrow 2, \quad 14 \longrightarrow 3, \quad 34 \longrightarrow 4, \quad 24 \longrightarrow 5, \quad 32 \longrightarrow 6.$$

Тогда любой тензор a_{ijmn} , кососимметричный как по первой паре индексов, так и по второй, запишется в виде квадратной матрицы A шестого порядка. Например, $a_{1214} \longrightarrow a_{13} \in A$. В частности, оператор Ходжа (8) будет задаваться матрицей $[*] = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ блочного вида, где 0 , I — соответственно нулевая и единичная квадратные матрицы третьего порядка. Матрицу $[a_{ijmn}]$ произвольного тензора a_{ijmn} , кососимметричного как по левой паре индексов i, j , так и по правой паре индексов m, n , тоже целесообразно записывать в блочном виде $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где A, B, C, D — квадратные матрицы 3-го порядка. Символом a_{ijmn}^* ($*a_{ijmn}$) будем обозначать результат действия оператора Ходжа на правую (левую) пару индексов. Действие оператора Ходжа (8) на правую пару индексов $a_{ijmn}^* = \frac{1}{2}a_{ijpq}\varepsilon_{mn}^{pq}$ равносильно умножению матрицы $[a_{ijmn}]$ справа на матрицу $[*]$, а действие оператора Ходжа на левую пару индексов $*a_{ijmn} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^{pq}a_{pqmn}$ равносильно умножению матрицы $[a_{ijmn}]$ слева на матрицу $[*]$

$$[a_{ijmn}^*] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}, \quad (16a)$$

$$[*a_{ijmn}] = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}. \quad (16b)$$

Тензор a_{ijmn} называется равнодуальным (косодуальным), если

$$*a_{ijmn} = a_{ijmn}^* \quad (*a_{ijmn} = -a_{ijmn}^*). \quad (17)$$

Из (16) легко установить, что матрица равнодуального тензора a_{ijmn} имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad (18)$$

а для косодуального тензора имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & -A \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Из (16), (18) и (19) следует

Лемма 1. Если тензор a_{ijmn} равнодуален (косодуален), то таковы же $*a_{ijmn}$ и a_{ijmn}^* .

Найдем теперь условия равнодуальности (косодуальности) тензора $\eta_{ij} \circ a_{mn}$. При сигнатурах $s = \pm 4$ матрица тензора $\eta_{ij} \circ a_{mn}$ соответственно такова

$$[\eta_{ij} \circ a_{mn}] = \pm \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & a_{14} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{34} & -a_{14} & 0 & a_{12} \\ a_{42} & a_{43} & a_{11} + a_{44} & a_{13} & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{41} & a_{31} & a_{33} + a_{44} & -a_{32} & -a_{42} \\ a_{41} & 0 & -a_{21} & -a_{23} & a_{22} + a_{44} & -a_{43} \\ -a_{31} & a_{21} & 0 & -a_{24} & -a_{34} & a_{22} + a_{33} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

а для сигнатуры $s = 0$

$$[\eta_{ij} \circ a_{mn}] = \begin{pmatrix} -a_{11} - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} & 0 & a_{14} & -a_{13} \\ -a_{32} & a_{11} - a_{33} & -a_{34} & -a_{14} & 0 & -a_{12} \\ -a_{42} & -a_{43} & a_{11} - a_{44} & a_{13} & a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{41} & a_{31} & a_{33} + a_{44} & a_{32} & a_{42} \\ a_{41} & 0 & a_{21} & a_{23} & a_{22} - a_{44} & a_{43} \\ -a_{31} & -a_{21} & 0 & a_{24} & a_{34} & a_{22} - a_{33} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Из этих матриц, а также из (18) и (19) получаем следующие утверждения.

Лемма 2. Если тензор a_{mn} кососимметричен, то тензор $\eta_{ij} \circ a_{mn}$ равнодуален и при $s = \pm 4$, и при $s = 0$.

Лемма 3. Если тензор a_{mn} симметричен, то и при $s = \pm 4$, и при $s = 0$ тензор $\eta_{ij} \circ a_{mn}$ косодуален тогда и только тогда, когда $\eta^{ij} a_{ij} = 0$.

Лемма 4. Если тензор a_{mn} симметричен, то и при $s = \pm 4$, и при $s = 0$ тензор $\eta_{ij} \circ a_{mn}$ равнодуален тогда и только тогда, когда $a_{mn} = \lambda \eta_{mn}$.

Второе слагаемое формулы (10) $\frac{1}{2} \eta_{ij} \circ E_{mn}$ косодуально по лемме 3, так как из (11) следует, что $\eta^{ij} E_{ij} = 0$. Третье слагаемое формулы (10) $\frac{1}{2} \eta_{ij} \circ b_{[mn]}$ равнодуально в силу леммы 2. Четвертое слагаемое $\frac{1}{24} F \eta_{ij} \circ \eta_{mn}$ равнодуально по лемме 4. Что касается первого слагаемого, тензора Вейля, нетрудно проверить, что все известные его алгебраические свойства могут быть выражены следующим образом: его блочная матрица при $s = \pm 4; 0$ имеет вид

$$[W_{ijmn}] = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad (22)$$

причем матрицы A и B симметричны и имеют нулевые следы, $\text{tr } A = \text{tr } B = 0$ при сигнатуре $s = 0$ след нужно брать относительно матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а не относительно единичной матрицы. Следовательно, тензор Вейля в силу (18) равнодуален. Доказана

Теорема 1. Второе слагаемое структурной формулы (10) косодуально, остальные три слагаемых равнодуальны.

Эта же теорема справедлива и для сигнатур $s = \pm 2$ ([13], с. 401).

2. УСЛОВИЕ (АНТИ)АВТОДУАЛЬНОСТИ ВНЕШНИХ 2-ФОРМ Φ_i^j

Тензор a_{ijmn} , кососимметричный по парам индексов i, j и m, n , будем называть автодуальным (антиавтодуальным), если $a_{ijmn}^* = a_{ijmn}$ ($a_{ijmn}^* = -a_{ijmn}$).

Замечание. Так как в структурной формуле (10) все слагаемые либо равнодуальны, либо косодуальны, левая (анти)автодуальность $^* a_{ijmn} = a_{ijmn}$ ($^* a_{ijmn} = -a_{ijmn}$) не нужна: согласно (17) она не дает ничего нового. Структурная формула (10) не распространяется на произвольный тензор a_{ijmn} , кососимметричный по левой и правой парам индексов.

Согласно (16а) матрицы автодуального и антиавтодуального тензоров имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} A & A \\ C & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & -A \\ C & -C \end{pmatrix}.$$

Поэтому в силу (18) и (19) при $s = \pm 4; 0$ матрица автодуального равнодуального тензора имеет вид

$$[a_{ijmn}] = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}, \quad (23)$$

для антиавтодуального равнодуального тензора

$$[a_{ijmn}] = \begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix}, \quad (24)$$

для автодуального косодуального тензора

$$[a_{ijmn}] = \begin{pmatrix} A & A \\ -A & -A \end{pmatrix}, \quad (25)$$

для антиавтодуального косодуального

$$[a_{ijmn}] = \begin{pmatrix} A & -A \\ A & -A \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Теорема 2. Внешние 2-формы кривизны Φ_i^j (анти)автодуальны тогда и только тогда, когда 1) таковы же тензор Вейля W_{ijmn} и 2-форма Φ_0^0 ; 2) $E_{ij} = 0$, $F = 0$.

Условия 2) в силу формул (11) и (13) означают выполнение уравнений Эйнштейна (15). *Доказательство. Необходимость.* Пусть Φ_i^j автодуальны, $*\Phi_i^j = \Phi_i^j$. В силу линейности оператора Ходжа имеем $*(\eta_{ik}\Phi_j^k) = \eta_{ik}\Phi_j^k$, а последнее равенство равносильно

$$\Phi_{ijmn}^* = \Phi_{ijmn}. \quad (27)$$

Пусть Ψ — блочная матрица тензора Φ_{ijmn} , W — матрица тензора Вейля, K — матрица тензора $\frac{1}{2}\eta_{ij} \circ E_{mn}$, Q — матрица тензора $\frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[mn]}$, а P — матрица тензора $\frac{1}{24}F\eta_{ij} \circ \eta_{mn}$, тогда структурная формула (10) принимает вид

$$\Psi = W + K + Q + P. \quad (28)$$

Вследствие линейности оператора Ходжа имеем

$$\Psi^* = W^* + K^* + Q^* + P^*.$$

По теореме 1 K — матрица косодуального тензора, а W, Q, P — матрицы равнодуальных тензоров. Согласно лемме 1 таковы же и матрицы K^*, W^*, Q^*, P^* . Из (27) имеем $\Psi^* = \Psi$. В структурной формуле (10) все слагаемые определяются однозначно, в частности, однозначно определяются косодуальное и равнодуальное слагаемые. Поэтому имеем два равенства:

$$K^* = K, \quad (29a)$$

$$W^* + Q^* + P^* = W + Q + P. \quad (29b)$$

Далее для определенности будем вести рассуждения при сигнатуре $s = 4$. В силу (20), (19) и симметричности E_{mn} блоки матрицы $K = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ косодуального тензора $\frac{1}{2}\eta_{ij} \circ E_{mn}$ имеют вид

$$A = -D = \begin{pmatrix} E_{11} + E_{22} & E_{23} & E_{24} \\ E_{23} & E_{11} + E_{33} & E_{34} \\ E_{24} & E_{34} & E_{11} + E_{44} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$B = -C = \begin{pmatrix} 0 & E_{14} & -E_{13} \\ -E_{14} & 0 & E_{12} \\ E_{13} & -E_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку согласно (29a) тензор $\frac{1}{2}\eta_{ij} \circ E_{mn}$ еще и автодуален, то по формуле (25) должно быть $A = B$. Из (30) имеем $E_{12} = E_{13} = E_{14} = E_{23} = E_{24} = E_{34} = 0$ и $E_{22} = E_{33} = E_{44} = -E_{11}$. Так как из (11) следует $\eta^{mn}E_{mn} = 0$, то получаем $E_{ij} = 0$ для всех i, j .

Обратимся теперь к равенству (29b). Вследствие (22) $\text{tr } W = \text{tr } A + \text{tr } B = 0$, где $W = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Согласно (16a) $\text{tr } W^* = \text{tr } B + \text{tr } A = 0$. Из (20) и (16a) следует, что матрица Q тензора $\frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[mn]}$ в силу кососимметричности $b_{[mn]}$ имеет нулевой след так же, как и матрица Q^* , т. е. $\text{tr } Q = \text{tr } Q^* = 0$. Опять из вида матрицы (20) для матрицы P тензора $\frac{1}{24}F\eta_{ij} \circ \eta_{mn}$ имеем $P = \frac{1}{12}F \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, где I — единичная матрица 3-го порядка. В силу (16a) получаем

$$\text{tr } P = \frac{1}{2}F, \quad \text{tr } P^* = \frac{1}{12}F \cdot \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Так как след аддитивен, то из (28) и $K = 0$ выводим

$$\text{tr } \Psi = \text{tr } (W + Q + P) = \text{tr } W + \text{tr } Q + \text{tr } P = \frac{1}{2}F.$$

В то же время

$$\text{tr } \Psi = \text{tr } \Psi^* = \text{tr } (W^* + Q^* + P^*) = \text{tr } W^* + \text{tr } Q^* + \text{tr } P^* = 0.$$

Этим доказано, что $F = 0$. Осталось доказать условие 1).

Так как $F = 0$, то и $P = 0$, и равенство (29b) принимает вид $W^* + Q^* = W + Q$. Поскольку блоки матриц W^* и W — симметричные матрицы, а блоки матриц Q^* и Q — кососимметричные матрицы (в силу кососимметричности $b_{[mn]}$, формула (20)), то это равенство возможно только тогда, когда

$$W^* = W, \tag{31a}$$

$$Q^* = Q. \tag{31b}$$

Это означает, что тензоры W_{ijmn} и $\frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[mn]}$ автодуальны. Тогда согласно (23) $Q = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Сравнивая с (20), получаем

$$b_{[12]} = b_{[34]}, \quad b_{[13]} = -b_{[24]}, \quad b_{[14]} = b_{[23]}. \tag{32}$$

Так как оператор Ходжа (8) при сигнатурах $s = \pm 4$ имеет ненулевые компоненты

$$\varepsilon_{12}^{34} = 1, \quad \varepsilon_{13}^{24} = -1, \quad \varepsilon_{14}^{23} = 1, \quad \varepsilon_{23}^{14} = 1, \quad \varepsilon_{24}^{13} = -1, \quad \varepsilon_{34}^{12} = 1, \tag{33}$$

то по формулам (9) и (4) легко проверить, что равенства (32) равносильны $*\Phi_0^0 = \Phi_0^0$. Для случая $s = 4$ и автодуальности 2-форм Φ_i^j необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1) и 2) данной теоремы. Тогда $E_{ij} = 0$ и $F = 0$. Поэтому $P = 0$ и $K = 0$. Следовательно,

$$P^* = 0, \quad K^* = 0, \quad \Psi = W + Q, \quad \Psi^* = W^* + Q^*.$$

Автодуальность тензора Вейля означает, что $W^* = W$. Кроме того, равенство $*\Phi_0^0 = \Phi_0^0$ при сигнатуре $s = 4$ равносильно равенствам (32), которые эквивалентны (31b). Поэтому $\Psi^* = \Psi$, что означает $*\Phi_i^j = \Phi_i^j$. Теорема 2 полностью доказана для $s = 4$ и случая автодуальности. Для остальных сигнатур, а также при антиавтодуальности 2-форм Φ_i^j доказательства аналогичны.

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Теорема 3 (основная теорема (анти)автодуальной конформной связности без кручения). *Конформная связность на четырехмерном многообразии без кручения при сигнатурах $s = \pm 4; 0$ (анти)автодуальна тогда и только тогда, когда таковы же 2-формы Φ_i^j и выполняется уравнение $d\Phi_0^0 = 0$.*

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим случай сигнатуры $s = 4$ и автодуальности $*\Phi_i^j = \Phi_i^j$. По теореме 2 отсюда следует $*\Phi_0^0 = \Phi_0^0$, что равносильно (32). Осталось доказать равенства $*\Phi_i = \Phi_i$. Из (6) получаем двенадцать равенств, аналогичных (32),

$$b_{i[1|2]} = b_{i[3|4]}, \quad b_{i[1|3]} = -b_{i[2|4]}, \quad b_{i[1|4]} = b_{i[2|3]}. \quad (34)$$

Требуется вывести эти уравнения из равенств $*\Phi_i^j = \Phi_i^j$ и $d\Phi_0^0 = 0$. Согласно теореме 2 из $*\Phi_i^j = \Phi_i^j$ имеем $E_{ij} = 0$ и $F = 0$, поэтому разложение (10) примет вид

$$\Phi_{ijmn} = W_{ijmn} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[mn]}.$$

По теореме 1 оба слагаемых в правой части равнодуальны, следовательно, таков же и тензор Φ_{ijmn} , т. е. $*\Phi_{ijmn} = \Phi_{ijmn}^*$. Условие автодуальности $*\Phi_i^j = \Phi_i^j$ означает, что $\Phi_{ijmn}^* = \Phi_{ijmn}$, поэтому $*\Phi_{ijmn} = \Phi_{ijmn}$. Согласно (33) убеждаемся, что последнее равенство равносильно

$$\Phi_1^2 = \Phi_3^4, \quad \Phi_1^3 = -\Phi_2^4, \quad \Phi_1^4 = \Phi_2^3. \quad (35)$$

Применим к (35) внешний ковариантный дифференциал ∇ и воспользуемся тождеством Бианки (14), которое для внешних 2-форм Φ_i^j имеет вид

$$\nabla\Phi_i^j + \omega^j \wedge \Phi_i - \eta^{jm}\eta_{in}\Phi_m \wedge \omega^n = 0.$$

Получим равенства

$$\begin{aligned} \omega^2 \wedge \Phi_1 - \Phi_2 \wedge \omega^1 &= \omega^4 \wedge \Phi_3 - \Phi_4 \wedge \omega^3, \\ \omega^4 \wedge \Phi_1 - \Phi_4 \wedge \omega^1 &= \omega^3 \wedge \Phi_2 - \Phi_3 \wedge \omega^2, \\ \omega^3 \wedge \Phi_1 - \Phi_3 \wedge \omega^1 &= -\omega^4 \wedge \Phi_2 + \Phi_4 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Используя формулы (6), запишем их в компонентах

$$\begin{aligned} b_{1[1|3]} + b_{2[2|3]} &= b_{4[1|2]}, & b_{1[1|4]} + b_{2[2|4]} &= b_{3[2|1]}, \\ b_{3[3|1]} + b_{4[4|1]} &= b_{2[3|4]}, & b_{4[4|2]} + b_{3[3|2]} &= b_{1[4|3]}, \\ b_{2[2|1]} + b_{3[3|1]} &= b_{4[2|3]}, & b_{1[1|2]} + b_{4[4|2]} &= b_{3[1|4]}, \\ b_{4[4|3]} + b_{1[1|3]} &= b_{2[4|1]}, & b_{3[3|4]} + b_{2[2|4]} &= b_{1[3|2]}, \\ b_{3[3|2]} + b_{1[1|2]} &= b_{4[3|1]}, & b_{2[2|1]} + b_{4[4|1]} &= b_{3[2|4]}, \\ b_{1[1|4]} + b_{3[3|4]} &= b_{2[1|3]}, & b_{2[2|3]} + b_{4[4|3]} &= b_{1[2|4]}. \end{aligned} \quad (36)$$

Кроме того, уравнение $d\Phi_0^0 = 0$ в силу (4) равносильно

$$b_{[ij]|k} + b_{[ki]|j} + b_{[jk]|i} = 0, \quad i, j, k \text{ — любые различные.} \quad (37)$$

Доказательство формул (34) можно провести автоматически для каждого i по одной и той же схеме. Докажем, например, для $i = 1$ первое равенство (34)

$$b_{1[1|2]} = b_{1[3|4]}. \quad (38)$$

Преобразуем правую часть по четвертой формуле (36)

$$b_{1[3|4]} = -b_{1[4|3]} = -b_{4[4|2]} - b_{3[3|2]} =$$

теперь воспользуемся шестой и девятой формулой из (36)

$$= 2b_{1[1|2]} - b_{3[1|4]} - b_{4[3|1]} =$$

перегруппируем второе и третье слагаемые

$$= 2b_{1[1|2]} + b_{41|3} - b_{31|4} + b_{[34]|1} =$$

применим (37) при $i = 1, j = 3, k = 4$

$$= 2b_{1[1|2]} + b_{41|3} - b_{31|4} - b_{[13]|4} - b_{[41]|3} =$$

и перегруппируем последние четыре слагаемых

$$= 2b_{1[1|2]} - b_{1[3|4]}.$$

Осталось перенести последнее слагаемое влево и сократить на два, чтобы получить (38).

Для сигнатур $s = -4; 0$ и случая антиавтодуальности доказательства аналогичные.

Необходимость. Если конформная связность (анти)автодуальная, $*\Phi = \pm\Phi$, то, разумеется, $*\Phi_i^j = \pm\Phi_i^j$. Кроме этого, выполняются уравнения Янга–Миллса

$$d * \Phi + \Omega \wedge * \Phi - * \Phi \wedge \Omega \equiv 0,$$

дуальные тождеству Бианки (14), а при выполнении уравнений Янга–Миллса обязательно $d\Phi_0^0 = 0$ ([14], с. 440). $\square$

Поскольку в случае (анти)автодуальности связности $*\Phi_0^0 = \pm\Phi_0^0$, то из $d\Phi_0^0 = 0$ следует $d * \Phi_0^0 = 0$. Эти две группы уравнений называются уравнениями Максвелла.

С помощью теоремы 2 теорема 3 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 4. *Конформная связность на четырехмерном многообразии при сигнатурах $s = \pm 4; 0$ (анти)автодуальна тогда и только тогда, когда таковы же тензор Вейля, 2-форма заряда Φ_0^0 , выполняются уравнение Максвелла $d\Phi_0^0 = 0$ и уравнение Эйнштейна (15).*

Так как в нормальном пространстве конформной связности $\Phi_0^0 = 0$ и выполняется (15), то справедлива

Теорема 5. *Нормальная конформная связность Картана на четырехмерном многообразии при сигнатурах $s = \pm 4; 0$ (анти)автодуальна тогда и только тогда, когда таков же тензор Вейля угловой метрики.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Картан Э. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности* (Изд-во Казанск. ун-та, 1962).
- [2] Столяров А.В. *Пространство конформной связности*, Изв. вузов. Матем., № 11, 42–54 (2006).
- [3] Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. *Структура основного тензора пространства конформной связности без кручения. Конформные связности на гиперповерхности проективного пространства*, Сиб. журн. чистой и прикл. матем. **17** (2), 21–38 (2017).
- [4] Atiyah M.F., Hitchin N.J., Singer I.M. *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **362**, 421–457 (1978).
- [5] Singer I.M., Thorpe J.A. *The curvature of 4-dimensional Einstein spaces*, Global Anal., Papers in Honour of K. Kodaira (Princeton Univer. Press, Princeton, 1969), 355–365.
- [6] Sucheta Koshti, Naresh Dadhich *The general self-dual solution of the Einstein equations*, arXiv:gr-qc/9409046 (1994).
- [7] Арсенева О.Е. *Автодуальная геометрия обобщенных келеровых многообразий*, Матем. сб. **184** (8), 137–148 (1993).
- [8] Dunajski M. *Anti-self-dual four-manifolds with a parallel real spinor*, arXiv:math/0102225 (2001).
- [9] Dunajski M., Ferapontov E., Kruglikov B. *On the Einstein–Weyl and conformal self-duality equations*, arXiv:1406.0018 (2014).

- [10] Акивис М.А. *О вполне изотропных подмногообразиях четырехмерной псевдоконформной структуры*, Изв. вузов. Матем., № 1, 3–11 (1983).
- [11] Акивис М.А., Коннов В.В. *Некоторые локальные аспекты теории конформных структур*, УМН **48** (1), 3–40 (1993).
- [12] Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности* (Наука, М., 1966).
- [13] Кривонос Л.Н., Лукьянов В.А. *Уравнения Эйнштейна на четырехмерном многообразии конформной связности без кручения*, Журн. Сиб. федерал. ун-та. Сер. Матем. и физ. **5** (3), 393–408 (2012).
- [14] Кривонос Л.Н., Лукьянов В.А. *Связь уравнений Янга–Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла*, Журн. Сиб. федерал. ун-та. Сер. Матем. и физ. **2** (4), 432–448 (2009).

Леонид Николаевич Кривонос

*Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24, Россия,*

e-mail: l.n.krivonosov@gmail.com

Вячеслав Анатольевич Лукьянов

*Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24, Россия,*

e-mail: oxyzt@ya.ru

L.N. Krivonosov and V.A. Luk'yanov

The main theorem for (anti)self-dual conformal torsion-free connection

Abstract. In this paper we obtain results that occur on a four-manifold of conformal torsion-free connection with all possible signatures of angular metric. It is proved that three of the four terms of the formula for the decomposition of the basic tensor are equidual, one is skew-dual. Based on this result we find conditions for (anti)self-duality of external 2-forms, which are part of components of the conformal curvature matrix. With the help of the last result, the main theorem is proved: a conformal torsion-free connection on a four-manifold with the signatures of the angular metric $s = \pm 4; 0$ is (anti)self-dual if and only if the Weyl tensor of the angular metric and the exterior 2-form Φ_0^0 are (anti)self-dual and Einstein and Maxwell's equations are satisfied. In particular, the normal conformal Cartan connection is (anti)self-dual iff the Weyl tensor of the angular metric is the same.

Keywords: conformal connection, (anti)self-duality, Weyl tensor, conformal curvature, Einstein equations, Maxwell's equations.

Leonid Nikolaevich Krivonosov

*Nizhny Novgorod State Technical University,
24 Minin str., Nizhny Novgorod, 603950, Russia,*

e-mail: l.n.krivonosov@gmail.com

Vyacheslav Anatol'evich Luk'yanov

*Nizhny Novgorod State Technical University,
24 Minin str., Nizhny Novgorod, 603950, Russia,*

e-mail: oxyzt@ya.ru