Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Б. Сизых, Осесимметричные винтовые течения вязкой жидкости, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 2, 49–56

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-49-56>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:27:21

Г.Б. СИЗЫХ

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВИНТОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Аннотация. Винтовыми в статье называются течения, в которых завихренность коллинеарна скорости. Для идеальной жидкости известны примеры стационарных винтовых течений (течения Громеки–Бельтрами, АВС-течения и т. д.), и давно доказано, что существование нестационарных винтовых течений невозможно (Э. Бельтрами, 1889). Для вязкой жидкости известны примеры нестационарных винтовых течений (В. Тркал, 1919). В представленной статье вопрос существования стационарных винтовых течений несжимаемой жидкости исследован с использованием уравнений Навье–Стокса в осесимметричном случае. Предполагалось, что коэффициент пропорциональности между завихренностью и скоростью может зависеть от пространственных координат. Показано, что в осесимметричном случае стационарные винтовые течения вязкой несжимаемой жидкости невозможны.

Ключевые слова: винтовые течения, уравнения Навье–Стокса, осесимметричные течения вязкой жидкости.

УДК: 532.517

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-2-49-56

ВВЕДЕНИЕ

Одно из первых исследований вихревых течений, в которых завихренность $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{V}$ и скорость $\mathbf{V}$ коллинеарны, было проведено И.С. Громекой в работе [1], где было получено несколько точных решений. Через несколько лет аналогичный результат был представлен в статье Э. Бельтрами [2], после чего такие течения (с упрощающим допущением $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$) стали называться винтовыми течениями. (Течение или решение уравнений движения жидкости называются вихревыми, если хотя бы в одной точке рассматриваемой области завихренность не равна нулю.) Наиболее известными примерами точных решений уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости являются упомянутые выше решения Громеки–Бельтрами и так называемые АВС-течения [3], [4]. Другие точные решения можно найти, например, в статьях [5], [6]. Все упомянутые решения являются винтовыми и обладают одним общим свойством: они стационарны. Это не случайно. Из теоремы Бельтрами [2], [7] следует, что уравнения Эйлера для течений несжимаемой жидкости могут иметь только стационарные винтовые решения. Таким образом, коллинеарность скорости и завихренности, нестационарность, несжимаемость и отсутствие вязкости являются примером комбинации упрощающих допущений, при которых уравнения движения жидкости не имеют вихревых решений.

Перейдем к вязкой несжимаемой жидкости. Для такой жидкости известны примеры точных винтовых решений уравнений Навье–Стокса [8]. Одно из первых таких решений было получено в 1919 г. в статье [9]. Новые решения появляются до сих пор [10]. В отличие

от винтовых решений для идеальной жидкости, все они нестационарные. На сегодняшний день не известно ни одного стационарного решения и нет ответа на вопрос, поставленный в 1948 г. в [11], могут ли существовать стационарные винтовые течения вязкой несжимаемой жидкости. В данной статье этот вопрос решен для осесимметричных течений. В результате найдена еще одна комбинация упрощающих допущений, при которой уравнения движения жидкости не имеют решений.

Статья построена следующим образом. Доказательство проведено методом от противного. Оно начинается в первом разделе, где сделано предположение о том, что существует стационарное осесимметричное винтовое течение вязкой несжимаемой жидкости. В последующих разделах получены свойства такого гипотетического течения, вытекающие из уравнений Навье–Стокса. В пятом разделе с использованием этих свойств получено противоречие и доказательство завершено.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим стационарное течение ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости. Будем использовать следующие безразмерные переменные: $\mathbf{V}$ — скорость; $\mathbf{\Omega} = \mathbf{rot} \mathbf{V}$ — завихренность; p — давление, отнесенное к плотности; Π — потенциал объемных сил; $\text{Re} < \infty$ — число Рейнольдса.

Поскольку для несжимаемой жидкости $\Delta \mathbf{V} = -\mathbf{rot} \mathbf{\Omega}$, уравнения Навье–Стокса, описывающие течение, могут быть записаны в форме [12]–[14]

$$\frac{1}{\text{Re}} \mathbf{rot} \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = -\nabla \left[p + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi \right], \quad \text{div} \mathbf{V} = 0.$$

В данной работе исследуется возможность существования винтовых течений. Это течение, в которых $\mathbf{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = 0$. Для стационарных винтовых течений уравнения Навье–Стокса принимают вид

$$\frac{1}{\text{Re}} \mathbf{rot} \mathbf{\Omega} = -\nabla \left[p + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi \right], \quad (1)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

$$\text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (3)$$

Будем рассматривать области течения, в которых нет разрывов скорости, давления и потенциала объемных сил и нет разрывов первых производных этих параметров. В таких областях достаточная для исследования гладкость этих характеристик считается естественным свойством физических параметров жидкости и полей внешних сил. Другими словами, считается, что существуют и непрерывны пространственные производные упомянутых параметров сколь угодно высокого порядка, какой только необходим для обоснованности доказательства. (В случае необходимости порядки этих производных могут быть уточнены при просмотре доказательства.) Поэтому традиционно [12]–[14] в формулировках теорем гидродинамики требования к гладкости не указываются. Следуя этой традиции, сформулируем теорему, доказательство которой является целью данной статьи.

Теорема. *Для осесимметричных течений в любой области система (1)–(3) может иметь только безвихревые ($\mathbf{\Omega} \equiv 0$) решения.*

Доказательство теоремы проведем методом от противного. Предположим, что в некоторой осесимметричной области G существует осесимметричное вихревое стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, в котором $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$. То есть предположим, что

в области G существует такое решение уравнений (1) – (3), в котором завихренность Ω хотя бы в одной точке области G не равна нулю. (Течение и область G имеют общую ось симметрии.)

Ниже будет получено противоречие, вытекающее из этого предположения, и цель статьи будет достигнута (теорема окажется доказанной).

Для исследования осесимметричного течения введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с началом в точке O так, чтобы ось Oz совпала с осью симметрии течения. Параметры осесимметричного течения не зависят от окружной координаты φ . Пусть $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ — правая тройка единичных векторов в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно. Вектор скорости закрученного течения имеет вид $\mathbf{V} = V_r \mathbf{e}_r + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_z \mathbf{e}_z$. Функции V_r, V_φ, V_z, p и Π зависят только от r и z . Поэтому правая, а следовательно, и левая части (1) имеют нулевую окружную составляющую.

Область G является фигурой вращения (вокруг оси симметрии) своего сечения σ полуплоскостью $\varphi = 0$. Из предположения, сформулированного в начале доказательства теоремы, в силу непрерывности завихренности Ω в сечении σ есть односвязная (двумерная) подобласть $\sigma_1 \in \sigma$, в которой завихренность не обращается в нуль. Поэтому существует (трехмерная осесимметричная) подобласть $G_1 \subset G$, во всех точках которой $\Omega \neq 0$, и сечение которой полуплоскостью $\varphi = 0$ является (двумерной) односвязной областью σ_1 . В цилиндрических координатах с учетом независимости параметров течения от окружной координаты φ уравнение неразрывности (3) записывается в виде $\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial}{\partial z} (rV_z) \right) = 0$. Отсюда (с использованием формулы Грина) следует существование в односвязной области σ_1 функции тока $\psi = \psi(r, z)$ такой, что

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \psi, \quad V_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi. \quad (4)$$

Обозначим $g = rV_\varphi$ (т. е. $V_\varphi = g/r$).

В следующих трех разделах будут получены некоторые свойства функций g и ψ , вытекающие из предположения, сформулированного в начале доказательства теоремы, и из уравнений (1)–(3). Затем эти свойства будут использованы в пятом разделе при завершении доказательства.

2. СВЯЗЬ ФУНКЦИЙ g И ψ , ВЫТЕКАЮЩАЯ ИЗ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Вычислим завихренность поля скорости в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(-\frac{\partial}{\partial z} V_\varphi \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial}{\partial z} V_r - \frac{\partial}{\partial r} V_z \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) \right) \mathbf{e}_z = \\ &= \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} g \right) \mathbf{e}_r + \Omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} g \right) \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi \right). \quad (5)$$

Запишем векторное произведение

$$\begin{aligned} \Omega \times \mathbf{V} &= - \left(\Omega_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi + \frac{1}{r^2} g \frac{\partial}{\partial r} g \right) \mathbf{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r^2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} g \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \psi \right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} \psi \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} g \right) \right) \mathbf{e}_\varphi - \left(\Omega_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \psi + \frac{1}{r^2} g \frac{\partial}{\partial z} g \right) \mathbf{e}_z. \quad (6) \end{aligned}$$

Согласно (2) в области G_1 вектор (6) равен нулю. В частности, равен нулю множитель при векторе $\mathbf{e}_\varphi$ в правой части (6). То есть $(\frac{\partial}{\partial r}g)(\frac{\partial}{\partial z}\psi) - (\frac{\partial}{\partial r}\psi)(\frac{\partial}{\partial z}g) = 0$ или $\nabla g \times \nabla \psi = 0$.

Если во всей области G_1 окажется, что $\nabla \psi = 0$, то согласно (5) будет равна нулю окружная составляющая завихренности $\Omega_\varphi = 0$. Кроме того, из (4) следует, что равны нулю радиальная и осевая составляющие скорости ($V_r = V_z = 0$). При этом в некоторой подобласти $G_2 \subset G_1$ будет выполнено неравенство $V_\varphi \neq 0$, поскольку иначе во всей области G_1 была бы нулевая завихренность ($\Omega \equiv 0$). С учетом $\Omega \times \mathbf{V} = 0$ это означает равенство нулю радиальной и осевой составляющих завихренности Ω . То есть во всей области G_2 все три составляющие завихренности окажутся тождественно равными нулю. Это противоречит выбору области G_1 , во всех точках которой завихренность не должна обращаться в нуль. Поэтому существует точка, в которой и $\nabla \psi \neq 0$, и в силу непрерывности $\nabla \psi$ существует область $G_3 \subset G_1$, в которой как завихренность Ω , так и градиент функции тока $\nabla \psi$ не обращаются в нуль: $\Omega \neq 0$ и $\nabla \psi \neq 0$. Дальнейшее исследование проведем в области G_3 . В этой области из равенства $\nabla g \times \nabla \psi = 0$ и неравенства $\nabla \psi \neq 0$ следует, что функцию g можно представить в виде $g = g(\psi)$.

Обозначим $g' = g'(\psi) = \frac{d}{d\psi}g$ и (6) с учетом $\Omega \times \mathbf{V} = 0$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\Omega_\varphi \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}gg'\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\psi\right)\mathbf{e}_r + 0 \cdot \mathbf{e}_\varphi - \left(\Omega_\varphi \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}gg'\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\psi\right)\mathbf{e}_z = \\ &= -\left(\Omega_\varphi \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}gg'\right)\nabla \psi. \end{aligned}$$

Отсюда (поскольку $\nabla \psi \neq 0$)

$$\Omega_\varphi \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}gg' = 0. \quad (7)$$

Заметим, что уравнение (7) получено без использования динамического уравнения Навье–Стокса (1).

3. СВЯЗЬ ФУНКЦИЙ g И ψ , ВЫТЕКАЮЩАЯ ИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА

Представим завихренность Ω в виде суммы $\Omega = \Omega_{rz} + \Omega_\varphi$, где

$$\Omega_{rz} = \mathbf{rot}(V_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}g\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}g\right)\mathbf{e}_z, \quad \Omega_\varphi = \mathbf{rot}(V_r \mathbf{e}_r + V_z \mathbf{e}_z) = \Omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

Как было замечено в первом разделе, левая часть (1) имеет нулевую окружную составляющую. Но окружная составляющая $\mathbf{rot} \Omega$ равна $\mathbf{rot} \Omega_{rz}$. Поэтому $\mathbf{rot} \Omega_{rz} = 0$, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}g\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}g\right) = 0. \quad (8)$$

Обозначая $g'' = \frac{d^2}{d\psi^2}g$ и учитывая, что $g = g(\psi)$, последнее уравнение запишем в виде

$$\frac{g''}{r}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\psi\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\psi\right)^2\right] + g'\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi\right)\right] = 0$$

или

$$\frac{g''}{r}(\nabla \psi)^2 + g'\Omega_\varphi = 0. \quad (9)$$

Теперь рассмотрим радиально-осевую составляющую уравнения (1), т. е. $\mathbf{rot} \Omega_\varphi$. Применяя операцию ротора к уравнению (1), получим $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \Omega = 0$. С учетом $\mathbf{rot} \Omega_{rz} = 0$

это значит, что $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \Omega_\varphi = 0$. Запишем последнее равенство в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Omega_\varphi + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega_\varphi) \right) = 0$$

и подставим в него выражение $\Omega_\varphi = -\frac{1}{r} g g'$, полученное из (7). В результате имеем

$$\frac{(g g')''}{r} (\nabla \psi)^2 + (g g')' \Omega_\varphi = 0. \quad (10)$$

Уравнения (8)–(10) будут использованы ниже.

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГРАДИЕНТА ФУНКЦИИ g

В области G_3 величина $(\nabla \psi)^2$ положительна. Поэтому из уравнений (9) и (10) следует дифференциальное уравнение

$$g''(g g')' = g'(g g')''. \quad (11)$$

В области G_3 отсутствуют точки нулевой завихренности. Поэтому из (7) вытекает $g \neq 0$ и $g' \neq 0$. Это, в частности, обосновывает возможность деления на g и g' в приводимых ниже выкладках.

Уравнение (11) имеет решение

$$g g' = c_1 g + c_2 \quad (12)$$

или

$$(c_1 - g') = -c_2/g. \quad (13)$$

Дифференцируя (13), получим

$$g'' = -c_2 g' / g^2. \quad (14)$$

Равенства (14) и (7) позволяют представить уравнение (9) в виде $-\frac{c_2 g'}{r g^2} (\nabla \psi)^2 - g' \frac{g g'}{r} = 0$.

Исключим из этого уравнения $(\nabla \psi)^2$, учитывая тот факт, что $(\nabla g)^2 = (g')^2 (\nabla \psi)^2 \neq 0$. В результате получим

$$-\frac{c_2 (\nabla g)^2}{(g g')^3} = 1. \quad (15)$$

Отсюда непосредственно следует $c_2 \neq 0$. Кроме того, используя это уравнение, покажем, что $c_1 \neq 0$. Действительно, предположим $c_1 = 0$. Тогда подстановка полученного из (12) значения $g g' = c_2$ в уравнение (15) приводит к невозможному для действительных чисел равенству вида $-x^2 = 1$. Поэтому $c_1 \neq 0$.

Подставим выражение (12) в уравнение (15) и для сокращения записи используем новые константы $a = -c_1 c_2^{-1/3} \neq 0$ и $b = -c_2^{2/3} \neq 0$. В итоге получим уравнение

$$\frac{(\nabla g)^2}{a g + b^3} = 1. \quad (16)$$

Заметим, что поскольку $c_1 g + c_2 = g g' \neq 0$, то и $(a g + b) \neq 0$. Более того, из (16) следует

$$a g + b > 0. \quad (17)$$

5. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Согласно (16) вектор-функция $(ag + b)^{-3/2} \nabla g$ является единичным вектором. То есть в области G_3 существует такая функция $\alpha(r, z)$, что во всей области G_3 выполняется векторное уравнение $(ag + b)^{-3/2} \nabla g = \mathbf{e}_r \cos \alpha + \mathbf{e}_z \sin \alpha$. Это равносильно двум скалярным уравнениям

$$(ag + b)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial r} g = \cos \alpha, \quad (ag + b)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial z} g = \sin \alpha. \quad (18)$$

Левые части этих уравнений представляют собой частные производные по переменным r и z от одной и той же функции. Из равенства вторых смешанных производных этой функции по переменным r и z следует уравнение для $\frac{\partial}{\partial r} \alpha$ и $\frac{\partial}{\partial z} \alpha$

$$-\sin \alpha \frac{\partial}{\partial z} \alpha = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial r} \alpha. \quad (19)$$

Чтобы найти $\frac{\partial}{\partial r} \alpha$ и $\frac{\partial}{\partial z} \alpha$, получим еще одно уравнение, связывающее эти производные. Для этого запишем уравнение (8) с использованием выражений (18). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} (ag + b)^{3/2} \sin \alpha \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} (ag + b)^{3/2} \cos \alpha \right) = 0$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{3}{2} a (ag + b)^{1/2} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial z} g + \frac{1}{r} (ag + b)^{3/2} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial z} \alpha + \\ & + \frac{1}{r} \frac{3}{2} a (ag + b)^{1/2} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial r} g - \frac{1}{r} (ag + b)^{3/2} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial r} \alpha - \frac{1}{r^2} (ag + b)^{3/2} \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Подставим в это уравнение выражения для $\frac{\partial}{\partial r} g$ и $\frac{\partial}{\partial z} g$ из (18). После упрощений получим

$$-\sin \alpha \frac{\partial}{\partial r} \alpha + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial z} \alpha = \frac{\cos \alpha}{r} - \frac{3}{2} a (ag + b)^{1/2}. \quad (20)$$

Решая систему (19)–(20) относительно $\frac{\partial}{\partial r} \alpha$ и $\frac{\partial}{\partial z} \alpha$, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \alpha &= -\frac{\sin 2\alpha}{2r} + \frac{3}{2} a (ag + b)^{1/2} \sin \alpha, \\ \frac{\partial}{\partial z} \alpha &= \frac{\cos^2 \alpha}{r} - \frac{3}{2} a (ag + b)^{1/2} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

Условие совместности этих уравнений $\left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial r} \alpha = \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \alpha \right)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{\cos 2\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial z} \alpha + \frac{3}{2} a (ag + b)^{1/2} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial z} \alpha + \frac{3}{2} a \frac{1}{2} a (ag + b)^{-1/2} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial z} g = \\ & = -\frac{\cos^2 \alpha}{r^2} - \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \alpha + \frac{3}{2} a (ag + b)^{1/2} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial r} \alpha - \\ & \quad - \frac{3}{2} a \frac{1}{2} a (ag + b)^{-1/2} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial r} g. \end{aligned}$$

Подставим в это равенство выражения для $\frac{\partial}{\partial r} g$, $\frac{\partial}{\partial z} g$ и $\frac{\partial}{\partial r} \alpha$, $\frac{\partial}{\partial z} \alpha$ из формул (18) и (21) соответственно. Получится уравнение, в котором нет производных. Если перегруппировать слагаемые и представить это уравнение в виде

$$\frac{1}{r^2} A(\alpha) + \frac{a}{r} (ag + b)^{1/2} B(\alpha) + a^2 (ag + b) C(\alpha) = 0,$$

то после упрощений выражение для $A(\alpha)$ окажется равным нулю. В результате с учетом $a \neq 0$ после сокращения на одинаковые ненулевые множители уравнение примет вид

$$2 \frac{\cos \alpha}{r} = a(ag + b)^{1/2}. \quad (22)$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (21), получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \alpha = -2 \frac{\cos^2 \alpha}{r}. \quad (23)$$

Продифференцируем уравнение (22) по z . С использованием (23) и второго уравнения (18) имеем

$$2 \left(2 \frac{\cos \alpha}{r} \right)^2 \sin \alpha = a^2 (ag + b) \sin \alpha.$$

С учетом (17) это равенство может быть представлено в равносильном виде

$$2 \left(2 \frac{\cos \alpha}{r} \right)^2 \sin \alpha = \left(a(ag + b)^{1/2} \right)^2 \sin \alpha.$$

Сравним это уравнение с (22) и учтем, что в уравнении (22) правая а, следовательно, и левая части не равны нулю. Поэтому последнее уравнение возможно только в случае $\sin \alpha = 0$, и уравнения (18) упрощаются, допуская два варианта:

$$(ag + b)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial r} g = -1, \quad \frac{\partial}{\partial z} g = 0 \quad (24)$$

или

$$(ag + b)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial r} g = +1, \quad \frac{\partial}{\partial z} g = 0. \quad (25)$$

В каждом из двух вариантов $\frac{\partial}{\partial z} g = 0$. Это вместе с (8) означает существование таких двух констант c_3 и c_4 , что $g = c_3 r^2 + c_4$. Однако при любом сочетании констант a , b , c_3 и c_4 выражение $g = c_3 r^2 + c_4$ не может удовлетворять первому равенству (24) во всей области G_3 . Аналогично, при любом сочетании констант a , b , c_3 и c_4 выражение $g = c_3 r^2 + c_4$ не может удовлетворять первому равенству (25) во всей области G_3 .

Полученное противоречие означает ошибочность предположения, сформулированного в начале доказательства теоремы. Тем самым доказано, что в осесимметричном случае в любой области система (1)–(3) может иметь только безвихревые ($\Omega \equiv 0$) решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследования уравнений Навье–Стокса (в предположении, что вязкость не равна нулю) доказана невозможность существования стационарных осесимметричных винтовых течений несжимаемой жидкости, у которых в рассматриваемой области есть точки ненулевой завихренности. Тем самым найдена неизвестная ранее комбинация упрощающих допущений, при одновременном выполнении которых уравнения движения жидкости не имеют вихревых решений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Громека И.С. *Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости*, Учен. зап. Казанск. ун-та (1881).
- [2] Beltrami E. *Considerazioni idrodinamiche*, Rend. Inst. Lombardo Acad. Sci. Lett. **22**, 122–131 (1889).
- [3] Arnold V.I. *Sur la topologie des'écoulements stationnaires des fluides parfaits*, Comptes Rendus Acad Sci Paris **261**, 17–20 (1965).
- [4] Dombre T., Fisch U., Greene J.M., et.al. *Chaotic streamlines in the ABC flows*, J. Fluid Mech. **167**, 353–391 (1986).

- [5] Vereshchagin V.P., Subbotin Y.N., Chernykh N.I. *On the mechanics of helical flows in an ideal incompressible nonviscous continuous medium*, Proc. of the Steklov Institute of Math. **284** (S1), 159–174 (2014).
- [6] Ковалёв В.П., Сизых Г.Б. *Осесимметричные винтовые течения идеальной жидкости*, Тр. МФТИ **8** (3), 171–179 (2016).
- [7] Truesdell C. *The kinematics of vorticity* (Indiana Univ. Press, Bloomington, 1954).
- [8] Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions* (Cambridge Univ. Press, 2006).
- [9] Trkal V. *Poznámka k hydrodynamice vazkých tekutin*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky (Praha) **48** (3), 302–311 (1919).
- [10] Ковалёв В.П., Просвирыков Е.Ю., Сизых Г.Б. *Получение примеров точных решений уравнений Навье–Стокса для винтовых течений методом суммирования скоростей*, Тр. МФТИ **9** (1), 71–88 (2017).
- [11] Бюшгенс С.С. *О винтовом потоке*, Научн. зап. Московск. гидромелиоративного ин-та (МГМИ) **17**, 73–90 (1948).
- [12] Ламб Г. *Гидродинамика* (ОГИЗ. ГИТТЛ, М., 1947).
- [13] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа* (Дрофа, М., 2003).
- [14] Бэтчелор Дж. *Введение в динамику жидкости* (Мир, М., 1973).

Григорий Борисович Сизых

Московский физико-технический институт,

Институтский переулок, д. 9, г. Долгопрудный, Московская область, 141700, Россия,

e-mail: o1o2o3@yandex.ru

G.B. Sizykh

Axisymmetric helical flow of viscous fluid

Abstract. Helical flow is called a flow in which the velocity vector is collinear to the vorticity vector. For ideal fluid examples are known of stationary helical flows (Gromeka–Beltrami flows, ABC-flows, etc.) and it is proved that the existence of unsteady helical flows is impossible (Beltrami, 1889). For a viscous fluid examples are known of unsteady helical flows (Trkal, 1919). But it is still unknown whether there can exist a stationary helical flow of a viscous fluid. In the present article this question is investigated using the Navier–Stokes equations in the axisymmetric case. It was assumed that the coefficient of proportionality between the vorticity and velocity may depend on the spatial coordinates. It is shown that in the axisymmetric case, the existence of such flows is impossible. This study solved the problem of the existence of axisymmetric helical flows of an incompressible fluid.

Keywords: helical flow, Navier–Stokes equations, axisymmetric flow of a viscous fluid.

Grigory Borisovich Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology,

9 Institutskii Lane, Dolgoprudny, Moscow Region, 141700 Russia,

e-mail: o1o2o3@yandex.ru