Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Сперанский, П. А. Терехин, О существовании фреймов в пространстве Харди, построенных на основе ядра Сеге, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 2, 57–68

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-57-68>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:38:14

К.С. СПЕРАНСКИЙ, П.А. ТЕРЕХИН

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФРЕЙМОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ ЯДРА СЕГЕ

Аннотация. Хорошо известно, что последовательность функций, состоящая из значений воспроизводящего ядра Сеге пространства Харди в единичном круге, не может быть фреймом Даффина—Шеффера. В данной работе показано, что при использовании более общей концепции фрейма вопрос о существовании такого обобщенного фрейма, построенного на основе ядра Сеге, решается положительно.

Ключевые слова: фреймы Даффина—Шеффера, банаховы фреймы, модельное пространство фрейма, воспроизводящее ядро гильбертова пространства, пространство Харди, ядро Сеге.

УДК: 517.518

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-2-57-68

ВВЕДЕНИЕ

Задача представления функций рядами по элементам заданной последовательности e_n , $n = 1, 2, \dots$, заключается в нахождении для произвольной функции f из некоторого класса F последовательности коэффициентов c_n , $n = 1, 2, \dots$, такой, что $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. Вопросы представления функций рядами составляют обширную область теории функций и имеют многочисленные приложения. Наряду с классическими методами решения задачи представления активно развиваются современные методы представления на основе использования орторекурсивных разложений (Т.П. Лукашенко [1], В.В. Галатенко, Т.П. Лукашенко и В.Н. Садовничий [2]), жадных алгоритмов (В.Н. Темляков [3]), а также теории фреймов, предоставляющей общие и даже универсальные подходы к конструкции представления. Здесь следует упомянуть классическую работу Р. Даффина и А. Шеффера [4], в которой введено понятие фрейма гильбертова пространства, и теорию Файхтингера и К. Грохенига [5], [6], особенно работу К. Грохенига [7], в которой концепция фрейма впервые распространена на ситуацию банахова пространства. Понятия атомарного разложения и банахова фрейма по Грохенигу легли в основу других близких определений, например, фрейма Шаудера (П. Касазза, Д. Хан и Д. Ларсон [8]) и X_d -фрейма (П. Касазза, О. Кристенсен и Д. Стоева [9]).

Задача представления тесно связана, в частности, с задачей восстановления функции по заданной последовательности ее значений, что приводит к вопросу о фреймовых (представляющих) свойствах системы функций, состоящей из значений воспроизводящего ядра $K(\cdot, x_n)$, $n = 1, 2, \dots$, функционального гильбертова пространства. Ответ на данный вопрос

Поступила в редакцию 05.12.2017, после доработки 09.01.2018. Принята к публикации 22.03.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00414).

существенно зависит от геометрии пространства. Например, для пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$ хорошо известно (П. Дюрен и Шустер [10], гл. 6), что не существует фрейма Даффина—Шеффера в $H^2(\mathbb{D})$, построенного на основе ядра Сеге. А для собственного подпространства $K \subset H^2(\mathbb{D})$, порожденного функциями $K(\cdot, z_n)$, $n = 1, 2, \dots$, критерием последовательности Рисса (нормированного ядра) является условие Карлесона (конечно, при выполнении условия Бляшке), что также эквивалентно тому, что точки $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ образуют интерполяционную последовательность. Эти и некоторые другие хорошо известные представляющие свойства ядра Сеге приводим в разделе 1.

Основной вопрос, рассматриваемый в настоящей работе, заключается в следующем:
существует ли фрейм пространства Харди, построенный на основе ядра Сеге?

Естественно, речь идет об использовании определения понятия фрейма, более общего, нежели фрейм Даффина—Шеффера. Даем положительный ответ на основной вопрос (теорема 3), останавливаясь на понятии фрейма $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ в банаховом пространстве F относительно модельного пространства последовательностей $\mathcal{E}$ (определение 3).

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть H — сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Последовательность $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ненулевых элементов пространства H называется *фреймом Даффина—Шеффера*, если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для всех $f \in H$ выполняются неравенства

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (1)$$

Термин фрейм был предложен Р. Даффином и А. Шеффером [4]. Двусторонняя оценка (1) ранее рассматривалась в работе Бари [11] в качестве обобщения равенства Парсевала. Построению фреймов в конкретных гильбертовых пространствах на основе систем функций специального вида (фреймы экспонент, фреймы сдвигов, фреймы всплесков) посвящены многочисленные исследования. В монографии О. Кристенсена [12] приведены классические и современные результаты, а также обширная библиография по данной тематике. Интерес к построению фреймов обусловлен, в частности, тем обстоятельством, что всякий фрейм Даффина—Шеффера $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ является системой представления в H относительно ℓ^2 , т. е. для любого $f \in H$ существует числовая последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$, для которой справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n. \quad (2)$$

В связи с задачей восстановления функции f по дискретному (счетному) набору ее значений $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ особую роль играют вопросы построения фреймов на основе воспроизводящих ядер функциональных гильбертовых пространств. Напомним соответствующие определения.

Определение 1. Пусть X — некоторое непустое множество. Гильбертово пространство H называется *функциональным* (над X), если каждый элемент $f \in H$ является функцией $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ и при этом для всех $x \in X$ линейный функционал $\delta_x(f) = f(x)$ на H , который называется *оценочным функционалом*, корректно определен и непрерывен, т. е. найдется $C_x < \infty$ такое, что для всех $f \in H$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq C_x \|f\|.$$

По теореме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве для каждого $x \in X$ существует и при том единственный элемент $K_x \in H$ такой, что

$$\delta_x(f) = (f, K_x), \quad f \in H.$$

Определение 2. Функция $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$, определенная посредством равенства

$$K(x, t) = (K_t, K_x), \quad x, t \in X,$$

называется *воспроизводящим ядром* функционального гильбертова пространства H .

Пусть x_n , $n = 1, 2, \dots$, — попарно различные точки множества X . Рассмотрим вопрос о фреймовых (представляющих) свойствах в H нормированной последовательности

$$e_n = \|K_{x_n}\|^{-1} K_{x_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Сразу заметим, что ответ на этот вопрос принципиальным образом зависит не только от выбора точек, но и от геометрии функционального гильбертова пространства. В данной работе ограничиваемся выбором в качестве H пространства Харди. Также отметим, что известен широкий круг задач, связывающих в единое целое проблематику фреймов и воспроизводящих ядер. Здесь упомянем монографию Дж. Партингтона ([13], гл. 5) (в особенности § 5.5, где указывается на взаимосвязь непрерывного всплескового преобразования с воспроизводящим ядром подходящего гильбертова пространства); статью [14], посвященную фреймам и ядрам в ситуации банахова пространства с внутренним произведением (частным случаем которого является скалярное произведение); статью [15], в которой решается обратная задача построения ядра по заданному фрейму; статью [16], где изучаются близкие вопросы плотности сэмпинга и интерполяции на основе ядер; а также статьи [17], [18], сочетающие в себе теоретические и прикладные вопросы взаимосвязи фреймов и воспроизводящих ядер. Конечно, приведенные отдельные ссылки не претендуют на полноту.

Теперь перейдем к постановке частного случая рассматриваемого вопроса, касающегося фреймовых (представляющих) свойств ядра Сеге пространства Харди.

Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ состоит из всех аналитических в единичном круге $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ функций $f(z)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_2 = \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Пространство H^2 является функциональным гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром

$$K(z, \zeta) = K_\zeta(z) = \frac{1}{1 - \bar{\zeta}z}, \quad z, \zeta \in \mathbb{D},$$

которое называется ядром Сеге (например, [19]). Для попарно различных точек $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ полагаем

$$e_n = (1 - |z_n|^2)^{1/2} K_{z_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

— нормированная в H^2 (т.е. $\|e_n\|_2 = 1$) последовательность дискретизаций ядра Сеге $K(\cdot, z_n)$. Следующие свойства последовательности $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ хорошо известны (например, [13], гл. 2).

Предложение 1. Последовательность $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ является полной в H^2 в том и только том случае, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) = \infty. \quad (\text{A})$$

Предложение 2. Последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является минимальной в H^2 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty. \quad (B)$$

Условие (B) называется *условием Бляшке*. Поскольку условие (A) является отрицанием условия Бляшке, то последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не может быть одновременно полной и минимальной, в частности, базисом пространства H^2 .

Напомним, что $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ называется последовательностью Рисса, если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любой числовой последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ выполняются неравенства

$$A \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right\|_H^2 \leq B \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Предложение 3. Пусть точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию (B). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью Рисса;
- (ii) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является равномерно минимальной последовательностью;
- (iii) существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\prod_{m \neq n} \left| \frac{z_m - z_n}{1 - \bar{z}_n z_m} \right| \geq \delta > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (C)$$

Условие (C) называется *условием Карлесона* и эквивалентно тому, что точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют *интерполяционную последовательность*: для всех $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ существует функция $f \in H^{\infty}(\mathbb{D})$, для которой $f(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, \dots$. Условие Ньюмана заключается в существовании постоянной $B < \infty$ такой, что для всех $f \in H^2$ выполнено неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2) |f(z_n)|^2 \leq B \|f\|_2^2. \quad (N)$$

Это условие означает, что $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является *последовательностью Бесселя*. На основании предложения 3 из условий (B) и (C) вытекает условие (N). Кроме того, имеет место

Предложение 4. Каждое множество точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющее условию (N), является конечным объединением интерполяционных последовательностей.

Это предложение отражает следующий общий факт.

Каждая последовательность Бесселя $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\inf_{n=1,2,\dots} \|h_n\| > 0$, является конечным объединением последовательностей Рисса.

Это замечательное утверждение было высказано в качестве гипотезы Файхтингером и эквивалентно гипотезе Кадисона—Зингера, доказанной в 2013 г. А. Маркусом, Д. Шпильманом и Н. Шриваставой [20].

Из очевидной импликации (N) $\Rightarrow$ (B) вытекает

Предложение 5. Всякая последовательность Бесселя $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ заведомо не полна в H^2 , в частности, не существует точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм Даффина—Шеффера.

Таким образом, условие ℓ^2 -стабильности (1) из определения фрейма Даффина—Шеффера не выполнимо для последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Неформально говоря, ℓ^2 -норма слишком

“мала” (и пространство ℓ^2 слишком “велико”), чтобы обеспечить оценку снизу в (1) при наличии оценки сверху. Однако далее будет показано, что при подходящем обобщении понятия фрейма искомый обобщенный фрейм вида $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ может быть построен. Раздел 2 содержит обсуждение рассматриваемого определения фрейма и, наконец, в разделе 3 приводим искомую конструкцию, которая автоматически гарантирует возможность представления вида (2) для произвольной функции $f \in H^2$.

Замечание 1. Ситуация, при которой свойство полноты системы функций из некоторого класса входит в прямое противоречие с другими естественными свойствами такими, как минимальность или бесселевость, происходит во многих классических случаях. Например, для систем степеней $\{x^{p_k}\}_{k=1}^\infty$ минимальность в $L^2(a, b)$ равносильна отрицанию условия Мюнца, эквивалентного полноте (например, [21], гл. 1, § 13). Для систем сдвигов $\{\varphi(x - \lambda_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ бесселевость в $L^2(\mathbb{R})$ имеет следствием конечную верхнюю плотность Берлинга точек $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, в то время как существование нижней границы фрейма Даффина–Шеффера (из которого вытекает полнота) имплицитно бесконечную верхнюю плотность Берлинга и поэтому в $L^2(\mathbb{R})$ не существует фреймов Даффина–Шеффера из сдвигов одной функции ([12], гл. 9, § 6). Для систем дискретизированных воспроизводящих ядер гильбертовых пространств подобные тонкие результаты получены в статье [16].

Замечание 2. Анти-условие Бляшке (A), т. е. отрицание (B), гарантирует переполненность последовательности $\{e_n\}_{n=1}^\infty$: для каждого $n_0 \in \mathbb{N}$ подпоследовательность $\{e_n\}_{n=n_0}^\infty$ также будет полной в H^2 . Следовательно, для любой функции $f \in H^2$ найдется $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ такое, что справедливо представление (полагая $n_0 = 1$)

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} \xi_n e_n.$$

Такое представление еще не означает, что $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ является системой представления в H^2 , поскольку номера n_k , вообще говоря, зависят от f . Кроме того, теорема Тотика [22] утверждает, что условие (A) необходимо и достаточно для решения задачи восстановления, а именно, в предположении (A) существует семейство алгебраических полиномов $p_{n,k}$, где $n = 1, 2, \dots$ и $k = 1, \dots, n$, таких, что для любой функции $f \in H^2$ справедливо представление

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k) p_{n,k}.$$

Ясно, что такое аппроксимационное представление также, вообще говоря, не гарантирует представления в виде ряда (2).

2. ФРЕЙМЫ И ИХ МОДЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Всюду далее $\mathcal{E}$ — банахово пространство последовательностей с естественным базисом $\varepsilon_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^\infty$, $i = 1, 2, \dots$ (δ — символ Кронекера). Такое пространство $\mathcal{E}$ будем называть *модельным*. Каждый непрерывный линейный функционал l на $\mathcal{E}$ однозначно определяется своими значениями $\{l(\varepsilon_n)\}_{n=1}^\infty$ на элементах естественного базиса. Поэтому сопряженное пространство $\mathcal{E}^*$ изометрически изоморфно некоторому пространству последовательностей и будет далее отождествляться с ним.

Пусть F — сепарабельное комплексное банахово пространство и $G = F^*$ сопряженное к нему. Как обычно, (f, g) означает значение функционала $g \in G$ на элементе $f \in F$.

Определение 3. Последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов банахова пространства F называется *фреймом* в F относительно $\mathcal{E}$, если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для всех $g \in F$ выполняются неравенства

$$A\|g\|_G \leq \| \{ (e_n, g) \}_{n=1}^{\infty} \|_{\mathcal{E}^*} \leq B\|g\|_G. \quad (3)$$

Данное определение является двойственным по отношению к известным определениям атомарного разложения [7], а также концепции фрейма Шаудера [8], понятию X_d -фрейма [9] и было предложено в статье [23]. Как показано в [23], определение 3 дает универсальный способ решения задачи представления функций рядами, а именно, имеет место

Теорема 1. Последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фреймом в F относительно $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

- (i) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является системой сходимости в F относительно $\mathcal{E}$, т. е. для всех $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{E}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ сходится в F ;
- (ii) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в F относительно $\mathcal{E}$, т. е. для всех $f \in F$ существует последовательность $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{E}$ такая, что $f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$.

Замечание 3. В настоящее время насчитывается более десятка неэквивалентных между собой определений понятия фрейма в ситуации банахова пространства. Соотношение с ними выбранного определения 3 обсуждается в работах [24] и [25]. Следует заметить, что если $F = G = H$ — гильбертово пространство, то фреймовые неравенства (3) могут быть записаны в виде

$$A\|f\| \leq \| \{ (f, e_n) \}_{n=1}^{\infty} \|_{\mathcal{E}^*} \leq B\|f\|$$

и поэтому совпадают в этом частном случае с фреймовыми неравенствами из определений работ [7] – [9]. Если к тому же $\mathcal{E} = \mathcal{E}^* = \ell^2$, то получаем фреймовые неравенства Даффина–Шеффера (1) с точностью до извлечения квадратного корня из постоянных.

Замечание 4. Выбор модельного пространства $\mathcal{E}$ фрейма $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ оказывает влияние на тип сходимости представляющего f ряда. Например, если естественный базис пространства $\mathcal{E}$ является безусловным, то ряд в правой части представления (2) (с коэффициентами из $\mathcal{E}$) безусловно сходится к f . Если же пространство $\mathcal{E}$ является ℓ^1 -суммой конечномерных координатных пространств $\mathcal{E}_k$, $\dim \mathcal{E}_k = n_k$,

$$\mathcal{E} = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_k \right)_{\ell^1},$$

что соответствует разбиению последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ на блоки

$$e_n = e_{k,j}, \quad j = 0, \dots, n_k - 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то ряд в правой части представления (2) абсолютно сходится к f по блокам

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_F < \infty.$$

В этом случае для подпространств $F_k = \text{span} \{e_{k,j}\}_{j=0}^{n_k-1} \subset F$ имеем

$$F = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} F_k \right)_{\ell^1}.$$

В следующем разделе будет рассмотрена именно такая ситуация и поэтому после построения фрейма $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ на основе ядра Сеге будут справедливы подобные представления. Также будем использовать двойственность ℓ^1 - и ℓ^∞ -сумм, которая заключается в том, что

$$\mathcal{E}^* = \left(\bigoplus_{k=1}^\infty \mathcal{E}_k^* \right)_{\ell^\infty}.$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ФРЕЙМА НА ОСНОВЕ ЯДРА СЕГЕ

Дискретное преобразование Фурье — это унитарный оператор в n -мерном унитарном пространстве ℓ_n^2 , определяемый равенством

$$\widehat{\xi}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e^{-2\pi i j k / n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Пусть $0 < r < 1$. Положим в соответствии с принятыми ранее обозначениями

$$e_j = (1 - r^2)^{1/2} K_{\zeta_j}, \quad \zeta_j = r e^{2\pi i j / n}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Лемма. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $r \in (0, 1)$ выполняются неравенства

$$\frac{r^{2n} n (1 - r^2)}{1 - r^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e_j \right\|_2^2 \leq \frac{n(1 - r^2)}{1 - r^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2.$$

Доказательство. По определению ядра Сеге

$$\sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e_j(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\xi_j (1 - r^2)^{1/2}}{1 - r e^{-2\pi i j / n} z} = (1 - r^2)^{1/2} \sum_{k=0}^\infty r^k \left(\sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e^{-2\pi i j k / n} \right) z^k,$$

откуда

$$\left\| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e_j \right\|_2^2 = (1 - r^2) \sum_{k=0}^\infty r^{2k} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e^{-2\pi i j k / n} \right|^2.$$

Учитывая периодичность экспонент по модулю n , т. е. $e^{-2\pi i j (ln+k)/n} = e^{-2\pi i j k / n}$, находим

$$\left\| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e_j \right\|_2^2 = (1 - r^2) \sum_{l=0}^\infty r^{2ln} \sum_{k=0}^{n-1} r^{2k} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e^{-2\pi i j k / n} \right|^2 = \frac{n(1 - r^2)}{1 - r^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} r^{2k} |\widehat{\xi}_k|^2.$$

Используя тривиальные оценки $r^{2n} < r^{2k} < 1$ и унитарность дискретного преобразования Фурье, получаем искомые неравенства. $\square$

Рассмотрим точки $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ специального вида

$$z_n = z_{k,j} = r_k e^{2\pi i j / n_k}, \quad j = 0, \dots, n_k - 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где

$$n_1 < \dots < n_k < \dots, \quad 0 < r_1 < \dots < r_k < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 1,$$

и потребуем, чтобы “номера” n_k и “радиусы” r_k удовлетворяли следующему условию согласования: существуют постоянные $0 < a \leq b < \infty$ такие, что

$$a/n_k \leq 1 - r_k \leq b/n_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Далее будем использовать обозначение

$$\Omega := \{(k, j) : j = 0, \dots, n_k - 1, \quad k = 1, 2, \dots\}$$

для множества пар (k, j) , индексирующих точки $z_n = z_{k,j}$, и соответствующие им значения нормированного ядра Сеге $e_n = e_{k,j}$.

Теорема 2. Пусть точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют вид (4) и удовлетворяют условию (5). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) для коэффициентов $\xi_n = \xi_{k,j}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

(ii) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ абсолютно сходится по блокам в H^2 , т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_2 < \infty.$$

При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ безусловно сходится в H^2 .

Доказательство. На основании леммы для всех $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$A_k \sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2 \leq \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_2^2 \leq B_k \sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2,$$

где

$$A_k = \frac{r_k^{2n_k} n_k (1 - r_k^2)}{1 - r_k^{2n_k}}, \quad B_k = \frac{n_k (1 - r_k^2)}{1 - r_k^{2n_k}}.$$

В силу условия согласования (5), с одной стороны,

$$r_k^{2n_k} \geq \left(1 - b/n_k\right)^{2n_k} \rightarrow e^{-2b} > 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

откуда $r_k^{2n_k} \geq \alpha > 0$, $k = 1, 2, \dots$. С другой стороны,

$$r_k^{2n_k} \leq \left(1 - a/n_k\right)^{2n_k} \rightarrow e^{-2a} < 1, \quad k \rightarrow \infty,$$

откуда $r_k^{2n_k} \leq \beta < 1$, $k = 1, 2, \dots$. Также ввиду (5) имеем $a \leq n_k(1 - r_k^2) \leq 2b$, $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, для всех k

$$0 < \frac{\alpha a}{1 - \alpha} \leq A_k \leq B_k \leq \frac{2b}{1 - \beta} < \infty.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\alpha a}{1 - \alpha} \right)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_2 \leq \left(\frac{2b}{1 - \beta} \right)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (ii) установлена. Осталось показать, что из абсолютной сходимости по блокам следует безусловная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$.

Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ абсолютно сходится по блокам в H^2 . Возьмем $\varepsilon > 0$ и, используя доказанную эквивалентность утверждений (i) и (ii), выберем k_0 так, чтобы

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Обозначим через I_0 множество всех индексов $(k, j) \in \Omega$, для которых $k < k_0$. Для произвольного конечного множества I индексов $(k, j) \in \Omega$ такого, что $I \supset I_0$, имеем

$$\left\| \sum_{(k,j) \in \Omega \setminus I} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_2 \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \left\| \sum_{\{j: (k,j) \in \Omega \setminus I\}} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_2 < \left(\frac{2b}{1-\beta} \right)^{1/2} \varepsilon.$$

Это означает, что семейство $\{\xi_{k,j} e_{k,j}\}_{(k,j) \in \Omega}$ является суммируемым, что равносильно его безусловной сходимости ([26], гл. 3, с. 120). $\square$

Доказанная теорема 2 побуждает к вполне оправданному выбору в качестве ассоциированного с системой $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ модельного пространства

$$\mathcal{E} = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_{n_k}^2 \right)_{\ell^1}.$$

Теорема 3. Пусть точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют вид (4) и удовлетворяют условию (5). Тогда последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фреймом в H^2 относительно $\mathcal{E}$.

Доказательство. По теореме 2 корректно определен и ограничен оператор синтеза $S : \mathcal{E} \rightarrow H^2$, заданный равенством

$$S\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n.$$

Действительно, полагая $B = \left(\frac{2b}{1-\beta} \right)^{1/2}$, в обозначениях доказательства теоремы 2 имеем

$$\|S\xi\|_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n_k-1} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_2 \leq B \|\xi\|_{\mathcal{E}}.$$

Оператор анализа $R : H^2 \rightarrow \mathcal{E}^*$, определяемый равенством

$$Rg = \{(e_n, g)\}_{n=1}^{\infty},$$

является сопряженным к оператору синтеза, поскольку

$$(S\xi, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (e_n, g) = (\xi, Rg).$$

Следовательно, $\|Rg\|_{\mathcal{E}^*} \leq B\|g\|_2$, что означает справедливость оценки сверху из фреймовых неравенств (3)

$$\|\{(e_n, g)\}_{n=1}^{\infty}\|_{\mathcal{E}^*} \leq B\|g\|_2. \quad (6)$$

Таким образом, для доказательства теоремы требуется получить оценку снизу в (3), что с учетом двойственности (см. замечание 4)

$$\mathcal{E}^* = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ell_{n_k}^2 \right)_{\ell^{\infty}}$$

и определения функций e_n , $n = 1, 2, \dots$, записывается в виде

$$\|\{(e_n, g)\}_{n=1}^\infty\|_{\mathcal{E}^*} = \sup_{k=1,2,\dots} \left((1 - r_k^2) \sum_{j=0}^{n_k-1} |g(r_k e^{2\pi i j/n_k})|^2 \right)^{1/2} \geq A \|g\|_2. \quad (7)$$

Пусть сначала $g \in A(\mathbb{D})$, т.е. функция $g(z)$ аналитична в $\mathbb{D}$ и непрерывна в $\bar{\mathbb{D}} = \{|z| \leq 1\}$. В этом случае семейство функций $G_r(t) = |g(re^{it})|^2$, $0 < r \leq 1$, равномерно непрерывно и $G_r(t) \rightarrow G_1(t)$ при $r \rightarrow 1$ равномерно по t . Поэтому интегральные суммы Римана этих функций

$$S(G_r, \varkappa_n) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} G_r\left(\frac{2\pi j}{n}\right),$$

соответствующие разбиениям $\varkappa_n = \{2\pi j/n\}_{j=0}^n$ отрезка $[0, 2\pi]$, сходятся к $\int_0^{2\pi} G_1(t) dt = 2\pi \|g\|_2^2$ при $r \rightarrow 1$ и $n \rightarrow \infty$. Действительно, имеем

$$\left| S(G_r, \varkappa_n) - \int_0^{2\pi} G_r(t) dt \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{2\pi j/n}^{2\pi(j+1)/n} \left| G_r\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - G_r(t) \right| dt \leq 2\pi \omega\left(\{G_r\}_{0 < r \leq 1}, 2\pi/n\right),$$

где модуль непрерывности семейства функций $G_r(t)$

$$\omega(\{G_r\}_{0 < r \leq 1}, \delta) = \sup_{0 < r \leq 1} \sup_{|s-t| < \delta} |G_r(s) - G_r(t)|$$

мажорируется модулем непрерывности функции $g(z)$

$$\omega(g, \delta) = \sup_{|\zeta - z| < \delta} |g(\zeta) - g(z)|,$$

так как $|\zeta - z| = |re^{is} - re^{it}| = 2r \sin \frac{|s-t|}{2} \leq |s-t|$. Кроме того, имеем

$$\left| \int_0^{2\pi} G_r(t) dt - \int_0^{2\pi} G_1(t) dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| |g(re^{it})|^2 - |g(e^{it})|^2 \right| dt \leq 2 \|g\|_{A(\mathbb{D})} \cdot 2\pi \omega(g, 1-r).$$

В итоге, как и утверждалось, при $r \rightarrow 1$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left| S(G_r, \varkappa_n) - \int_0^{2\pi} G_1(t) dt \right| \leq C_1 \omega\left(g, \frac{2\pi}{n}\right) + C_2 \omega(g, 1-r) \rightarrow 0.$$

В частности, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} |g(r_k e^{2\pi i j/n_k})|^2 \right)^{1/2} = \|g\|_2.$$

Поскольку $1/n_k \leq (1 - r_k^2)/a$ и $\lim \leq \sup$, то из последнего соотношения вытекает (7) с постоянной $A = \sqrt{a} > 0$ для функции $g \in A(\mathbb{D})$. Пусть теперь функция $g \in H^2$ произвольна. Выберем $g_\varepsilon \in A(\mathbb{D})$ так, чтобы $\|g - g_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$. Тогда в силу (6) имеем $\|R(g - g_\varepsilon)\|_{\mathcal{E}^*} < B\varepsilon$ и поэтому

$$\|Rg\|_{\mathcal{E}^*} \geq \|Rg_\varepsilon\|_{\mathcal{E}^*} - \|R(g - g_\varepsilon)\|_{\mathcal{E}^*} \geq A \|g_\varepsilon\|_2 - B\varepsilon \geq A \|g\|_2 - (A + B)\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то получаем (7) для всех $g \in H^2$. $\square$

Следствие. Пусть точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют вид (4) и удовлетворяют условию (5). Тогда для любой функции $f \in H^2$ существует последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\xi_{k,j}\}_{(k,j) \in \Omega}$ такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (1 - |z_n|^2)^{1/2} K_{z_n}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k-1} |\xi_{k,j}|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Замечание 5. Следует отметить, что коэффициенты данного представления $\xi_n = \xi_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, нелинейно зависят от f . В частности, для каждого $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$K_z = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(z) (1 - |z_n|^2)^{1/2} K_{z_n},$$

отсюда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|^2)^{1/2} f(z_n) \overline{\xi_n(z)}$$

— формула восстановления в виде ряда, дающая при фиксированном z вычислительные преимущества по сравнению с аппроксимационной формулой восстановления Тотика (см. замечание 2).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лукашенко Т.П. *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам*, Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. **1**, 6–10 (2001).
- [2] Галатенко В.В., Лукашенко Т.П., Садовничий В.А. *О свойствах орторекурсивных разложений по подпространствам*, Тр. МИАН **284**, 138–141 (2014).
- [3] Temlyakov V.N. *Greedy approximation*, Acta Numer. **17**, 235–409 (2008).
- [4] Duffin R.J., Schaeffer A.C. *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 341–366 (1952).
- [5] Feichtinger H.G., Gröchenig K. *Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decomposition*. I, J. Funct. Anal. **86**, 307–340 (1989).
- [6] Feichtinger H.G., Gröchenig K. *Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decomposition*. II, Monatsh. Math. **108**, 129–148 (1989).
- [7] Gröchenig K. *Describing functions: atomic decompositions versus frames*, Monatsh. Math. **112** (1), 1–41 (1991).
- [8] Casazza P.G., Han D., Larson D.R. *Frames for Banach spaces*, Contemp. Math. **247**, 149–182 (1999).
- [9] Casazza P.G., Christensen O., Stoeva D. *Frame expansion in separable Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **307** (2), 710–723 (2005).
- [10] Duren P., Schuster A. *Bergman spaces* (AMS, Providence, RI, 2004).
- [11] Бари Н.К. *Биортогональные системы и базисы гильбертова пространства*, Матем. IV, Учен. зап. МГУ **148**, 69–107 (1951).
- [12] Christensen O. *An introduction to frames and Riesz bases* (2nd rev. ed., Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser/Springer, New York, 2016).
- [13] Partington J.R. *Interpolation, identification, and sampling* (Clarendon Press, Oxford, 1997).
- [14] Zhang H., Zhang J. *Frames, Riesz bases, and sampling expansions in Banach spaces via semi-inner products*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **31**, 1–25 (2011).
- [15] Song M.-S., Jorgensen P.E.T. *Reproducing kernel Hilbert space vs. frame estimates*, Math. **3**, 615–625 (2015).
- [16] Führ H., Gröchenig K., Haimi A., Klotz A., Romero J.L. *Density of sampling and interpolation in reproducing kernel Hilbert spaces*, J. London Math. Soc. **96** (2), (2017).
- [17] Gao J., Harris C., Gunn S. *On a class of a support vector kernels based on frames in function Hilbert spaces*, Neural Comput. **13** (9), 1975–1994 (2001).
- [18] Rakotomamonjy A., Canu S. *Frames, reproducing kernels, regularization and learning*, Journal of Machine Learning Research **6**, 1485–1515 (2005).
- [19] Халмош П. *Гильбертово пространство в задачах* (Мир, М., 1970).

- [20] Marcus A.W., Spielman D.A., Srivastava N. *Interlacing families II: mixed characteristic polynomials and the Kadison–Singer problem*, Ann. Math. **182** (1), 327–350 (2015).
- [21] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве* (Наука, М., 1966).
- [22] Totik V. *Recovery of H^p -functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (4), 531–537 (1984).
- [23] Терехин П.А. *Системы представления и проекции базисов*, Матем. заметки **75** (6), 944–947 (2004).
- [24] Терехин П.А. *Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза*, Матем. сб. **200** (9), 127–146 (2009).
- [25] Терехин П.А. *Фреймы в банаховом пространстве*, Функци. анализ и его прилож. **44** (3), 50–62 (2010).
- [26] Schaefer H.H., Wolff M.P. *Topological vector spaces* (2nd ed., Grad. Text in Math., Springer-Verlag, New York, 1999).

Константин Сергеевич Сперанский

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,
e-mail: konstantin.speransky@yahoo.com

Павел Александрович Терехин

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,
e-mail: terekhinpa@mail.ru

K.S. Speransky and P.A. Terekhin

On existence of frames based on the Szegő kernel in the Hardy space

Abstract. It is well-known that a sequence of functions constructed by sampling of the Szegő kernel cannot be the Duffin–Schaeffer frame for the Hardy space on the unit disk. In this paper we show that by using the more general concept of a frame the problem of existence of a frame based on the Szegő kernel has a solution.

Keywords: Duffin–Schaeffer frames, Banach frames, framing model, reproducing kernel Hilbert space, Hardy space, Szegő kernel.

Konstantin Sergeevich Speransky

Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia,
e-mail: konstantin.speransky@yahoo.com

Pavel Aleksandrovich Terekhin

Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia,
e-mail: terekhinpa@mail.ru