Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Уринов, К. Т. Каримов, Об однозначной разрешимости краевых задач для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 2, 69–81

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-69-81>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 07:24:20

А.К. УРИНОВ, К.Т. КАРИМОВ

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. Поставлен и исследован ряд краевых задач для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в прямоугольном параллелепипеде. Методом интегралов энергии доказана единственность решения поставленных задач. Для доказательства существования решений использован спектральный метод Фурье, основанный на разделении переменных. Решение поставленных задач построено в виде суммы двойного ряда Фурье – Бесселя. При обосновании равномерной сходимости построенного ряда использованы асимптотические оценки функций Бесселя действительного и мнимого аргумента. На их основе получены оценки для каждого члена ряда, которые позволили доказать сходимость ряда и его производных до второго порядка включительно, а также теорему существования в классе регулярных решений.

Ключевые слова: задача Келдыша, уравнение эллиптического типа, сингулярный коэффициент, спектральный метод, единственность решения, существование решения.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-2-69-81

ВВЕДЕНИЕ

Теория уравнений с сингулярными коэффициентами является одним из быстро развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений в частных производных, которые имеют много применений в аэродинамике, газовой динамике [1] и проблемах ирригации [2]. Исследования стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия, фильтрация и т.д.) обычно приводят к уравнениям эллиптического типа. Детальная библиография и описание основных краевых задач для вырождающихся уравнений различных типов, в частности, для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами имеется в монографиях А.В. Бицадзе [3], Р. Гильберта [4], М.М. Смирнова [5] и М.С. Салахитдинова [6], [7].

Среди работ по изучению локальных и нелокальных задач для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами отметим некоторые труды, близкие по тематике к данной работе. В [8]–[10] исследована задача N и задача T для уравнений эллиптического типа с одним сингулярным коэффициентом в полушаре. Для эллиптических уравнений с двумя и тремя сингулярными коэффициентами в областях, состоящих из частей шара, задачи Дирихле и Дирихле–Неймана исследованы в [11]–[14]. Во всех работах, перечисленных выше, задачи решены методом функции Грина. В [15] и [16] для эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами в четверти цилиндра соответственно исследованы задачи Дирихле и Дирихле–Неймана методом спектрального анализа. В области $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$, где $a, b, c \in R$, для уравнения

эллиптического типа с тремя сингулярными коэффициентами

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0, \quad u = u(x, y, z), \quad (1)$$

исследованы задачи Дирихле [17] и Дирихле–Неймана [18] при $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1/2$ и $-1/2 < \alpha, \beta, \gamma < 1/2$ соответственно. Можно убедиться в том, что задача Дирихле будет однозначно разрешима и в том случае, когда параметры уравнения удовлетворяют условию $-\infty < \alpha, \beta, \gamma < 1/2$. В последние годы появились работы, посвященные изучению задачи Дирихле для трехмерного уравнения с одной плоскостью вырождения в бесконечных призматических и цилиндрических областях [19].

Известно, что на плоскости для вырождающихся уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами эллиптического типа задача Дирихле не всегда будет корректно поставленной. В тех случаях, когда задача Дирихле поставлена некорректно, М.В. Келдышем [20] предложено изучать так называемую “задачу Е”. В этой задаче на части границы области, совпадающей с линией вырождения (или сингулярности) требуется ограниченность решения уравнения, а в остальной части границы задаются условия Дирихле. Такие задачи в настоящее время получили название “задачи Келдыша”. Изучению этих задач на плоскости посвящены, например, работы [24], [25]. Однако задача Келдыша для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, например, в прямоугольном параллелепипеде остается неизученной. Поэтому в данной работе поставлен и исследован ряд краевых задач типа задачи Е для уравнения (1) в области Ω .

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В зависимости от места нахождения параметров α, β, γ на числовой оси для уравнения (1) в области Ω можно сформулировать ряд задач типа задачи Келдыша.

Пусть α, β и γ удовлетворяют условию $1/2 \leq \alpha, \beta, \gamma < +\infty$. Тогда однозначно решается

Задача Келдыша (задача Е). Найти ограниченную в окрестности начала координат функцию $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega} \setminus (xyz = 0)) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$u(a, y, z) = \varphi_1(y, z), \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c; \quad (2)$$

$$u(x, b, z) = \varphi_2(x, z), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq c; \quad (3)$$

$$u(x, y, c) = \varphi_3(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (4)$$

где $\varphi_j, j = \overline{1, 3}$, — заданные непрерывные функции.

Если α, β и γ удовлетворяют условию $1/2 \leq \alpha < +\infty, -\infty < \beta, \gamma < 1/2$, то однозначно решается

Задача DE. Найти функцию $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega} \setminus (x = 0)) \cap C^2(\Omega)$, ограниченную при $x \rightarrow 0$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям (2) – (4),

$$u(x, 0, z) = \psi_2(x, z), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq c; \quad (5)$$

$$u(x, y, 0) = \psi_3(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (6)$$

где $\psi_j, j = \overline{2, 3}$, — заданные непрерывные функции.

Замечание 1. Можно сформулировать и исследовать задачу, аналогичную задаче DE, и в том случае, когда параметры α, β, γ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\{\beta \geq 1/2, \alpha, \gamma < 1/2\}, \quad \{\gamma \geq 1/2, \alpha, \beta < 1/2\},$$

$$\{\alpha, \beta \geq 1/2, \gamma < 1/2\}, \quad \{\alpha, \gamma \geq 1/2, \beta < 1/2\},$$

$$\{\beta, \gamma \geq 1/2, \alpha < 1/2\}.$$

Пусть теперь α , β и γ удовлетворяют условию $1/2 \leq \alpha < +\infty$, $-1/2 < \beta, \gamma < 1/2$. Тогда однозначно решается

Задача НЕ. Найти функцию $u(x, y, z) \in C(\overline{\Omega} \setminus (x = 0)) \cap C^2(\Omega)$, ограниченную при $x \rightarrow 0$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям (2)–(4),

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y, z) = \nu_2(x, z), \quad 0 < x < a, \quad 0 < z < c; \quad (7)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma} u_z(x, y, z) = \nu_3(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (8)$$

где ν_j , $j = \overline{2, 3}$, — заданные непрерывные функции.

Замечание 2. Можно сформулировать и исследовать задачу, аналогичную задаче НЕ, и в том случае, когда параметры α , β и γ удовлетворяют одной из следующих групп условий:

$$\begin{aligned} &\{\beta \geq 1/2, -1/2 < \alpha, \gamma < 1/2\}, \quad \{\gamma \geq 1/2, -1/2 < \alpha, \beta < 1/2\}, \\ &\{\alpha, \beta \geq 1/2, -1/2 < \gamma < 1/2\}, \quad \{\alpha, \gamma \geq 1/2, -1/2 < \beta < 1/2\}, \\ &\{\beta, \gamma \geq 1/2, -1/2 < \alpha < 1/2\}. \end{aligned}$$

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Доказательство единственности решения поставленных задач опирается на две леммы.

Лемма 1. а) Если $1/2 \leq \beta < +\infty$, а функция $u(x, y, z) \in C(\overline{\Omega} \setminus (y = 0)) \cap C^2(\Omega)$ — ограниченное при $y \rightarrow 0$ решение уравнения (1), то $\lim_{y \rightarrow 0} [(\partial/\partial y)u(x, y, z)] = 0$;

б) если $1/2 \leq \gamma < +\infty$, а функция $u(x, y, z) \in C(\overline{\Omega} \setminus (z = 0)) \cap C^2(\Omega)$ — ограниченное при $z \rightarrow 0$ решение уравнения (1), то $\lim_{z \rightarrow 0} [(\partial/\partial z)u(x, y, z)] = 0$;

с) если $1/2 \leq \alpha < +\infty$, а функция $u(x, y, z) \in C(\overline{\Omega} \setminus (x = 0)) \cap C^2(\Omega)$ — ограниченное при $x \rightarrow 0$ решение уравнения (1), то $\lim_{x \rightarrow 0} [(\partial/\partial x)u(x, y, z)] = 0$.

Доказательство. Разделив переменные по формуле $u(x, y, z) = X(x)W(y, z)$, из уравнения (1) получим

$$X''(x) + \frac{2\alpha}{x}X'(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < a, \quad (9)$$

$$W_{yy} + W_{zz} + \frac{2\beta}{y}W_y + \frac{2\gamma}{z}W_z + \lambda W = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c, \quad (10)$$

где $\lambda \in R$ — константа разделения.

В результате разделения переменных $W(y, z) = Q(y)Z(z)$, уравнение (10) также распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$Q''(y) + \frac{2\beta}{y}Q'(y) + \mu Q(y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad (11)$$

$$Z''(z) + \frac{2\gamma}{z}Z'(z) + (\lambda - \mu)Z(z) = 0, \quad 0 < z < c, \quad (12)$$

где $\mu \in R$ — константа разделения.

В силу условия леммы $u(x, y, z) = X(x)Q(y)Z(z)$ — ограниченная в $\overline{\Omega}$ функция. Тогда из процесса получения уравнений (9), (11), (12) следует, что для доказательства леммы достаточно показать, что если $X(x)$, $Q(y)$, $Z(z)$ — ограниченные в нуле решения соответственно уравнений (9), (11), (12), то справедливы равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0} X'(x) = 0, \quad (13)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} Q'(y) = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} Z'(z) = 0. \quad (15)$$

Покажем это. Сначала рассмотрим уравнение (11) и найдем его общее решение. Пусть $\mu > 0$. Тогда произведя замену $Q(y) = (t/\sqrt{\mu})^{1/2-\beta} p(t)$, где $t = \sqrt{\mu}y$, из (11) получим уравнение Бесселя ([23], с. 49)

$$t^2 p''(t) + tp'(t) + [t^2 - (\beta - 1/2)^2]p(t) = 0. \quad (16)$$

Принимая во внимание вид общего решения ([23], с. 90) уравнения (16) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (11) в виде

$$Q(y) = d_1 y^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\mu}y) + d_2 y^{1/2-\beta} Y_{\beta-1/2}(\sqrt{\mu}y), \quad (17)$$

здесь d_1 и d_2 — произвольные постоянные, $J_l(y)$ и $Y_l(y)$ — функция Бесселя порядка l первого и второго рода ([23], сс.51,78) соответственно. В силу $\beta \geq 1/2$ из (17) следует, что ограниченное при $y \rightarrow 0$ решение уравнения (11) определяется равенством

$$Q(y) = d_1 y^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\mu}y). \quad (18)$$

По формуле ([23], с. 56)

$$\frac{d}{dx} [x^{\pm\nu} J_{\nu}(x)] = \pm x^{\pm\nu} J_{\nu \mp 1}(x) \quad (19)$$

для функции (18) имеем $Q'(y) = -d_1 \sqrt{\mu} y^{1/2-\beta} J_{\beta+1/2}(\sqrt{\mu}y)$. Отсюда $\lim_{y \rightarrow 0} Q'(y) = 0$.

Пусть $\mu = 0$. Тогда общее решение уравнения (11) имеет вид $Q(y) = d_3 y^{1-2\beta} + d_4$ при $\beta > 1/2$ и $Q(y) = d_3 \ln y + d_4$ при $\beta = 1/2$, где d_3 и d_4 — произвольные постоянные. Из этих формул легко следует, что ограниченное при $y \rightarrow 0$ решение уравнения имеет вид

$$Q(y) = d_4, \quad (20)$$

откуда $Q'(y) = 0$.

Предположим $\mu < 0$. Тогда в уравнении (11) произведем замену $Q(y) = (t/\sqrt{-\mu})^{1/2-\beta} p(t)$, где $t = \sqrt{-\mu}y$. В результате получим уравнение Бесселя ([23], с. 91)

$$t^2 p''(t) + tp'(t) - [t^2 + (\beta - 1/2)^2]p(t) = 0.$$

Принимая во внимание вид общего решения ([23], с. 92) этого уравнения и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (11) в виде

$$Q(y) = d_5 y^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{-\mu}y) + d_6 y^{1/2-\beta} K_{\beta-1/2}(\sqrt{-\mu}y),$$

здесь d_5, d_6 — произвольные постоянные, $I_l(y)$ и $K_l(y)$ — модифицированные функции Бесселя порядка l первого и третьего родов ([23], с. 91–92) соответственно. В силу $\beta \geq 1/2$ из последнего вытекает, что ограниченное при $y \rightarrow 0$ решение уравнения (11) определяется равенством

$$Q(y) = d_5 y^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{-\mu}y). \quad (21)$$

Так как $Q'(y) = d_5 \sqrt{-\mu} y^{1/2-\beta} I_{\beta+1/2}(\sqrt{-\mu}y)$, то $\lim_{y \rightarrow 0} Q'(y) = 0$. Часть а) леммы 1 доказана.

Части б) и с) леммы 1 доказываются аналогично. По ходу доказательства этих частей леммы 1 устанавливается, что ограниченные при $z \rightarrow 0$ решения уравнения (12) имеют вид

$$Z(z) = d_7 z^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda-\mu}z) \text{ при } \lambda > \mu, \quad (22)$$

$$Z(z) = d_8 \text{ при } \lambda = \mu,$$

$$Z(z) = d_9 z^{1/2-\gamma} I_{\gamma-1/2}(\sqrt{\mu-\lambda}z) \text{ при } \lambda < \mu,$$

а ограниченные при $x \rightarrow 0$ решения уравнения (9) имеют вид

$$X(x) = d_{10}x^{1/2-\alpha}I_{\alpha-1/2}(\sqrt{\lambda}x) \text{ при } \lambda > 0, \quad (23)$$

$$X(x) = d_{11} \text{ при } \lambda = 0,$$

$$X(x) = d_{12}x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sqrt{-\lambda}x) \text{ при } \lambda < 0,$$

где $d_j, j = \overline{7, 12}$, — произвольные постоянные. $\square$

Лемма 2. а) Если $-\infty < \alpha < 1/2$, а функция $u(x, y, z) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(0, y, z) = 0$, то $|\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} u_x(x, y, z)| < +\infty$;

б) если $-\infty < \beta < 1/2$, а функция $u(x, y, z) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(x, 0, z) = 0$, то $|\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y, z)| < +\infty$;

с) если $-\infty < \gamma < 1/2$, а функция $u(x, y, z) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(x, y, 0) = 0$, то $|\lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma} u_z(x, y, z)| < +\infty$.

Доказательство. Разделив переменные по формуле $u(x, y, z) = X(x)Q(y)Z(z)$, как и в лемме 1, из уравнения (1) и условий леммы 2 получим обыкновенные дифференциальные уравнения (9), (11), (12) и условия для них $X(0) = 0, Q(0) = 0, Z(0) = 0$. Пользуясь общими решениями этих уравнений при $-\infty < \alpha, \beta, \gamma < 1/2$, нетрудно убедиться, что решения уравнений (9), (11) и (12), удовлетворяющие соответственно условиям $X(0) = 0, Q(0) = 0$ и $Z(0) = 0$, имеют вид

$$X(x) = \begin{cases} d_{13}x^{1/2-\alpha}I_{1/2-\alpha}(\sqrt{\lambda}x) & \text{при } \lambda > 0, \\ d_{14}x^{1/2-\alpha} & \text{при } \lambda = 0, \\ d_{15}x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\sqrt{-\lambda}x) & \text{при } \lambda < 0, \end{cases}$$

$$Q(y) = \begin{cases} d_{16}y^{1/2-\beta}J_{1/2-\beta}(\sqrt{\mu}y) & \text{при } \mu > 0, \\ d_{17}y^{1/2-\beta} & \text{при } \mu = 0, \\ d_{18}y^{1/2-\beta}I_{1/2-\beta}(\sqrt{-\mu}y) & \text{при } \mu < 0, \end{cases}$$

$$Z(z) = \begin{cases} d_{19}z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda-\mu}y) & \text{при } \lambda > \mu, \\ d_{20}z^{1/2-\gamma} & \text{при } \lambda = \mu, \\ d_{21}z^{1/2-\gamma}I_{1/2-\gamma}(\sqrt{\mu-\lambda}y) & \text{при } \lambda < \mu, \end{cases}$$

где $d_j, j = \overline{13, 21}$, — произвольные постоянные. Из этих формул легко следует $|\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} X'(x)| < +\infty, |\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} Q'(y)| < +\infty, |\lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma} Z'(z)| < +\infty$. Если учесть эти неравенства и непрерывность функций $X(x), Q(y)$ и $Z(z)$ в своих областях определения, то из $u(x, y, z) = X(x)Q(y)Z(z)$ легко получаем

$$|\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} u_x(x, y, z)| < +\infty, |\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y, z)| < +\infty \text{ и } |\lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma} u_z(x, y, z)| < +\infty. \quad \square$$

Отметим, что свойство решения, изложенное в лемме 1, для одного уравнения смешанного типа с одним сингулярным коэффициентом установлено в работах [24]–[26].

Теорема 1. Задачи E, DE и NE не имеют более одного решения.

Доказательство. Пусть $V_1(x, y, z)$ и $V_2(x, y, z)$ — решения одной из поставленных выше задач. Тогда $u(x, y, z) = V_1(x, y, z) - V_2(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям соответствующей задачи. Покажем, что $u(x, y, z) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

В области Ω справедливо тождество

$$x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uLu = (x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_x)_x + (x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_y)_y + \\ + (x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_z)_z - x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = 0.$$

Интегрируя это тождество по области

$$\Omega_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}^{\varepsilon_5\varepsilon_6} = \{(x, y, z) : \varepsilon_1 < x < a - \varepsilon_2, \varepsilon_3 < y < b - \varepsilon_4, \varepsilon_5 < z < c - \varepsilon_6\},$$

где $\varepsilon_i, i = \overline{1, 6}$, — достаточно малые положительные числа, имеем

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}^{\varepsilon_5\varepsilon_6}} [(x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_x)_x + (x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_y)_y + (x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}uu_z)_z] dx dy dz = \\ = \iiint_{\Omega_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}^{\varepsilon_5\varepsilon_6}} [x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)] dx dy dz. \end{aligned} \quad (24)$$

Очевидно, что если $\varepsilon_j, j = \overline{1, 6}$, стремится к нулю, то $\Omega_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}^{\varepsilon_5\varepsilon_6} \rightarrow \Omega$.

Применяя формулу Гаусса–Остроградского ([27], с. 333) к левой части равенства (24), получим

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_5}^{c-\varepsilon_6} \int_{\varepsilon_3}^{b-\varepsilon_4} y^{2\beta}z^{2\gamma}[(a-\varepsilon_2)^{2\alpha}u(a-\varepsilon_2, y, z)u_x(a-\varepsilon_2, y, z) - \varepsilon_1^{2\alpha}u(\varepsilon_1, y, z)u_x(\varepsilon_1, y, z)] dy dz + \\ + \int_{\varepsilon_5}^{c-\varepsilon_6} \int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_2} x^{2\alpha}z^{2\gamma}[(b-\varepsilon_4)^{2\beta}u(x, b-\varepsilon_4, z)u_y(x, b-\varepsilon_4, z) - \varepsilon_3^{2\beta}u(x, \varepsilon_3, z)u_y(x, \varepsilon_3, z)] dx dz + \\ + \int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_2} \int_{\varepsilon_3}^{b-\varepsilon_4} x^{2\alpha}y^{2\beta}[(c-\varepsilon_6)^{2\gamma}u(x, y, c-\varepsilon_6)u_z(x, y, c-\varepsilon_6) - \varepsilon_5^{2\gamma}u(x, y, \varepsilon_5)u_z(x, y, \varepsilon_5)] dx dy = \\ = \iiint_{\Omega_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}^{\varepsilon_5\varepsilon_6}} [x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)] dx dy dz. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_j \rightarrow 0, j = \overline{1, 6}$, и принимая во внимание утверждения лемм 1 и 2, соответствующие рассматриваемой задаче и однородным краевым условиям, из последнего равенства имеем

$$\iiint_{\Omega} [x^{2\alpha}y^{2\beta}z^{2\gamma}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)] dx dy dz = 0.$$

Следовательно, $u_x(x, y, z) \equiv u_y(x, y, z) \equiv u_z(x, y, z) \equiv 0, (x, y, z) \in \Omega$. Тогда $u(x, y, z) \equiv \text{const}, (x, y, z) \in \Omega$. Так как $u(x, y, z) \in C(\overline{\Omega})$ и $u(a, y, z) \equiv 0$, то $u(x, y, z) \equiv 0, (x, y, z) \in \overline{\Omega}$. $\square$

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Существование решения поставленных задач можно доказать методом разделения переменных. В качестве примера рассмотрим задачу Е, решение которой будем искать в виде

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z), \quad (25)$$

где $u_1(x, y, z)$, $u_2(x, y, z)$ и $u_3(x, y, z)$ — решения следующих краевых задач.

Задача Е₁. Найти функцию $u_1(x, y, z) \in C(\overline{\Omega} \setminus (xyz = 0)) \cap C^2(\Omega)$, ограниченную при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям (2)

$$u_1(x, b, z) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq c; \quad (26)$$

$$u_1(x, y, c) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (27)$$

Задача Е₂. Найти функцию $u_2(x, y, z) \in C(\bar{\Omega} \setminus (xyz = 0)) \cap C^2(\Omega)$, ограниченную при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям (3)

$$u_2(a, y, z) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c;$$

$$u_2(x, y, c) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Задача Е₃. Найти функцию $u_3(x, y, z) \in C(\bar{\Omega} \setminus (xyz = 0)) \cap C^2(\Omega)$, ограниченную при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям (4)

$$u_3(a, y, z) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c;$$

$$u_3(x, b, z) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq c.$$

Действительно, если функции $u_1(x, y, z)$, $u_2(x, y, z)$, $u_3(x, y, z)$ являются решениями задач Е₁, Е₂, Е₃ соответственно, то функция (25) удовлетворяет всем условиям задачи Е.

Рассмотрим задачу Е₁. Сначала находим нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие однородным краевым условиям (26) и (27). С этой целью, разделяя переменные по формуле $u(x, y, z) = X(x)Q(y)Z(z)$ в уравнении (1) и условиях (26), (27), относительно $X(x)$, $Q(y)$ и $Z(z)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения (9), (11), (12) и краевые условия

$$Q(b) = 0, \tag{28}$$

$$Z(c) = 0. \tag{29}$$

Как доказано в лемме 1, решение $Q(y)$ уравнения (11), непрерывное в $(0, b]$ и ограниченное при $y \rightarrow 0$, определяется одной из формул (18), (20), (21). Подставляя эти формулы в (28), имеем

$$d_1 b^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\mu}b) = 0 \quad \text{при } \mu > 0; \quad d_4 = 0 \quad \text{при } \mu = 0; \tag{30}$$

$$d_5 b^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{-\mu}b) = 0 \quad \text{при } \mu < 0. \tag{31}$$

Очевидно, равенство (31) выполняется только при $d_4 = d_5 = 0$. Если учесть это, то из (20) и (21) следует, что при $\mu \leq 0$ задача $\{(11), (14), (28)\}$ имеет только тривиальное решение, а из равенства (30) следует, что при $\mu > 0$ нетривиальные решения этой задачи существуют, если

$$J_{\beta-1/2}(\sqrt{\mu}b) = 0. \tag{32}$$

Известно [23], что при $l > -1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками. Так как $\beta - 1/2 > -1$, то уравнение (32) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая n -й положительный корень уравнения (32) через σ_n , получим те значения параметра μ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (т.е. собственные значения задачи) $\{(11), (14), (28)\}$:

$$\mu_n = (\sigma_n/b)^2, \quad n \in N.$$

Полагая в (18) $\mu = \mu_n$, $d_1 = d_{1n}$, $n \in N$, получим нетривиальное решение (собственную функцию) задачи $\{(11), (14), (28)\}$

$$Q_n(y) = d_{1n} y^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}\left(\frac{\sigma_n}{b}y\right), \quad n \in N. \tag{33}$$

Аналогично можно доказать, что нетривиальные решения задачи $\{(12), (15), (29)\}$ существуют только при $\lambda - \mu > 0$. Поэтому используем формулу (22). Подставляя ее в условие (29), получим

$$J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda - \mu}c) = 0. \tag{34}$$

Обозначая m -й положительный корень уравнения (34) через δ_m , получим те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи $\{(12), (15), (29)\}$

$$\lambda_{nm} = (\sigma_n/b)^2 + (\delta_m/c)^2, \quad n, m \in N.$$

Полагая в (22) $\lambda = \lambda_{nm}$, $d_7 = d_{7m}$, $n, m \in N$, получим нетривиальное решение (собственную функцию) задачи $\{(12), (15), (29)\}$ в виде

$$Z_m(z) = d_{7m} z^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\delta_m z/c), \quad m \in N. \quad (35)$$

Так как $\lambda_{nm} > 0$, то в качестве $X(x)$ получим функцию (23). Полагая в (23) $\lambda = \lambda_{nm}$, $d_{10} = d_{10nm}$, $n, m \in N$, и подставляя ее и (33), (35) в равенство $u_1(x, y, z) = X(x)Q(y)Z(z)$, получим нетривиальные в области Ω решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (26) и (27):

$$u_{1nm}(x, y, z) = C_{nm} x^{1/2-\alpha} y^{1/2-\beta} z^{1/2-\gamma} \times \\ \times J_{\beta-1/2}[(\sigma_n y/b)] J_{\gamma-1/2}[(\delta_m z)/c] I_{\alpha-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm} x}),$$

где $C_{nm} = d_{1n} d_{10nm} d_{7m}$ — произвольные постоянные.

Теперь решение задачи E_1 в области Ω будем искать в виде суммы ряда

$$u_1(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm}(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} x^{1/2-\alpha} y^{1/2-\beta} z^{1/2-\gamma} \times \\ \times J_{\beta-1/2}[(\sigma_n y)/b] J_{\gamma-1/2}[(\delta_m z)/c] I_{\alpha-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm} x}). \quad (36)$$

Предполагая, что двойной ряд в (36) сходится равномерно в $\bar{\Omega}$, и удовлетворяя его сумму краевому условию (2), получаем

$$\varphi_1(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} a^{1/2-\alpha} y^{1/2-\beta} z^{1/2-\gamma} J_{\beta-1/2}[(\sigma_n y)/b] J_{\gamma-1/2}[(\delta_m z)/c] I_{\alpha-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm} a}). \quad (37)$$

Формулу (37) перепишем в виде

$$a^{\alpha-1/2} y^{\beta-1/2} z^{\gamma-1/2} \varphi_1(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_{\beta-1/2}[(\sigma_n y)/b] f_n(z), \quad (38)$$

где

$$f_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} I_{\alpha-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm} a}) J_{\gamma-1/2}[(\delta_m z)/c]. \quad (39)$$

Ряды (38) и (39) представляют собой ряды Фурье–Бесселя ([23], с. 633) соответственно функции $a^{\alpha-1/2} y^{\beta-1/2} z^{\gamma-1/2} \varphi_1(y, z)$ и $f_n(z)$. Из (38) и (39) следует

$$f_n(z) = \frac{2a^{\alpha-1/2}}{b^2 J_{1/2+\beta}^2(\sigma_n)} \int_0^b t^{1/2+\beta} z^{\gamma-1/2} \varphi_1(t, z) J_{\beta-1/2}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right) dt, \\ C_{nm} = \frac{B_{nm}}{(bc)^2} \int_0^c \int_0^b t^{1/2+\beta} s^{1/2+\gamma} J_{\beta-1/2}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right) J_{\gamma-1/2}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right) \varphi_1(t, s) dt ds, \quad (40) \\ B_{nm} = \frac{4a^{\alpha-1/2}}{[J_{1/2+\beta}(\sigma_n) J_{1/2+\gamma}(\delta_m) I_{\alpha-1/2}]^2(\sqrt{\lambda_{nm} a})}.$$

На основании формул (19)

$$C_{nm} = \frac{B_{nm}}{\sigma_n \delta_m bc} \int_0^c \int_0^b \varphi_1(t, s) \frac{d}{dt} \left[t^{1/2+\beta} J_{1/2+\beta}\left(\frac{\sigma_n t}{b}\right) \right] \frac{d}{ds} \left[s^{1/2+\gamma} J_{1/2+\gamma}\left(\frac{\delta_m s}{c}\right) \right] dt ds. \quad (41)$$

Применяя правило интегрирования по частям, из (41) получаем

$$C_{nm} = \frac{B_{nm}}{\sigma_n \delta_m b c} \left\{ \left(t^{1/2+\beta} s^{1/2+\gamma} J_{1/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) J_{1/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) \varphi_{1t}(t, s) \right) \Big|_{t=0}^{t=b} \Big|_{s=0}^{s=c} - \right. \\ \left. - \int_0^c \left[t^{1/2+\beta} J_{1/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) \varphi_{1s}(t, s) \right]_{t=0}^{t=b} s^{1/2+\gamma} J_{1/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) ds - \right. \\ \left. - \int_0^b \left[s^{1/2+\gamma} J_{1/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) \varphi_{1t}(t, s) \right]_{s=0}^{s=c} t^{1/2+\beta} J_{1/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) dt + \right. \\ \left. + \int_0^c \int_0^b t^{1/2+\beta} s^{1/2+\gamma} J_{1/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) J_{1/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) \varphi_{1ts}(t, s) dt ds \right\}. \quad (42)$$

В силу условия задачи E_1 справедливо равенство

$$\varphi_1(b, z) = \varphi_1(y, c) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c. \quad (43)$$

Тогда формула (42) упрощается и принимает вид

$$C_{nm} = \frac{B_{nm}}{\sigma_n \delta_m b c} \int_0^c \int_0^b t^{1/2+\beta} s^{1/2+\gamma} J_{1/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) J_{1/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) \varphi_{1ts}(t, s) dt ds.$$

Из последнего, интегрируя по частям, имеем

$$C_{nm} = \frac{B_{nm}}{(\sigma_n \delta_m)^2} \left\{ \left(t^{1/2+\beta} s^{1/2+\gamma} J_{3/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) J_{3/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) \varphi_{1ts}(t, s) \right) \Big|_{t=0}^{t=b} \Big|_{s=0}^{s=c} - \right. \\ \left. - \int_0^c \left[t^{1/2+\beta} J_{3/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) \frac{\partial}{\partial s} [s^{-1} \varphi_{1st}(t, s)] \right]_{t=0}^{t=b} s^{3/2+\gamma} J_{3/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) ds - \right. \\ \left. - \int_0^b \left[s^{1/2+\gamma} J_{3/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) \frac{\partial}{\partial t} [t^{-1} \varphi_{1ts}(t, s)] \right]_{s=0}^{s=c} t^{3/2+\beta} J_{3/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) dt + \right. \\ \left. + \int_0^c \int_0^b t^{3/2+\beta} s^{3/2+\gamma} J_{3/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) J_{3/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} [(ts)^{-1} \varphi_{1ts}(t, s)] dt ds \right\}.$$

Отсюда следует, что если функция $\varphi_1(y, z)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi_{1yz}(y, z) \in C([0, b] \times [0, c]), \quad \varphi_{1yz}(b, z) = \varphi_{1yz}(y, c) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c, \quad (44)$$

то

$$C_{nm} = \frac{B_{nm}}{(\sigma_n \delta_m)^2} \int_0^c \int_0^b t^{3/2+\beta} s^{3/2+\gamma} J_{3/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) J_{3/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} [(ts)^{-1} \varphi_{1ts}(t, s)] dt ds.$$

Снова интегрируя по частям, из последнего получим

$$C_{nm} = \frac{B_{nm} b c}{(\sigma_n \delta_m)^3} \times \\ \times \left\{ \left(t^{3/2+\beta} s^{3/2+\gamma} J_{5/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) J_{5/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} [(ts)^{-1} \varphi_{1ts}(t, s)] \right) \Big|_{t=0}^{t=b} \Big|_{s=0}^{s=c} - \right. \\ \left. - \int_0^c \left[t^{3/2+\beta} J_{5/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) \frac{\partial}{\partial s} \left\{ s^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} [(ts)^{-1} \varphi_{1ts}(t, s)] \right\} \right]_{t=0}^{t=b} s^{5/2+\gamma} J_{5/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) ds - \right. \\ \left. - \int_0^b \left[s^{3/2+\gamma} J_{5/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} [(ts)^{-1} \varphi_{1ts}(t, s)] \right\} \right]_{s=0}^{s=c} t^{5/2+\beta} J_{5/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) dt + \right.$$

$$+ \int_0^c \int_0^b t^{5/2+\beta} s^{5/2+\gamma} J_{5/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n t}{b} \right) J_{5/2+\gamma} \left(\frac{\delta_m s}{c} \right) \times \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \left\{ (ts)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} [(ts)^{-1} \varphi_{2ts}(t, s)] \right\} dt ds \Big\}.$$

Если здесь потребовать выполнения условий

$$\tilde{\varphi}_1(y, z) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} [(yz)^{-1} \varphi_{1yz}(y, z)] \in C([0, b] \times [0, c]), \tilde{\varphi}_1(b, z) = \tilde{\varphi}_1(y, c) = 0, \quad (45)$$

то

$$C_{nm} = \frac{B_{nm}bc}{(\sigma_n \delta_m)^3} \int_0^c \int_0^b t^{5/2+\beta} s^{5/2+\gamma} J_{5/2+\beta}(\sigma_n t/b) J_{5/2+\gamma}(\delta_m s/c) \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} [(ts)^{-1} \tilde{\varphi}_1(t, s)] dt ds = \tilde{C}_{nm}/(\sigma_n \delta_m)^3. \quad (46)$$

Подставляя значения C_{nm} в (36), получаем

$$u_1(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x^{1/2-\alpha} y^{1/2-\beta} z^{1/2-\gamma} \times \\ \times J_{\beta-1/2}[(\sigma_n y)/b] J_{\gamma-1/2}[(\delta_m z)/c] I_{\alpha-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}}x) \tilde{C}_{nm}/(\sigma_n \delta_m)^3. \quad (47)$$

Покажем, что функция (47) является решением задачи E_1 . Для этого сначала докажем равномерную сходимость ряда (47) в $\bar{\Omega}$.

Известно ([28], с. 172–173), что для цилиндрических функций при $\xi \rightarrow \infty$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$J_\nu(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \left[\cos \left(\xi - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O(\xi^{-1}) \right], \quad I_\nu(\xi) = \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} [1 + O(\xi^{-1})]. \quad (48)$$

В этих формулах $O(\xi^{-1})$ ([29], с. 15) означает такую величину, отношение которой к ξ^{-1} при беспредельном возрастании ξ остается меньше некоторой постоянной.

Из (48) получим

$$J_\nu(\xi) = O(\xi^{-1/2}), \quad I_\nu(\xi) = O(\xi^{-1/2})e^\xi. \quad (49)$$

Также известно ([23], с. 653), что если $f(t) \in C[l_0, l_1]$, где $0 \leq l_0 < l_1 < \infty$, то при $\xi \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$\int_{l_0}^{l_1} f(t) t J_\nu(\xi t) dt = O(\xi^{-3/2}), \quad (50)$$

где ν в формулах (48) – (50) является произвольным индексом.

С помощью асимптотических формул (49), (50) нетрудно показать, что при $n \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$\tilde{C}_{nm} = O((\lambda_{nm})^{1/4} (\sigma_n \delta_m)^{-1/2}) e^{-\sqrt{\lambda_{nm}}a}. \quad (51)$$

На основании асимптотических формул (49), (51) вытекает, что если $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, то при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ имеют место оценки

$$|x^{1/2-\alpha} y^{1/2-\beta} z^{1/2-\gamma} J_{\beta-1/2}[(\sigma_n y)/b] J_{\gamma-1/2}[(\delta_m z)/c] I_{\alpha-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}}x) \times \\ \times \tilde{C}_{nm}/(\sigma_n^3 \delta_m^3)| \leq \frac{A_1 e^{\sqrt{\lambda_{nm}}(x-a)}}{(\sigma_n \delta_m)^4} \leq \frac{A_1}{(\sigma_n \delta_m)^4},$$

где A_1 — некоторая положительная постоянная.

Тогда в силу признака Вейерштрасса ([30], с. 427) ряд (47) сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$ и, следовательно, $u_1(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$.

Теперь докажем, что $u_{1yy}(x, y, z) \in C(\Omega)$. Дважды почленно продифференцировав ряд (47) по аргументу y , имеем

$$u_{1yy} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\sigma_n}{b} \right)^2 y^{1/2-\beta} J_{3/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n y}{b} \right) - \frac{\sigma_n}{b} y^{-1/2-\beta} J_{1/2+\beta} \left(\frac{\sigma_n y}{b} \right) \right] \times \\ \times z^{1/2-\gamma} x^{1/2-\beta} J_{\gamma-1/2}[(\delta_m z)/c] I_{\alpha-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} x) \tilde{C}_{nm} / (\sigma_n^3 \delta_m^3). \quad (52)$$

Применяя асимптотические формулы (49) и (51), для достаточно больших n и m при $(x, y, z) \in \Omega$ получим оценки

$$\left| \left[\left(\frac{\sigma_n}{b} \right)^2 y^{1/2-\beta} J_{(3/2)+\beta} \left(\frac{\sigma_n y}{b} \right) - \frac{\sigma_n}{b} y^{-1/2-\beta} J_{(1/2)+\beta} \left(\frac{\sigma_n y}{b} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times z^{1/2-\gamma} x^{1/2-\beta} J_{\gamma-1/2}[(\delta_m z)/c] I_{\alpha-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} x) \tilde{C}_{nm} / (\sigma_n^3 \delta_m^3) \right| \leq \\ \leq \frac{A_2 e^{\sqrt{\lambda_{nm}}(x-a)}}{\sigma_n^2 \delta_m^4} \leq \frac{A_2}{\sigma_n^2 \delta_m^4},$$

где A_2 — некоторая положительная постоянная.

На основании этой оценки заключаем, что ряд (52) мажорируется сходящимся числовым рядом, откуда следует, что ряд (52) абсолютно и равномерно сходится в Ω . Следовательно, $u_{1yy}(x, y, z) \in C(\Omega)$.

Аналогично доказывается, что $u_{1zz}(x, y, z) \in C(\Omega)$.

Теперь покажем, что $u_{1xx}(x, y, z) \in C(\Omega)$. С этой целью, дифференцируя два раза ряд (47) по аргументу x , получим

$$u_{1xx}(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} y^{1/2-\beta} z^{1/2-\gamma} J_{\beta-1/2}[(\sigma_n y)/b] J_{\gamma-1/2}[(\delta_m z)/c] \times \\ \times \left[\sqrt{\lambda_{nm}} x^{-1/2-\alpha} I_{1/2+\alpha}(\sqrt{\lambda_{nm}} x) + \lambda_{nm} x^{1/2-\alpha} I_{3/2+\alpha}(\sqrt{\lambda_{nm}} x) \right] \tilde{C}_{nm} / (\sigma_n \delta_m)^3. \quad (53)$$

Применяя асимптотические формулы (49), (51) при $(x, y, z) \in \Omega$, для достаточно больших n и m имеем оценки

$$|y^{1/2-\beta} z^{1/2-\gamma} J_{\beta-1/2}[(\sigma_n y)/b] J_{\gamma-1/2}[(\delta_m z)/c] \times \\ \times [\sqrt{\lambda_{nm}} x^{-1/2-\alpha} I_{1/2+\alpha}(\sqrt{\lambda_{nm}} x) + \lambda_{nm} x^{1/2-\alpha} I_{3/2+\alpha}(\sqrt{\lambda_{nm}} x)] \times \\ \times \tilde{C}_{nm} / (\sigma_n \delta_m)^3| \leq \frac{A_3 \lambda_{nm} e^{\sqrt{\lambda_{nm}}(x-a)}}{(\sigma_n \delta_m)^4} \leq \frac{A_3 \lambda_{nm}}{(\sigma_n \delta_m)^4},$$

где A_3 — некоторая положительная постоянная.

На основании этой оценки можно заключить, что ряд (53) мажорируется сходящимся числовым рядом, откуда вытекает, что ряд (53) абсолютно и равномерно сходится в Ω . Следовательно, $u_{1xx}(x, y, z) \in C(\Omega)$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть выполнены условия (43)–(45). Тогда решение задачи E_1 существует, единственно и определяется равенством (36), где коэффициенты C_{nm} имеют вид (40).

Существование решения задач E_2 и E_3 доказывается аналогично. После того, как найдены решения $u_1(x, y, z)$, $u_2(x, y, z)$ и $u_3(x, y, z)$ задач E_1 , E_2 и E_3 , подставляя их в (25), найдем решение задачи Е. Этим завершается доказательство существования решения задачи Е.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bers L. *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics* (Wiley, New York, London, 1958).
- [2] Serbina L.I. *A problem for the linearized Boussinesq equation with a nonlocal Samarskii condition*, Diff. equat. **38** (8), 1187–1194 (2002).
- [3] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).
- [4] Gilbert R. *Function theoretic methods in partial differential equations* (Academic Press, New York, 1969).
- [5] Смирнов М.М. *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения* (Наука, М., 1966).
- [6] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами* (Univ., Ташкент, 2005).
- [7] Салахитдинов М.С., Уринов А.К. *К спектральной теории уравнений смешанного типа* (Mumtoz So'z, Ташкент, 2010).
- [8] Хийирбеков Т.Э. *Решение задачи N для одного n-мерного уравнения в нормальной области*, Куйбышев. Волжск. матем. сб., № 8, 221–226 (1971).
- [9] Хийирбеков Т.Э. *Решение задачи T_3^+ для одного трехмерного уравнения в произвольной области*, Куйбышев. Волжск. матем. сб., № 8, 215–220 (1971).
- [10] Назипов И.Т. *Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений*, Изв. вузов. Матем., № 3, 69–85 (2011).
- [11] Nieto J.J., Karimov E.T. *The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients*, Comput. and Math. Appl. **62**, 214–224 (2011).
- [12] Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. *Spatial boundary problem with the Dirichlet-Neumann condition for a singular elliptic equation*, Appl. Math. and Comput. **219**, 3469–3476 (2012).
- [13] Karimov E.T. *On a boundary problem with Neumann's condition for 3D singular elliptic equations*, Appl. Math. Lett. **23**, 517–522 (2010).
- [14] Nieto J.J., Karimov E.T. *On an analogue of the Holmgren's problem for 3rd singular elliptic equation*, Asian-European J. Math. **5** (2) (2012).
- [15] Каримов К.Т. *Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами*, Узбекск. матем. журн., № 1, 96–105 (2017).
- [16] Уринов А.К., Каримов К.Т. *Задача Дирихле–Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами*, Вестн. Нац. ун-та Узбекистана **2/1**, 195–206 (2017).
- [17] Уринов А.К., Каримов К.Т. *Задача Дирихле для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами*, VIII международн. конф. по матем. моделированию (Якутск, 2017), 59.
- [18] Каримов К.Т. *Краевая задача для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве*, Узбекск. матем. журн., № 4, 59–66 (2017).
- [19] Хачев М.М. *О некоторых модельных задачах в теории уравнений смешанного типа*, Научн. интернет журн. “Мир науки”, Вып. 4 (2014).
- [20] Келдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области*, ДАН СССР **77** (2), 181–183 (1951).
- [21] Сафина Р.М. *Задача Келдыша для уравнения Пулькина в прямоугольной области*, Вестн. Самарск. гос. ун-та, № 3, 53–64 (2015).
- [22] Сафина Р.М. *Задача Келдыша для уравнения смешанного типа второго рода с оператором Бесселя*, Дифференц. уравнения **51** (10), 1354–1366 (2015).
- [23] Ватсон Г.Н. *Теория бесселевых функций*. Т. 1 (Ин. лит., М., 1949).
- [24] Пулькин С.П. *О единственности решения сингулярной задачи Геллерстедта*, Изв. вузов. Математика, № 6, 214–225 (1960).
- [25] Вострова Л.Е., Пулькин С.П. *Сингулярная задача с нормальной производной*, Волжск. матем. сб. Вып. 5, 49–57 (1966).
- [26] Сабитов К.Б. *К теории уравнений смешанного типа* (Физматлит, М., 2014).
- [27] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 3 (Наука, М., 1969).
- [28] Кузнецов Д.С. *Специальные функции* (Высшая школа, М., 1962).
- [29] Олвер Ф. *Введение в асимптотические методы и специальные функции* (Мир, М., 1986).
- [30] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2 (Наука, М., 1969).

Ахмаджон Кушакович Уринов

*Ферганский государственный университет,
ул. Мураббийлар, д. 19, г. Фергана, 150100, Республика Узбекистан,
e-mail: urinovak@mail.ru*

Камолиддин Туйчибоевич Каримов

*Ферганский государственный университет,
ул. Мураббийлар, д. 19, г. Фергана, 150100, Республика Узбекистан,
e-mail: karimovk80@mail.ru*

A.K. Urinov and K.T. Karimov

On unique solvability of boundary-value problems for three-dimensional elliptic equation with three singular coefficients

Abstract. We consider and investigate a number of boundary-value problems for an elliptic equation with three singular coefficients in a rectangular parallelepiped. By the method of energy integrals, we prove the uniqueness of the solution to the stated problems. To prove the existence of solutions, we use the Fourier spectral method, based on the separation of variables. The solution to the posed problems is constructed as a sum of a double Fourier–Bessel series. In justification of the uniform convergence of the constructed series we use asymptotic estimates of the Bessel functions of the real and imaginary argument. On their basis, we obtain estimates for each term of the series. The obtained estimates made it possible to prove the convergence of the series and its derivatives up to the second order inclusive, and also the existence theorem in the class of regular solutions.

Keywords: Keldysh problem, equations of elliptic type, singular coefficient, spectral method, uniqueness of solution, existence of solution.

Akhmadjon Kushakovich Urinov

*Fergana State University,
19 Murabbiylar str., Fergana, 150100 Republic of Uzbekistan,
e-mail: urinovak@mail.ru*

Kamoliddin Tuchiboevich Karimov

*Fergana State University,
19 Murabbiylar str., Fergana, 150100 Republic of Uzbekistan,
e-mail: karimovk80@mail.ru*