Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Н. Сатторов, З. Э. Эрмаматова, О восстановлении решений однородной системы уравнений Максвелла в области по их значениям на куске границы, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 2, 39–48

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-39-48>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:45:19

Э.Н. САТТОРОВ, З.Э. ЭРМАМАТОВА

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ОБЛАСТИ ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ НА КУСКЕ ГРАНИЦЫ

Аннотация. Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений Максвелла в пространственной ограниченной области по ее значениям на части границы этой области, т. е. задача Коши. Строится приближенное решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, некорректные задачи, регулярное решение, матрицы Карлемана.

УДК: 517.946

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-2-39-48

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть R^3 — вещественное трехмерное евклидово пространство,

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, \quad x' = (x_1, x_2), \quad y' = (y_1, y_2) \in R^2,$$

$$\alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad r^2 = \alpha^2 + (y_3 - x_3)^2 = |y - x|^2,$$

Ω — ограниченная односвязная область в R^3 с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = T \cup S$. Относительно S будем предполагать, что каждый луч, выходящий из любой точки области $x \in \Omega$, встречает эту поверхность самое большее в l точках.

Рассматривается задача восстановления решения системы уравнений Максвелла в гармоническом режиме [1]

$$\operatorname{rot} E - ikH = 0, \quad \operatorname{rot} H + ikE = 0 \tag{1.1}$$

по ее известным значениям на части границы этой области, т. е. задача Коши, где волновое число k задается выражением $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, а ε и μ — электромагнитные постоянные (электрическая и магнитная проницаемость); $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$ — напряженность электрического и магнитного полей, ω — частота электромагнитного колебания.

Обозначим через $A(\Omega)$ пространство вектор-функций класса $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих системе (1.1) в Ω .

Задача 1. Известны данные Коши решения системы (1.1) на поверхности S :

$$[n(y), E(y)] = f(y), \quad [n(y), H(y)] = g(y), \quad y \in S, \tag{1.2}$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$ в точке y , $f = (f_1, f_2, f_3)$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ — заданные непрерывные вектор-функции.

По заданным $f(y)$ и $g(y)$ на S вычислить $E(x), H(x), x \in \Omega$.

Задача 2. Пусть на S заданы функции $f(y)$ и $g(y)$. Указать условия на $f(y)$ и $g(y)$, необходимые и достаточные для того, чтобы существовало решение системы (1.1) класса $A(\Omega)$, удовлетворяющее условию (1.2).

Задача (1.1)–(1.2) относится к числу некорректно поставленных задач. Ж. Адамар [2] заметил, что решение задачи 1 неустойчиво. Возможность введения положительного параметра σ в зависимости от погрешности исходных данных впервые замечено М.М. Лаврентьевым [3]. Единственность решения следует из общей теоремы Хольмгрена ([4], с. 58).

На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 50-х годах прошлого века в работах [3], [5]–[7] и развивалось впоследствии в [8]–[17].

Следуя А.Н. Тихонову ([18] и [19], с. 52–53), семейство функций $E^{\sigma\delta}(x), H^{\sigma\delta}(x)$ названо *регуляризованным решением задачи Коши* для системы (1.1), полученным в работах [8]–[10]. При этом регуляризованное решение определяет устойчивость метода приближенного решения задачи.

В данной статье на основе результатов работ ([3], с. 41; [15]) по задаче Коши для уравнения Гельмгольца построена матрица Карлемана в явном виде и на ее основе доказаны формула Карлемана и критерий разрешимости задачи Коши.

Теорема 1.1. Пусть вектор-функции $E(y), H(y) \in A(\Omega)$ удовлетворяют условию

$$|[n(y), E(y)]| \leq B, \quad |[n(y), H(y)]| \leq B, \quad y \in T, \quad (1.3)$$

где B — заданное положительное число. Тогда для любого $x \in \Omega$ и $\sigma > 0$ справедлива формула Карлемана

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} E_\sigma(x) = E(x), \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} H_\sigma(x) = H(x), \quad (1.4)$$

где

$$E_\sigma(x) = - \int_S N_\sigma(y, x; k) [n(y), E(y)] dS_y + \frac{1}{ik} \int_S M_\sigma(y, x) [n(y), H(y)] dS_y, \quad x \in \Omega,$$

$$H_\sigma(x) = - \int_S N_\sigma(y, x, \sigma) [n(y), H(y)] dS_y - \frac{1}{ik} \int_S M_\sigma(y, x) [n(y), E(y)] dS_y, \quad x \in \Omega, \quad (1.5)$$

причем предел достигается равномерно на компактах из Ω .

Теорема 1.2. Пусть $S \subset C^2$, $f(y) \in C(S_0) \cap L(S)$, где S_0 — множество внутренних точек S (без края). Тогда для существования функций $E(y), H(y) \in A(\Omega) \cap C(\Omega \cup S_0)$ таких, что

$$[n(y), E(y)] = f(y), \quad [n(y), H(y)] = g(y), \quad y \in S_0, \quad (1.6)$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in R^3$ с условием $0 < x_3 < 2a$, сходился (равномерно при $\delta < x_3 \leq 2a - \delta, 0 < \delta < a$) несобственный интеграл

$$\left| \int_1^\infty I_m(\sigma, x) d\sigma \right| < \infty, \quad m = 1, 2, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\sigma, x) &\equiv \frac{dE_\sigma}{d\sigma}(x) = \int_S [-f(y)N_{1\sigma}(y-x; k) + \frac{1}{ik}g(y)M_{1\sigma}(y-x; k)]dS_y, \\ I_2(\sigma, x) &\equiv \frac{dH_\sigma}{d\sigma}(x) = \int_S [-g(y)N_{1\sigma}(y-x; k) - \frac{1}{ik}f(y)M_{1\sigma}(y-x; k)]dS_y. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если условие (1.7) выполнено, то аналитическое продолжение осуществляется эквивалентными формулами (1.4) и

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_1^\infty I_1(\sigma, x)d\sigma + E_2(x) + \int_S [-f(y)H(r; k) + \frac{1}{ik}g(y)E(r; k)]dS_y, \\ H(x) &= \int_1^\infty I_2(\sigma, x)d\sigma + H_2(x) + \int_S [-g(y)H(r; k) - \frac{1}{ik}f(y)E(r; k)]dS_y; \end{aligned} \quad (1.9)$$

здесь обобщенно потенциальные векторы $E_2(x)$, $H_2(x)$ — регулярное решение системы (1.1) в R^3 в виде

$$\begin{aligned} E_2(x) &= \int_S \left[-f(y)G_1(y-x; k) + \frac{1}{ik}g(y)G_2(y-x; k) \right] dS_y, \\ H_2(x) &= \int_S \left[-g(y)G_1(y-x; k) - \frac{1}{ik}f(y)G_2(y-x; k) \right] dS_y, \\ N_{1\sigma} &= \frac{dN_\sigma}{d\sigma}(y-x; k), \quad M_{1\sigma} = \frac{dM_\sigma}{d\sigma}(y-x; k), \end{aligned}$$

$$F_\sigma(y-x; k) \equiv \frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}(y-x; k) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \operatorname{Im}[e^{\sigma w^2 - \sigma a^2}(w_1 + a)] \frac{\operatorname{ch}(ku)du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \sigma > 0,$$

$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3 + a, \quad a = \max_{\Omega} y_3.$$

В [20] приведены теоремы существования матрицы Карлемана и критерий разрешимости для более широкого класса краевых задач эллиптических систем. Ранее в [21], [20] доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве положительной меры.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и близких к ней в случаях, когда $\partial\Omega \setminus S$ — часть поверхности конуса, построена в [14]. Матрицу Карлемана для уравнения Коши–Римана в случае, когда S — произвольное множество положительной меры, построил Л.А. Айзенберг [20]. С.Н. Мергелян [22] указал способ построения функции Карлемана в задаче Коши для уравнения Лапласа в случае, когда S — кусок с гладким краем границы односвязной области. На основе [22] теорем об аппроксимации в [21] построена матрица Карлемана для эллиптических систем. Поскольку матрица Карлемана отличается от матрицы фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то интегральная формула Стрэттона–Чу ([1], с. 124) остается справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на матрицу Карлемана.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА И КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ

Функцию $\Phi_\sigma(y, x; k)$ при $s \geq 0, v \geq 1$ согласно [15] определим равенством

$$\Phi_\sigma(y, x; k) = [-2\pi^2 K(0)]^{-1} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{K(w)}{w} \right] \frac{\operatorname{ch}(ku)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3, \quad (2.1)$$

$K(w)$ — целая функция комплексного переменного, вещественная при вещественном w ($w = u + iv$, u, v — действительные числа) и $K(0) \neq 0$, $\forall R > 0, \exists C_R > 0$

$$\sup_{|\operatorname{Re} w| < R, \operatorname{Im} w \leq -C_R} (|K(w)| + |\operatorname{Im} w| |K'(w)| + |\operatorname{Im} w|^2 |K''(w)|) < \infty. \quad (2.2)$$

При вещественном w из вещественности $K(w)$ имеем $\overline{K(\overline{w})} = K(w)$. Тогда из (2.2) следует $\forall R > 0$

$$\sup_{|\operatorname{Re} w| < R} \{|K(w)| + (1 + |\operatorname{Im} w|) |K'(w)| + (1 + |\operatorname{Im} w|^2) |K''(w)|\} < \infty. \quad (2.3)$$

Равенство (2.1) запишем в виде

$$-2\pi K(0) \Phi_\sigma(y, x; k) = \int_0^\infty \left\{ \frac{(y_3 - x_3) \operatorname{Im} K(w)}{\sqrt{\alpha^2 + u^2}} - \operatorname{Re} K(w) \right\} \frac{\operatorname{ch}(ku)}{r^2 + u^2} du. \quad (2.4)$$

Из (2.3) и (2.4) следует, что при $y \neq x$ интеграл в (2.1) абсолютно сходится.

Если $K(w) \equiv 1$, то функция $\Phi_\sigma(y, x; k)$ является классическим фундаментальным решением уравнения Гельмгольца, т. е.

$$\Phi_\sigma(y, x; k) \equiv \Phi_0(y, x; k) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}.$$

С целью построения приближенного решения задачи (1.1), (1.2) согласно матрице фундаментальных решений ([23], с. 183) системы (1.1) рассмотрим матрицы

$$M_\sigma(y, x; k) = \|M_{\sigma ij}(y, x; k)\| = \left\| \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(y, x; k)}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} k^2 \Phi_\sigma(y, x; k) \right\|_{3 \times 3},$$

$$N_\sigma(y, x; k) = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; k)}{\partial x_3} & -\frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; k)}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; k)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; k)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; k)}{\partial x_2} & -\frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; k)}{\partial x_1} & 0 \end{array} \right\|, \quad (2.5)$$

где функция $\Phi_\sigma(y, x; k)$ при $s > 0, \sigma \geq 0$ определяется из (2.1).

Из результатов работы [15] вытекает

Лемма 2.1. *Функция $\Phi_\sigma(y, x; k)$ является функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца, т. е. обладает следующими двумя свойствами:*

$$1) \quad \Phi_\sigma(y, x; k) = \Phi_0(r; k) + g_\sigma(y, x; k),$$

где $g_\sigma(y, x; k)$ — некоторая функция, определенная для всех значений y, x и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\Delta \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) g_\sigma + k^2 g_\sigma = 0, \quad y \in \Omega;$$

$$2) \quad \int_T \left(|\Phi_\sigma(y, x; k)| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; k)}{\partial n} \right| \right) dS_y \leq C(k, \Omega) \sigma \exp(-\sigma x_3^2),$$

где $C(k, \Omega)$ — постоянная.

Для системы (1.1) верна аналогичная

Лемма 2.2. *Матрицы $M_\sigma(y, x; k)$, $N_\sigma(y, x; k)$, определенные формулами (2.5), являются матрицами Карлемана задачи (1.1), (1.2), т. е. представимы в виде*

$$M_\sigma(y, x; k) = H(r; k) + G_{1\sigma}(y, x; k),$$

$$N_\sigma(y, x; k) = H(r; k) + G_{2\sigma}(y, x; k),$$

где $G_{m\sigma} = \|G_{ij}(y, x, \sigma)\|_{3 \times 3}$ ($m = 1, 2$) — матрицы, определенные для всех значений y, x и по переменной y удовлетворяющие системе (1.1) во всем R^3 .

При построении матрицы Карлемана и получении формулы Карлемана используем основные результаты работы [8]–[10] с целыми функциями $K(w) = e^{\sigma w^2}$, которые обеспечивают сходимость несобственного интеграла, широко применяемого при решении обратных задач [24].

В (2.1) положим $K(w) = e^{\sigma w^2}$, $w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3 + a$, $a = \max_{\bar{\Omega}} y_3$, при этом $w^2 = -u^2 - \alpha^2 + 2i(y_3 - x_3 + a)\sqrt{u^2 + \alpha^2} + (y_3 - x_3 + a)^2$.

Согласно (2.4), выделяя мнимую часть подинтегрального выражения, получим

$$2\pi^2 \Phi_\sigma(y - x; k) = e^{-\sigma(a^2 + \alpha^2 - (y_3 - x_3 + a)^2)} \int_0^\infty \frac{\varphi_\sigma(y - x; u) e^{-\sigma u^2} \operatorname{ch}(ku)}{u^2 + \alpha^2} du,$$

где

$$\varphi_\sigma(y - x; u) = \cos(\tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}) - (y_3 - x_3) \frac{\sin(\tau \sqrt{u^2 + \alpha^2})}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \tau = 2\sigma(y_3 - x_3 + a). \quad (2.6)$$

Следствие 2.1. Функция $\psi_\sigma(y - x)$, при $y \neq x$ определенная формулой $\psi_\sigma(y - x) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_\sigma(y - x; k)$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца по переменной y всюду в R^3 , включая точку $y = x$.

Действительно, дифференцируя по параметру σ (законность дифференцирования под знаком интеграла обеспечивается присутствием множителя $e^{-\sigma u^2}$), из (2.1) при $y \neq x$ получаем

$$-2\pi^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_\sigma(y - x; k) = \int_0^\infty \operatorname{Im} K_1(w) \frac{\operatorname{ch}(ku) du}{\sqrt{s + u^2}},$$

$$K_1(w) = e^{\sigma(w^2 - a^2)}(w + a), \quad w^2 - a^2 = (w - a)(w + a),$$

$$\operatorname{Im} K_1(w) = e^{\sigma((y_3 - x_3 + a)^2 - \alpha^2 - u^2 - a^2)} (\sqrt{u^2 + \alpha^2} \cos(\tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}) + (y_3 + x_3 + a) \sin(\tau \sqrt{u^2 + \alpha^2})).$$

Подинтегральная функция по переменным y, x бесконечно дифференцируема в R^3 при любом $\sigma > 0$. Теперь удовлетворение уравнению Гельмгольца $\psi_\sigma(x, y)$ по переменной y в R^3 следует из леммы 1.1, где в качестве $K(w) = e^{\sigma w^2}$ берется $K_1(w)$.

Следствие 2.2. Матрицы $M_{1\sigma}(y - x; k)$, $N_{1\sigma}(y - x; k)$, при $y \neq x$ определенные формулами

$$M_{1\sigma}(y - x; k) = \frac{\partial}{\partial \sigma} M_\sigma(y - x; k), \quad N_{1\sigma}(y - x; k) = \frac{\partial}{\partial \sigma} N_\sigma(y - x; k),$$

удовлетворяют системе (1.1) по переменному y в R^3 , включая точку $y = x$.

Доказательство теоремы 1.1. Из формулы Стрэттона–Чу ([1], с. 124) имеем

$$\begin{aligned} E(x) &= - \int_S N_\sigma(y, x; k) [n(y), E(y)] dS_y + \frac{1}{ik} \int_S M_\sigma(y, x; k) [n(y), H(y)] dS_y - \\ &\quad - \int_T N_\sigma(y, x; k) [n(y), E(y)] dS_y + \frac{1}{ik} \int_T M_\sigma(y, x; k) [n(y), H(y)] dS_y, \quad x \in \Omega, \\ H(x) &= - \int_S N_\sigma(y, x; k) [n(y), H(y)] dS_y - \frac{1}{ik} \int_S M_\sigma(y, x; k) [n(y), E(y)] dS_y - \\ &\quad - \int_T N_\sigma(y, x; k) [n(y), H(y)] dS_y - \frac{1}{ik} \int_T M_\sigma(y, x; k) [n(y), E(y)] dS_y, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Покажем, что второй интеграл в (2.7) равномерно стремится к нулю при $\sigma \rightarrow \infty$. Обозначим

$$J_\sigma^1(x) = - \int_T \{N_\sigma(y, x; k)[n(y), E(y)] + \frac{1}{ik} M_\sigma(y, x; k)[n(y), H(y)]\} dS_y,$$

$$J_\sigma^2(x) = - \int_T \{N_\sigma(y, x; k)[n(y), H(y)] - \frac{1}{ik} M_\sigma(y, x; k)[n(y), E(y)]\} dS_y,$$

при этом из (1.3) следует

$$|J_\sigma^1(x)| \leq BT_\sigma^1(x), T_\sigma^1(x) = \int_T \{|N_\sigma(y - x; k)| + |M_\sigma(y - x; k)|\} dS_y,$$

$$|J_\sigma^2(x)| \leq BT_\sigma^2(x), T_\sigma^2(x) = \int_T \{|N_\sigma(y - x; k)| + |M_\sigma(y - x; k)|\} dS_y. \quad (2.8)$$

Согласно определению 1.2 из (2.6) имеем

$$|N_\sigma(y - x; k)| \leq 2|\text{grad}\Phi_\sigma(y - x; k)|,$$

$$|M_\sigma(y - x; k)| \leq \left(3|k|^2 |\Phi_\sigma(y - x; k)| + \sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(y - x; k)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Вычислим $\Phi_\sigma(y - x; k)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_\sigma(y - x; k)$, $\frac{\partial^2 \Phi_\sigma(y - x; k)}{\partial x_i \partial x_j}$ по формуле (2.6) и положим $y_3 = 0$. Тогда для $T_\sigma^m(x)$, $m = 1, 2$, определенного равенством (2.8), получаем

$$T_\sigma^m(x) = \frac{e^{-\sigma x_3^2}}{\pi^2} \left[\int_T \left(\int_0^\infty \left(\frac{\frac{3}{2}|k|^2 + \sigma(3 + 2(1 + \sigma)x_3 + 2\sigma)((y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)) + 2x_3 + u^2 + \alpha^2}{u^2 + \alpha^2 + x_3^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4\sigma((y_1 - x_1) + (y_2 - x_2))^2 + 2(1 + 2\sigma)((y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)) + x_3 + 8\sigma x_3^2 - 4}{(u^2 + \alpha^2 + x_3^2)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4\sigma((y_1 - x_1) + (y_2 - x_2))^2 + 8((y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \sigma x_3)x_3}{(u^2 + \alpha^2 + x_3^2)^3} \right) \text{ch}(ku) e^{-\sigma u^2} du \right) e^{-\sigma \alpha^2} dy_1 dy_2 \right].$$

Область T в интеграле заменим пространством R^2 , полученные повторные интегралы преобразуем в трехкратные по всему R^3 , которые в свою очередь преобразуем, введя сферические координаты. Тогда будем иметь

$$T_\sigma^m(x) \leq 2\pi e^{-\sigma x_3^2} \left[\int_0^\infty \frac{\frac{3}{2}|k|^2 + 2x_3 + t^2}{t^2 + x_3^2} t^2 \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt + \int_0^\infty \frac{4\sigma t^2 + x_3 + 8\sigma x_3^2}{(t^2 + x_3^2)^2} t^2 \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{4\sigma t^2 + 8\sigma x_3^2}{(t^2 + x_3^2)^3} t^2 \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt \right] \leq 2\pi e^{-\sigma t^2} \left[\frac{3}{2}|k|^2 \int_0^\infty \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt + \int_0^\infty t \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt + \right. \\ \left. + \int_0^\infty t^2 \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt + \int_0^\infty \frac{4\sigma(t^2 + x_3^2)}{(t^2 + x_3^2)^2} t^2 \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt + \int_0^\infty \frac{4\sigma t^2 x_3^2}{(t^2 + x_3^2)^2} t^2 \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{t^2 x_3^2}{(t^2 + x_3^2)^2} \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt + \int_0^\infty \frac{4\sigma(t^2 + x_3^2)}{(t^2 + x_3^2)^3} t^2 \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt + \int_0^\infty \frac{4\sigma t^2 x_3^2}{(t^2 + x_3^2)^3} t^2 \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt \right].$$

С учетом $\frac{2x_3 t}{t^2 + x_3^2} \leq 1$ вычисляя интегралы

$$\int_0^\infty \text{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt = \frac{e^{\frac{k^2}{4\sigma}}}{2} \left[\int_0^\infty e^{-\sigma \left(t + \frac{k}{2\sigma}\right)^2} d\left(t + \frac{k}{2\sigma}\right) + \int_0^\infty e^{-\sigma \left(t - \frac{k}{2\sigma}\right)^2} d\left(t - \frac{k}{2\sigma}\right) \right] = \frac{e^{\frac{k^2}{4\sigma}} \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}},$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^2 \operatorname{ch}(kt) e^{-\sigma t^2} dt &= \frac{e^{\frac{k^2}{4\sigma}}}{2} \left[\int_0^\infty \left(t + \frac{k}{2\sigma} - \frac{k}{2\sigma} \right)^2 e^{-\sigma \left(t + \frac{k}{2\sigma} \right)^2} d\left(t + \frac{k}{2\sigma} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left(t - \frac{k}{2\sigma} + \frac{k}{2\sigma} \right)^2 e^{-\sigma \left(t - \frac{k}{2\sigma} \right)^2} d\left(t - \frac{k}{2\sigma} \right) \right] = \frac{e^{\frac{k^2}{4\sigma}}}{2\sqrt{\sigma}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma} + \frac{k^2 \sqrt{\pi}}{4\sigma^2 \sqrt{\sigma}} \right), \\
\int_0^\infty \left(t + \frac{k}{2\sigma} \right) e^{-\sigma \left(t + \frac{k}{2\sigma} \right)^2} d\left(t + \frac{k}{2\sigma} \right) &= \frac{e^{-\frac{k^2}{4\sigma}}}{2\sigma},
\end{aligned}$$

имеем

$$T_\sigma^m(x) \leq \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} e^{-\sigma x_3^2 + \frac{k^2}{4\sigma}} \left[\frac{3k^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma} + \frac{k^2}{4\sigma^2 \sqrt{\sigma}} + 5(\sigma + \sqrt{\pi}) \right]. \quad \square$$

Доказательство теоремы 1.2. Необходимость. Пусть $E(y), H(y) \in A(\Omega) \cap C(\Omega \cup S_0)$ удовлетворяет на S_0 условиям (1.6), где $f(y), g(y) \in C(S_0) \cap L(S)$, и пусть ε произвольное, $0 < \varepsilon < a$, $|y - x| = r \geq \delta_0 > 0$, где

$$0 \leq y_3 \leq a, \quad 0 < x_3 < 2a. \quad (2.9)$$

Обозначим

$$S_\varepsilon = \{y : y_3 = \varepsilon\} \cap \Omega, \quad S_\varepsilon^+ = S \cap \{y : y_3 \geq \varepsilon\}.$$

Вектор-функции $N_{1\sigma}(y - x; k), M_{1\sigma}(y - x; k)$ определены формулой (1.8) матрицы Карлемана в R^3 . Поэтому согласно пространственной интегральной формуле Стрэттона–Чу, применяемой в области с границей $S_\varepsilon \cup S_\varepsilon^+$, получаем

$$\begin{aligned}
\int_{S_\varepsilon^+} \left[-f(y) N_{1\sigma}(y - x; k) + \frac{1}{ik} g(y) M_{1\sigma}(y - x; k) \right] dS_y &= \int_{S_\varepsilon} \left[-f(y) N_{1\sigma}(y - x; k) + \frac{1}{ik} g(y) M_{1\sigma}(y - x; k) \right] dS_y, \\
\int_{S_\varepsilon^+} \left[-g(y) N_{1\sigma}(y - x; k) - \frac{1}{ik} f(y) M_{1\sigma}(y - x; k) \right] dS_y &= \int_{S_\varepsilon} \left[-g(y) N_{1\sigma}(y - x; k) - \frac{1}{ik} f(y) M_{1\sigma}(y - x; k) \right] dS_y.
\end{aligned}$$

Используя эти равенства, для $I_m(\sigma, x)$ ($m = 1, 2$) имеем

$$\begin{aligned}
I_1(\sigma, x) &= \int_{S \setminus S_\varepsilon^+} \left[-f(y) N_{1\sigma}(y - x; k) + \frac{1}{ik} g(y) M_{1\sigma}(y - x; k) \right] dS_y + \\
&\quad + \int_{S_\varepsilon} \left[-f(y) N_{1\sigma}(y - x; k) + \frac{1}{ik} g(y) M_{1\sigma}(y - x; k) \right] dS_y, \\
I_2(\sigma, x) &= \int_{S \setminus S_\varepsilon^+} \left[-g(y) N_{1\sigma}(y - x; k) - \frac{1}{ik} f(y) M_{1\sigma}(y - x; k) \right] dS_y + \\
&\quad + \int_{S_\varepsilon} \left[-g(y) N_{1\sigma}(y - x; k) - \frac{1}{ik} g(y) M_{1\sigma}(y - x; k) \right] dS_y.
\end{aligned}$$

Достаточность. По заданным $f(y)$ и $g(y)$ определим функции $E(x), H(x)$ в (1.9) для всех $x \in R^3$ с условием (2.9). Из (1.4) заключаем, что первые два слагаемых в сумме представляют вектор-функцию, аналитическую для всех $x \in R^3$ с условием (2.9). Третье слагаемое как потенциал простого слоя определяет одну аналитическую функцию в Ω и другую — в $\Omega_1 = \{R^3 \setminus \bar{\Omega}\} \cap \{x \in R^3, 0 < x_3 < 2a\}$. Поэтому определяются два различных решения $E^+(x)$ и $E^-(x), H^+(x)$ и $H^-(x)$ соответственно. Согласно аналогу формулы Сохоцкого–Племеля для системы (1.1) ([25], с. 239–240) при $x \in S_0$ имеет место равенство

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} [E^+(x_1) - E^-(x_2)] = f(x), \quad \lim_{x_1 \rightarrow x} [H^+(x_1) - H^-(x_2)] = g(x),$$

притом предельное соотношение выполняется равномерно относительно x на каждой компактной части S_0 . Пусть $a < x_3 < 2a$ ($y_3 \leq a$), тогда, учитывая (1.8), (1.5), получаем

$$\begin{aligned} \int_1^\infty I_1(\sigma, x) d\sigma &= \int_1^\infty \left[\int_S \left(f(y) N_{1\sigma}(y-x; k) + \frac{1}{ik} g(y) M_{1\sigma}(y-x; k) \right) dS_y \right] d\sigma = \\ &= \int_S \left[\int_1^\infty \left(\frac{dN_{1\sigma}(y-x; k)}{d\sigma} f(y) + \frac{1}{ik} \frac{dM_{1\sigma}(y-x; k)}{d\sigma} g(y) \right) d\sigma \right] dS_y = \\ &= - \int_S \left(N_1(y-x; k) f(y) + \frac{1}{ik} M_{1\sigma}(y-x; k) g(y) \right) dS_y = -E_1(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty I_2(\sigma, x) d\sigma &= \int_1^\infty \left[\int_S \left(-g(y) N_{1\sigma}(y-x; k) - \frac{1}{ik} f(y) M_{1\sigma}(y-x; k) \right) dS_y \right] d\sigma = \\ &= \int_S \left[\int_1^\infty \left(-\frac{dN_{1\sigma}(y-x; k)}{d\sigma} g(y) - \frac{1}{ik} \frac{dM_{1\sigma}(y-x; k)}{d\sigma} f(y) \right) d\sigma \right] dS_y = \\ &= - \int_S \left(N_1(y-x; k) g(y) + \frac{1}{ik} M_{1\sigma}(y-x; k) f(y) \right) dS_y = -H_1(x), \end{aligned}$$

где $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} M_{1\sigma}(y-x; k) = 0$, $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} N_{1\sigma}(y-x; k) = 0$, так как $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \Phi_\sigma(y-x; k) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{d\Phi_\sigma(y-x; k)}{dy_i} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(r; k)}{\partial y_i \partial y_j} = 0$,

$$E_1(x) = \int_S \left[-f(y) N_1(y-x; k) + \frac{1}{ik} g(y) M_1(y-x; k) \right] dS_y,$$

$$H_1(x) = \int_S \left[-g(y) N_1(y-x; k) - \frac{1}{ik} f(y) M_1(y-x; k) \right] dS_y, \Phi_1 = \Phi_\sigma|_{\sigma=1}.$$

Законность перестановочности интегралов следует из оценки

$$|\Phi_\sigma(y-x; k)| + |\text{grad} \Phi_\sigma(y-x; k)| = C_{\delta_0} \sigma e^{\sigma((y_3-x_3+a)^2 - a^2 - \alpha^2)},$$

где постоянная C_{δ_0} не зависит от σ , x , y и равенства

$$(y_3 - x_3 + a)^2 - a^2 = (y_3 - x_3)(y_3 - x_3 + 2a).$$

Теперь из

$$E(x) = \int_1^\infty I_1(\sigma, x) d\sigma + E_1(x), \quad H(x) = \int_1^\infty I_2(\sigma, x) d\sigma + H_1(x)$$

видим, что $E^-(x) = 0, H^-(x) = 0$ для всех $x \in R^3$ с условием $a < x_3 < 2a$. Отсюда $E^-(x) \equiv 0, H^-(x) \equiv 0$ для всех $x \in \Omega_1$. Ясно, что $E^-(x), H^-(x)$ непрерывно дифференцируемо продолжаются на $\Omega_1 \cup S_0$. Поэтому $E^+(x), H^+(x)$ также гладко продолжаются на $\Omega \cup S_0$. Следовательно,

$$E^+(x) = f(x), \quad H^+(x) = g(x), \quad x \in S_0.$$

Положим $E(x) = E^+(x), H(x) = H^+(x), x \in \Omega \cup S_0$. □

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния* (Мир, М., 1987).
- [2] Адамар Ж. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа* (Наука, М., 1978).
- [3] Лаврентьев М.М. *О некоторых некорректных задачах математической физики* (ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1962).
- [4] Берс А., Джон Ф., Шехтер М. *Уравнения с частными производными* (Мир, М., 1966).
- [5] Иванов В.К. *Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе*, Дифференц. уравнения **1** (1), 131–136 (1965).
- [6] Лаврентьев М.М. *О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка*, ДАН СССР **112** (2), 195–197 (1957).
- [7] Айзенберг Л.А. *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения* (Наука, Новосибирск, 1990).
- [8] Сатторов Э.Н., Мардонов Дж.А. *Задача Коши для системы уравнений Максвелла*, Сиб. матем. журн. **44** (4), 851–861 (2003).
- [9] Сатторов Э.Н. *О продолжении решения однородной системы уравнений Максвелла*, Изв. вузов. Матем., № 8, 78–83 (2008).
- [10] Сатторов Э.Н. *Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в бесконечной области*, Матем. заметки **86** (3), 445–455 (2009).
- [11] Tarkhanov N. N. *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations* (Akad. Verl., Berlin, 1995).
- [12] Махмудов О.И. *Задача Коши для системы уравнений теории упругости и термоупругости в пространстве*, Изв. вузов. Матем., № 2, 43–53 (2004).
- [13] Арбузов Э.В., Бухгейм А.Л. *Формула Карлемана для системы уравнений электродинамики на плоскости*, Сиб. электронные матем. изв., № 5, 448–455 (2008).
- [14] Ярмухамедов Ш.Я. *О задаче Коши для уравнения Лапласа*, ДАН СССР **235** (2), 281–283 (1977).
- [15] Ярмухамедов Ш.Я. *О продолжении решения уравнения Гельмгольца*, Докл. РАН **357** (3), 320–323 (1997).
- [16] Ярмухамедов Ш.Я. *Регуляризация по Лаврентьеву решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца*, ДАН РУз, №3, 6–8 (2001).
- [17] Makhmudov K.O., Makhmudov O.I., Tarkhanov N. *Equations of Maxwell type*, J. Math. Anal. and Appl. **378**, 64–75 (2011).
- [18] Тихонов А.Н. *О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации*, ДАН СССР **151**(3), 501–504 (1963).
- [19] Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи* (Сиб. научн. изд-во, Новосибирск, 2009).
- [20] Айзенберг Л.А., Тарханов Н.Н. *Абстрактная формула Карлемана*, ДАН СССР **298** (6), 1292–1296 (1988).
- [21] Тарханов Н.Н. *О матрице Карлемана для эллиптических систем*, ДАН СССР **284** (2), 294–297 (1985).
- [22] Мергелян С.Н. *Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа*, УМН **11** (5), 3–26 (1956).
- [23] Алексидзе М.А. *Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач* (Наука, М., 1989).
- [24] Ikehata M. *Inverse conductivity problem in the infinite slab*, Inverse Probl. **17** (3), 437–454 (2001).
- [25] Жданов М.С. *Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей* (Наука, М., 1984).

Эрмат Нормулович Сатторов

Самаркандский государственный университет,

Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140101, Республика Узбекистан,

e-mail: Sattorov-e@rambler.ru

Зухро Эрматовна Эрматова

Самаркандский государственный университет,

Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140101, Республика Узбекистан,

e-mail: Sattorov-e@rambler.ru

E.N. Sattorov and Z.E. Ermamatova

On recovery of solutions to homogeneous system of Maxwell equations in a domain by their values on a part of a boundary

Abstract. In this paper we investigate the analytic continuation of the solution of the system of Maxwell equations in a bounded space domain from the values of the solution on part of the boundary of this domain, i. e. we study the Cauchy problem. We construct an approximate solution to this problem based on the Carleman matrix method.

Keywords: Maxwell equations, ill-posed problem, regular solution, Carleman matrix.

Ermamat Norkulovich Sattorov

Samarkand State University,

15 Univrsitetskii blvd., Samarkand, 140101 Republic of Uzbekistan,

e-mail: Sattorov-e@rambler.ru

Zukhro Ermamatovna Ermamatova

Samarkand State University,

15 Univrsitetskii blvd., Samarkand, 140101 Republic of Uzbekistan,

e-mail: Sattorov-e@rambler.ru