Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Малюгина, В. В. Шурыгин, Псевдогруппа голономии многообразия над алгеброй дуальных чисел и некоторые ее применения, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 2, 82–88

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-82-88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:23:29

Краткое сообщение

А.А. МАЛЮГИНА, В.В. ШУРЫГИН

**ПСЕВДОГРУППА ГОЛОНОМИИ МНОГООБРАЗИЯ НАД АЛГЕБРОЙ
ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ**

Аннотация. Изучаются свойства псевдогруппы голономии на полной погруженной трансверсали канонического слоения на гладком многообразии над алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D}$. Псевдогруппы голономии применяются к исследованию $\mathbb{D}$ -диффеоморфизмов между фактор-многообразиями алгебры $\mathbb{D}$ по решеткам и между $\mathbb{D}$ -гладкими многообразиями, естественно ассоциированными с аффинным многообразием.

Ключевые слова: аффинное многообразие, многообразие над алгеброй дуальных чисел, слоение, слоеное расслоение, касательное расслоение, касательное многообразие, тор над алгеброй дуальных чисел, расслоение Вейля.

УДК: 514.76

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-2-82-88

1. Алгеброй дуальных чисел $\mathbb{D} = \mathbb{R}(\varepsilon)$ называется [1] двумерная алгебра над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ с базисом $\{1 = e_1, \varepsilon = e_2\}$, состоящим из единицы $1 = e_1$ и элемента ε , квадрат которого равен нулю. Произвольный элемент алгебры $\mathbb{D}$ имеет вид $X = a + b\varepsilon$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а произведение $X = a + b\varepsilon$ и $Y = c + d\varepsilon$ вычисляется по формуле $XY = ac + (ad + cb)\varepsilon$. Строки $\{X^1, X^2, \dots, X^n\}$ длины n , состоящие из элементов $X^i = x^i + \dot{x}^i\varepsilon$, $i = 1, \dots, n$, алгебры $\mathbb{D}$, образуют n -мерный модуль $\mathbb{D}^n$ над алгеброй $\mathbb{D}$. Представление модуля $\mathbb{D}^n$ в виде объединения вещественных n -мерных плоскостей с уравнениями $x^i = \dot{x}^i_0 = \text{const}$ определяет *каноническое слоение* $\mathcal{F}$ на $\mathbb{D}^n$. Отображение

$$F : U \ni \{X^i = x^i + \dot{x}^i\varepsilon\} \mapsto \{Y^k = y^k + \dot{y}^k\varepsilon\} \in \mathbb{D}^m \quad (1)$$

из открытого подмножества $U \subset \mathbb{D}^n$ в модуль $\mathbb{D}^m$ называется $\mathbb{D}$ -гладким, если его дифференциал dF в каждой точке из U является $\mathbb{D}$ -линейным отображением. В простой окрестности по отношению к слоению $\mathcal{F}$ $\mathbb{D}$ -гладкое отображение (1) имеет вид [1]

$$x'^k + \dot{x}'^k\varepsilon = f^k(x^i) + (\dot{x}^j \partial_j f^k + g^k(x^i))\varepsilon, \quad (2)$$

где символом $\partial_j f^k$ обозначена частная производная функции f^k по переменной x^j . На всем открытом множестве U отображение (1) может также быть представлено в виде (2), где функции f^k и g^k , определенные на множестве U , являются базовыми [2] по отношению к слоению $\mathcal{F}$, т. е. удовлетворяют условиям $\partial f^k / \partial \dot{x}^i = 0$, $\partial g^k / \partial \dot{x}^i = 0$. Обозначим символом $\Gamma(\mathbb{D}^n)$ псевдогруппу $\mathbb{D}$ -гладких диффеоморфизмов ($\mathbb{D}$ -диффеоморфизмов) между открытыми подмножествами $\mathbb{D}$ -модуля $\mathbb{D}^n$.

Поступила в редакцию 20.09.2018, после доработки 20.09.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Структура n -мерного $\mathbb{D}$ -гладкого многообразия на вещественном $2n$ -мерном многообразии M_{2n} задается $\Gamma(\mathbb{D}^n)$ -атласом, т. е. атласом

$$\{h_\alpha : U_\alpha \ni X \mapsto \{X_\alpha^i = x_\alpha^i + \dot{x}_\alpha^i \varepsilon\} \in U_\alpha^* \subset \mathbb{D}^n\}_{\alpha \in A},$$

функции перехода $h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ которого принадлежат псевдогруппе $\Gamma(\mathbb{D}^n)$, т. е. имеют вид

$$x_\beta^k + \dot{x}_\beta^k \varepsilon = f_{\beta\alpha}^k(x_\alpha^i, \dot{x}_\alpha^i) + \left(\dot{x}_\alpha^j \frac{\partial f_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^j} + g_{\beta\alpha}^k(x_\alpha^i, \dot{x}_\alpha^i) \right) \varepsilon, \quad (3)$$

где функции $f_{\beta\alpha}^k$ и $g_{\beta\alpha}^k$ являются базовыми по отношению к слоению $\mathcal{F}$. Для обозначения n -мерного $\mathbb{D}$ -гладкого многообразия будем использовать символ $M_n^\mathbb{D}$. Карты на $M_n^\mathbb{D}$, согласованные с его структурой $\mathbb{D}$ -гладкого многообразия, будем называть $\mathbb{D}$ -картами. Для $\mathbb{D}$ -гладкого многообразия используются также два названия: многообразие с интегрируемой почти касательной структурой [3] и касательное многообразие [4].

Открытое подмножество $U \subset M_n^\mathbb{D}$ называется *простым*, если ограничение $\mathcal{F}_U$ канонического слоения $\mathcal{F}$, индуцированного на $M_n^\mathbb{D}$, на множество U является слоением, порождаемым сублимерсией $p : U \rightarrow \bar{U}$ со связными слоями. Образ $s(\bar{U}) \subset U$ сечения $s : \bar{U} \rightarrow U$ сублимерсии p будем называть локальной трансверсалью. $\mathbb{D}$ -карта (U, h) на $M_n^\mathbb{D}$ называется *простой*, если ее область определения U является простым открытым подмножеством.

Из уравнений (3) следует, что на каждом слое слоения $\mathcal{F}$ индуцируется каноническая структура аффинного многообразия, т. е. многообразия с атласом, функции перехода которого являются аффинными преобразованиями [5], [6].

Аффинное многообразие M_n называется *полным* [5], если развертывающее отображение $D : \bar{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ универсального накрывающего пространства $\bar{M}_n$ многообразия M_n на аффинное пространство $\mathbb{R}^n$ является накрытием. $\mathbb{D}$ -гладкое многообразие $M_n^\mathbb{D}$ называется *полным*, если слои его канонического слоения $\mathcal{F}$ являются полными аффинными многообразиями. В дальнейшем предполагаем, что рассматриваемое многообразие $M_n^\mathbb{D}$ является полным.

2. С $\mathbb{D}$ -гладким многообразием $M_n^\mathbb{D}$ ассоциируется каноническое соприкасающееся расслоение $\pi^V : O^V M_n^\mathbb{D} \rightarrow M_n^\mathbb{D}$ со стандартным слоем $\mathbb{R}^n$ и атласом $\{(U_\alpha^V, h_\alpha^V)\}_{\alpha \in A}$, $U_\alpha^V = (\pi^V)^{-1}(U_\alpha)$, карты которого, согласованные со структурой расслоения, и функции перехода $h_\beta^V \circ (h_\alpha^V)^{-1}$ имеют соответственно вид

$$h_\alpha^V : (\pi^V)^{-1}(U_\alpha) \ni Y \mapsto \{X_\alpha^i = x_\alpha^i + \dot{x}_\alpha^i \varepsilon, y_\alpha^i\} \in U_\alpha^* \times \mathbb{R}^n, \quad X = \pi^V(Y), \quad \{X_\alpha^i\} = h_\alpha(X), \quad (4)$$

и

$$x_\beta^k + \dot{x}_\beta^k \varepsilon = f_{\beta\alpha}^k(x_\alpha^i, \dot{x}_\alpha^i) + \left(\dot{x}_\alpha^j \frac{\partial f_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^j} + g_{\beta\alpha}^k(x_\alpha^i, \dot{x}_\alpha^i) \right) \varepsilon, \quad y_\beta^k = y_\alpha^j \frac{\partial f_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^j} + g_{\beta\alpha}^k(x_\alpha^i, \dot{x}_\alpha^i). \quad (5)$$

Из уравнений (5) следует, что расслоение $\pi^V : O^V M_n^\mathbb{D} \rightarrow M_n^\mathbb{D}$ является аффинным расслоением, т. е. расслоением со структурной группой $GA(n, \mathbb{R})$ аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. Уравнения $dx^i = 0$, $dy^i = 0$ задают в этом расслоении плоскую связность ∇ , определенную над слоями канонического слоения $\mathcal{F}$ (частичную связность). Интегральные многообразия распределения, заданного уравнениями $dx^i = 0$, $dy^i = 0$, определяют слоение $\mathcal{F}^V$ на $O^V M_n^\mathbb{D}$. При параллельном перенесении в связности ∇ вдоль кривой γ , лежащей в слое слоения $\mathcal{F}$, точка многообразия $O^V M_n^\mathbb{D}$ описывает кривую $\tilde{\gamma}$, лежащую в слое слоения $\mathcal{F}^V$ и накрывающую кривую γ .

Из уравнений (5) следует также, что на многообразии $O^V M_n^\mathbb{D}$ имеется естественная структура n -мерного гладкого многообразия над алгеброй $\hat{\mathbb{D}}$ размерности три, элементы которой

имеют вид $a + b\varepsilon + c\varepsilon'$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, а умножение определяется соотношениями $\varepsilon^2 = (\varepsilon')^2 = \varepsilon \circ \varepsilon' = 0$. Эта структура задается атласом

$$\{(U_\alpha^V, H_\alpha^V)\}_{\alpha \in A}, \quad H_\alpha^V : (\pi^V)^{-1}(U_\alpha) \ni Y \mapsto \{Y_\alpha^i = x_\alpha^i + \dot{x}_\alpha^i \varepsilon + y_\alpha^i \varepsilon'\} \in p^{-1}(U_\alpha) \subset \widehat{\mathbb{D}}^n,$$

карты которого получаются из карт (4) заменой наборов координат $\{X_\alpha^i = x_\alpha^i + \dot{x}_\alpha^i \varepsilon, y_\alpha^i\}$ соответственно на наборы $\widehat{\mathbb{D}}$ -координат $\{Y_\alpha^i = x_\alpha^i + \dot{x}_\alpha^i \varepsilon + y_\alpha^i \varepsilon'\}$.

В случае полного многообразия $M_n^{\mathbb{D}}$ имеется естественный диффеоморфизм между $O^V M_n^{\mathbb{D}}$ и гомотопическим группоидом [7] $\Pi(M_n^{\mathbb{D}})$ слоения $\mathcal{F}$, при котором проекции $\pi_0 : \Pi(M_n^{\mathbb{D}}) \rightarrow M_n^{\mathbb{D}}$, относящей гомотопическому классу слоевого пути его начальную точку, соответствует проекция π^V . В дальнейшем будем отождествлять многообразия $O^V M_n^{\mathbb{D}}$ и $\Pi(M_n^{\mathbb{D}})$.

3. Скольжение локальной трансверсали $W_0 \ni X_0$ вдоль слоевого пути $\gamma : [0, 1] \rightarrow L_{X_0}$, $X_0 = \gamma(0)$, $X_1 = \gamma(1)$, осуществляет диффеоморфизм между W_0 и локальной трансверсалью $W_1 \ni X_1$ [2]. Параллельное перенесение в частичной плоской связности ∇ в расслоении $O^V M_n^{\mathbb{D}}$ осуществляет при этом изоморфизм аффинных расслоений

$$\begin{array}{ccc} (\pi^V)^{-1}(W_0) & \xrightarrow{\psi^V} & (\pi^V)^{-1}(W_1) \\ \pi_V \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ W_0 & \xrightarrow{\psi} & W_1 \end{array} . \quad (6)$$

На подмногообразиях $(\pi^V)^{-1}(W_0)$ и $(\pi^V)^{-1}(W_1)$ индуцируется структура $\mathbb{D}$ -гладких многообразий (по отношению к подалгебре $\mathbb{D}$ в $\widehat{\mathbb{D}}$, являющейся линейной оболочкой $\mathcal{L}(1, \varepsilon')$), и отображение ψ^V является $\mathbb{D}$ -диффеоморфизмом. Локальные диффеоморфизмы (6) порождают псевдогруппу $\mathbb{D}$ -гладких отображений между подмногообразиями в $(\pi^V)^{-1}(W_n)$ вида $(\pi^V)^{-1}(U)$, где U — открытое подмножество в W_n .

Относя каждой точке $X \in M_n^{\mathbb{D}}$ гомотопический класс $[\gamma_X]$ постоянного пути $\gamma_X : [0, 1] \ni t \mapsto X \in M_n^{\mathbb{D}}$ в этой точке, получим каноническое сечение

$$\sigma : M_n^{\mathbb{D}} \ni X \mapsto [\gamma_X] \in O^V M_n^{\mathbb{D}},$$

которое позволяет вложить многообразие $M_n^{\mathbb{D}}$ в $O^V M_n^{\mathbb{D}}$ как образ сечения σ . Вложение σ индуцирует диффеоморфизм (изоморфизм локально тривиальных расслоений)

$$\begin{aligned} \Sigma : T_{tr} M_n^{\mathbb{D}} &\rightarrow O^V M_n^{\mathbb{D}}, \\ \Sigma : (\pi_{tr})^{-1}(X) \ni Z &\mapsto \psi(\sigma(X), Z) \in (\pi^V)^{-1}(X). \end{aligned}$$

В локальных координатах отображение Σ имеет вид

$$\{x^i + \varepsilon \dot{x}^i + \varepsilon' z^i\} \mapsto \{x^i + \varepsilon \dot{x}^i + \varepsilon' (\dot{x}^i + z^i)\}.$$

Рассмотрим вещественное гладкое многообразие W_n и погружение $\varphi : W_n \rightarrow M_n^{\mathbb{D}}$, трансверсальное каноническому слоению и такое, что образ $\varphi(W_n)$ имеет непустое пересечение со всеми слоями канонического слоения на $M_n^{\mathbb{D}}$. В этом случае будем говорить, что $\varphi : W_n \rightarrow M_n^{\mathbb{D}}$ — погружение полной трансверсали. Отображение

$$\Sigma \circ T_{tr} \varphi : TW_n \rightarrow O^V M_n^{\mathbb{D}} \quad (7)$$

является морфизмом аффинных расслоений, изоморфно отображающим пространства $T_x W_n$, $x \in W_n$, на $(\pi^V)^{-1}(\varphi(x))$. Рассмотрим в качестве W_0 и W_1 , участвующих в диаграмме (6), образы $W_0 = \varphi(W'_0)$ и $W_1 = \varphi(W'_1)$ открытых подмножеств W'_0 и W'_1 в W_n ,

которые φ отображает диффеоморфно на W_0 и W_1 соответственно. Переходя к прообразам подмножеств $(\pi^V)^{-1}(W_0)$ и $(\pi^V)^{-1}(W_1)$ при отображении (7), получим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(W'_0) & \xrightarrow{\psi^T} & \pi^{-1}(W'_1) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ W'_0 & \xrightarrow{\psi} & W'_1 \end{array}, \quad (8)$$

в которой символ $\pi : TW_n \rightarrow W_n$ — проекция касательного расслоения, ψ — диффеоморфизм, определяемый скольжением локальной трансверсали, а ψ^T — $\mathbb{D}$ -диффеоморфизм, соответствующий $\mathbb{D}$ -диффеоморфизму ψ^V из диаграммы (6). Диаграмма (8) представляет собой изоморфизм аффинных расслоений. Все локальные $\mathbb{D}$ -диффеоморфизмы вида ψ^T из диаграммы (8) порождают псевдогруппу, которую будем обозначать Γ_W и называть псевдогруппой голономии на полной погруженной трансверсали W_n [8].

Определение. Пусть $M_n^{1\mathbb{D}}$ и $M_n^{2\mathbb{D}}$ — полные $\mathbb{D}$ -гладкие многообразия размерности n , $\varphi^1 : W_n^1 \rightarrow M_n^{1\mathbb{D}}$ и $\varphi^2 : W_n^2 \rightarrow M_n^{2\mathbb{D}}$ — погружения полных трансверсалей, а Γ_W^1 и Γ_W^2 — соответствующие псевдогруппы голономии. Псевдогруппы голономии Γ_W^1 и Γ_W^2 назовем изоморфными, если существует такой диффеоморфизм $f : W_n^1 \rightarrow W_n^2$, что при изоморфизме касательных расслоений $Tf : TW_n^1 \rightarrow TW_n^2$ всякая диаграмма (8) для открытых подмножеств W'_0 и W'_1 многообразия W_n^1 переходит в диаграмму (8) для открытых подмножеств $f(W'_0)$ и $f(W'_1)$ многообразия W_n^2 .

Псевдогруппа голономии на полной погруженной трансверсали W_n определяет отношение эквивалентности на касательном расслоении TW_n , при котором два элемента $v_0 \in \pi^{-1}(w_0)$ и $v_1 \in \pi^{-1}(w_1)$ эквивалентны, если для некоторых $W'_0 \ni w_0$ и $W'_1 \ni w_1$ выполняется соотношение $v_1 = \psi^T(v_0)$. Будем обозначать это отношение эквивалентности тем же символом Γ_W , что и псевдогруппу голономии. Пусть TW_n/Γ_W — факторпространство и $p : TW_n \rightarrow TW_n/\Gamma_W$ — каноническая проекция. У каждой точки $v \in TW_n$ найдется такая открытая окрестность U_v , что ограничение $p|_{U_v} : U_v \rightarrow U'_v \subset TW_n/\Gamma_W$ является взаимно однозначным отображением, а множество U_v является областью определения некоторой $\mathbb{D}$ -карты (U_v, H_v) из атласа $\mathbb{D}$ -гладкого многообразия на TW_n . Это позволяет рассматривать отображения $H'_v = H_v \circ (p|_{U_v})^{-1} : U'_v \rightarrow \mathbb{D}^n$ как $\mathbb{D}$ -карты на TW_n/Γ_W . Пусть $\mathcal{A}_W = \{(U'_v, H'_v)\}_{v \in I}$ — семейство $\mathbb{D}$ -карт указанного вида на TW_n/Γ_W такое, что $\bigcup_{v \in I} U'_v = TW_n/\Gamma_W$.

Теорема 1. 1) Пусть $M_n^{\mathbb{D}}$ — полное $\mathbb{D}$ -гладкое многообразие размерности n , а $\varphi : W_n \rightarrow M_n^{\mathbb{D}}$ — погружение полной трансверсали. Тогда семейство $\mathcal{A}_W$ задает структуру $\mathbb{D}$ -гладкого многообразия на TW_n/Γ_W , $\mathbb{D}$ -диффеоморфного многообразию $M_n^{\mathbb{D}}$. По отношению к этой структуре отображение $p : TW_n \rightarrow TW_n/\Gamma_W$ является локальным $\mathbb{D}$ -диффеоморфизмом.

2) Если псевдогруппы голономии Γ_W^1 и Γ_W^2 двух полных $\mathbb{D}$ -гладких многообразий $M_n^{1\mathbb{D}}$ и $M_n^{2\mathbb{D}}$ на полных погруженных трансверсалих $\varphi^1 : W_n^1 \rightarrow M_n^{1\mathbb{D}}$ и $\varphi^2 : W_n^2 \rightarrow M_n^{2\mathbb{D}}$ изоморфны, то многообразия $M_n^{1\mathbb{D}}$ и $M_n^{2\mathbb{D}}$ являются $\mathbb{D}$ -диффеоморфными.

Теорема 2. Пусть $F : M_n^{1\mathbb{D}} \rightarrow M_n^{2\mathbb{D}}$ — диффеоморфизм между двумя полными $\mathbb{D}$ -гладкими многообразиями, являющийся по отношению к каноническим слоениям на этих многообразиях изоморфизмом в категории слоений, и $\varphi : W_n \rightarrow M_n^{1\mathbb{D}}$ — полная погруженная трансверсаль. Отображение F является $\mathbb{D}$ -диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда псевдогруппы голономии на погруженных трансверсалих $\varphi : W_n \rightarrow M_n^{1\mathbb{D}}$ и $F \circ \varphi : W_n \rightarrow M_n^{2\mathbb{D}}$ совпадают.

4. Произвольный базис $\{V_\alpha = v_\alpha + \dot{v}_\alpha \varepsilon\}$, $\alpha = 1, 2$, в алгебре $\mathbb{D}$, рассматриваемой как векторное пространство, определяет подгруппу (решетку) $\Lambda = \{X \in \mathbb{D} \mid X = \lambda^\alpha V_\alpha, \lambda^\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha = 1, 2\}$ в аддитивной группе алгебры $\mathbb{D}$. Базис, определяющий решетку Λ , будем называть базисом этой решетки. Подгруппу Λ можно рассматривать как группу преобразований регулярного модуля $\mathbb{D}$, действующую на $\mathbb{D}$ сдвигами. Пусть $T = T(\Lambda) = \mathbb{D}/\Lambda$ — соответствующее факторпространство. Каноническая проекция $\pi : \mathbb{D} \rightarrow T$ является универсальным накрытием. Если $U' \subset \mathbb{D}$ — открытое множество, однозначно проектирующееся на T , и $\pi(U') = U$, то $(\pi|_{U'})^{-1} : U \rightarrow U' \subset \mathbb{D}$ является $\mathbb{D}$ -картой на T . Совокупность таких карт, в которой семейство подмножеств $U \subset T$ образует покрытие, является атласом, превращающим T в одномерное $\mathbb{D}$ -гладкое многообразие. Будем называть тор $T = T(\Lambda)$ с индуцированной структурой $\mathbb{D}$ -гладкого многообразия $\mathbb{D}$ -тором.

Ограничение $\pi|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow T$ канонической проекции на $\mathbb{R} \subset \mathbb{D}$ является полной погруженной трансверсалью $\mathbb{D}$ -гладкого многообразия T . Касательное расслоение $T\mathbb{R}$ естественно отождествляется с регулярным модулем $\mathbb{D}$ [9]. Сдвиг модуля $\mathbb{D}$ на вектор V_α является $\mathbb{D}$ -диффеоморфизмом ψ^T из верхней строки диаграммы (8), где открытые подмножества W'_0 и W'_1 совпадают со всей прямой $\mathbb{R}$, а псевдогруппа голономии на погруженной трансверсали $\varphi = \pi|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow T$ порождается группой сдвигов модуля $\mathbb{D}$ на векторы решетки Λ .

Для комплексных торов имеет место следующая теорема (например, [10]): два тора $T(\Lambda) = \mathbb{C}/\Lambda$ и $T(\Lambda') = \mathbb{C}/\Lambda'$ комплексно аналитически диффеоморфны тогда и только тогда, когда решетка Λ переходит в решетку Λ' при умножении модуля $\mathbb{D}$ на некоторое комплексное число. В этом пункте аналогичный вопрос рассматривается для $\mathbb{D}$ -торов. Рассмотрим два $\mathbb{D}$ -тора $T = T(\Lambda)$ и $T' = T(\Lambda')$, определяемые решетками Λ и Λ' соответственно. Пусть $\{V_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$, — базис решетки Λ . Предположим, что отображение $F : T \rightarrow T'$ является $\mathbb{D}$ -диффеоморфизмом. Этот $\mathbb{D}$ -диффеоморфизм индуцирует $\mathbb{D}$ -диффеоморфизм $\tilde{F}$ между универсальными накрывающими пространствами $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$ торов T и T' , реализованными как множества гомотопических классов путей на T и T' с началами в некоторой точке $x_0 \in T$ и точке $F(x_0) \in T'$ соответственно. Отождествляя каждое из пространств $\tilde{T}$, $\tilde{T}'$ с модулем $\mathbb{D}$ таким образом, что $\tilde{F}(0) = 0$, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{D} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ T & \xrightarrow{F} & T' \end{array} .$$

Поскольку $\mathbb{D}$ -диффеоморфизм $\tilde{F}$ накрывает $\mathbb{D}$ -диффеоморфизм F , а псевдогруппы голономии торов T и T' на погруженных трансверсальных $\varphi = \pi|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow T$ и $F \circ \varphi = \pi'|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow T'$ должны совпадать, то для любого $X \in \mathbb{D}$ должно выполняться соотношение $\tilde{F}(X + V_\alpha) = \tilde{F}(X) + V'_\alpha$, где $\{V'_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$, — некоторый базис решетки Λ' . Детальный анализ условий

$$\tilde{F}(X + V_\alpha) - \tilde{F}(X) = V'_\alpha = \text{const}, \quad X \in \mathbb{D},$$

приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. Два $\mathbb{D}$ -тора $T(\Lambda)$ и $T(\Lambda')$ $\mathbb{D}$ -диффеоморфны тогда и только тогда, когда существует элемент $A = a + \dot{a}\varepsilon \in \mathbb{D}$ такой, что $\Lambda' = A\Lambda$.

В случае, когда слои канонических слоений на $\mathbb{D}$ -диффеоморфных $\mathbb{D}$ -торах $T(\Lambda)$ и $T(\Lambda')$ являются всюду плотными, $\mathbb{D}$ -диффеоморфизм между $T(\Lambda)$ и $T(\Lambda')$ определяется формулой $\tilde{F}(X) = AX + B$, где $A, B \in \mathbb{D}$ и элемент A определен однозначно.

Отметим, что М.А. Малахальцевым было показано [11], что всякое слоение на торе T является каноническим слоением для некоторой $\mathbb{D}$ -гладкой структуры на T . В работе [12] им также были установлены $\mathbb{D}$ -дiffeоморфизмы между некоторыми $\mathbb{D}$ -торами, определенными решетками.

5. Пусть M_n — произвольное n -мерное аффинное многообразие с атласом

$$\mathcal{A} = \{h_\alpha : U_\alpha \ni x \mapsto \{x_\alpha^i\} \in U_\alpha^* \subset \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in A}$$

и функциями перехода

$$h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : x_\alpha^i = a_k^i(\alpha, \beta) x_\beta^k + b^i(\alpha, \beta), \quad (9)$$

где $a_k^i(\alpha, \beta)$ и $b^i(\alpha, \beta)$ — локально постоянные функции. С многообразием M_n естественно ассоциируются следующие два локально тривиальных расслоения (см. [6], [13], а также [14] для общего случая гладких многообразий над алгебрами Вейля):

1) $\pi : OM_n \rightarrow M_n$ с атласом $\{H_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha^* \times \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in A}$, функции перехода которого $H_\alpha \circ H_\beta^{-1} : \{x_\beta^i, y_\beta^i\} \mapsto \{x_\alpha^i, y_\alpha^i\}$ имеют вид

$$x_\alpha^i = a_k^i(\alpha, \beta) x_\beta^k + b^i(\alpha, \beta), \quad y_\alpha^i = a_k^i(\alpha, \beta) y_\beta^k + b^i(\alpha, \beta),$$

2) $\tilde{\pi} : \tilde{OM}_n \rightarrow M_n$ с атласом $\{\tilde{H}_\alpha : \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha^* \times \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in A}$, функции перехода которого $\tilde{H}_\alpha \circ \tilde{H}_\beta^{-1} : \{x_\beta^i, y_\beta^i\} \mapsto \{x_\alpha^i, y_\alpha^i\}$ имеют вид

$$x_\alpha^i = a_k^i(\alpha, \beta) x_\beta^k + b^i(\alpha, \beta), \quad y_\alpha^i = a_k^i(\alpha, \beta) y_\beta^k.$$

Расслоения OM_n и $\tilde{OM}_n$ называются соответственно [14] *каноническим соприкасающимся* и *каноническим радиантным* расслоениями аффинного многообразия M_n . Расслоение $\tilde{OM}_n$ эквивалентно касательному расслоению многообразия M_n . В работе [13] на расслоениях OM_n и $\tilde{OM}_n$ были введены структуры n -мерных $\mathbb{D}$ -гладких многообразий $O^\mathbb{D}M_n$ и $\tilde{O}^\mathbb{D}M_n$, определяемые соответственно атласами $\mathcal{A}^O = \{H_\alpha^O = \psi \circ H_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{D}^n\}_{\alpha \in A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}^O = \{\tilde{H}_\alpha^O = \psi \circ \tilde{H}_\alpha : \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{D}^n\}_{\alpha \in A}$, где $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni \{x^i, y^i\} \mapsto \{X^i = y^i + \varepsilon x^i\} \in \mathbb{D}^n$.

В качестве погруженной трансверсали для $\tilde{OM}_n$ можно взять отображение $\varphi : W_n = \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{O}^\mathbb{D}M_n$, являющееся аффинным изоморфизмом на слой $\tilde{O}_x M_n$ над точкой $x \in M_n$. Касательное расслоение $TW_n = T\mathbb{R}^n$ в этом случае естественно отождествляется с $\mathbb{D}$ -модулем $\mathbb{D}^n$, а отображение $\Phi : TW_n = \mathbb{D}^n \rightarrow \tilde{O}^\mathbb{D}M_n$ представляет собой накрытие.

Аффинное многообразие M_n называется *радиантным* [6], если оно обладает атласом, функции перехода (9) которого линейны, т. е. $b^i(\alpha, \beta) = 0$. Имеет место

Теорема 4. $\mathbb{D}$ -гладкие многообразия $O^\mathbb{D}M_n$ и $\tilde{O}^\mathbb{D}M_n$, ассоциированные со связным полным аффинным многообразием M_n , $\mathbb{D}$ -дiffeоморфны тогда и только тогда, когда многообразие M_n радиантно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, Пробл. геометрии (Итоги науки и техники ВИНТИ). М., **9**, 5–247 (1979).
- [2] Molino P. *Riemannian foliations* (Birkhäuser, 1988).
- [3] Thompson G., Schwardmann U. *Almost tangent and cotangent structures in the large*, Trans. AMS **327** (1), 313–328 (1991).
- [4] Vaisman I. *Lagrange geometry on tangent manifolds*, Int. J. of Math. and Math. Sci. **51**, 3241–3266 (2003).
- [5] Тёрстон У. *Трёхмерная геометрия и топология* (МЦНМО, М., 2001).
- [6] Goldman W., Hirsch M.W. *The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **26** (2), 629–649 (1984).

- [7] Phillips J. *The holonomic imperative and the homotopy groupoid of a foliated manifold*, Rocky Mountain J. of Math. **17** (1), 151–165 (1987).
- [8] Шурыгин В.В. *О строении полных многообразий над алгебрами Вейля*, Изв. вузов. Матем., № 11, 88–97 (2003).
- [9] Shurygin V.V. *Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles*, J. Math. Sci. **108** (2), 249–294 (2002).
- [10] Diamond F., Shurman J. *A first course in modular forms* (Springer, 2005).
- [11] Малахальцев М.А. *Структуры многообразия над алгеброй дуальных чисел на торе*, Тр. геом. семин. **22**, 47–62 (1994).
- [12] Малахальцев М.А. *Об одном классе многообразий над алгеброй дуальных чисел*, Тр. геом. семин. **21**, 70–79 (1991).
- [13] Мalyugina A.A., Шурыгин В.В. *Представления голономии одного класса многообразий над алгеброй дуальных чисел*, Изв. Пензенск. гос. пед. ун-та, № 26, 128–136 (2011).
- [14] Шурыгин В.В. *Препятствия к радиантности для гладких многообразий над алгебрами Вейля*, Изв. вузов. Матем., № 5, 71–83 (2005).

Александра Александровна Мalyugina
 Казанский федеральный университет,
 ул. Кремлевская д. 18, Россия, г. Казань, 420008,
 e-mail: alexandra.malyugina@gmail.com

Вадим Васильевич Шурыгин
 Казанский федеральный университет,
 ул. Кремлевская д. 18, Россия, г. Казань, 420008,
 e-mail: Vadim.Shurygin@kpfu.ru

A.A. Malyugina and V.V. Shurygin

Holonomy pseudogroup of a manifold over the algebra of dual numbers and some its applications

Abstract. We study properties of the holonomy pseudogroup on a total immersed transversal of the canonical foliation on a smooth manifold over the algebra of dual numbers $\mathbb{D}$. We apply holonomy pseudogroups to the investigation of $\mathbb{D}$ -diffeomorphisms between quotient manifolds of the algebra $\mathbb{D}$ by lattices and between $\mathbb{D}$ -smooth manifolds naturally associated with an affine manifold.

Keywords: affine manifold, manifold over the algebra of dual numbers, foliation, foliated bundle, tangent bundle, tangent manifold, torus over the algebra of dual numbers, Weil bundle.

Aleksandra Aleksandrovna Malyugina
 Kazan Federal University,
 18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
 e-mail: alexandra.malyugina@gmail.com

Vadim Vasilievich Shurygin
 Kazan Federal University,
 18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
 e-mail: Vadim.Shurygin@kpfu.ru