Общероссийский математический портал

А. С. Баландин, Т. Л. Сабатулина, Разрешимость неоднородного автономного дифференциального уравнения с последствием на отрицательной полуоси, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 3, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-3-3-18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 10:55:28

А.С. БАЛАНДИН, Т.Л. САБАТУЛИНА

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО АВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ НА ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

Аннотация. Для линейного автономного неоднородного функционально-дифференциального уравнения с последствием установлен критерий разрешимости и найдено представление всех решений в пространствах суммируемых с экспоненциальным весом функций. Полученные результаты применены к исследованию двух неоднородных дифференциальных уравнений с последствием (одно — с сосредоточенным, другое — с распределенным), для которых дано описание пространств решений в терминах параметров исходной задачи.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, последствие, неоднородное уравнение, разрешимость на оси, пространства функций с экспоненциальным весом.

УДК: 517.929

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-3-3-18

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1], посвященной изучению однородного линейного функционально-дифференциального уравнения с ограниченным последствием, в пространстве суммируемых с экспоненциальным весом функций установлена связь однозначной разрешимости уравнения на оси с устойчивостью этого же уравнения на положительной полуоси; показано, что пространство нетривиальных решений конечномерно, а его базис описывается конечным набором собственных и присоединенных функций характеристического уравнения.

Данная статья продолжает исследование, начатое в [1], применительно к неоднородным уравнениям того же типа. Для них установлены критерии разрешимости (однозначной разрешимости) и найдено интегральное, с точностью до конечномерного ядра, представление решения. Сочетая эти результаты с построением D -разбиения, удалось получить эффективные условия разрешимости для различных классов функционально-дифференциальных уравнений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$. Через D_{loc} обозначим множество функций, действующих из $\mathbb{R}_-$ в $\mathbb{C}$ и являющихся абсолютно непрерывными на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}_-$. Через L_{loc} обозначим множество функций, действующих из $\mathbb{R}_-$ в

Поступила в редакцию 12.02.2018, после доработки 12.02.2018. Принята к публикации 20.06.2018

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации (задание № 1.5336.2017/8.9) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

$\mathbb{C}$ и являющихся суммируемыми на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}_-$. Будем считать, что если в какой-либо сумме множество индексов суммирования пусто, то сумма равна нулю.

Рассмотрим линейное автономное однородное дифференциальное уравнение с ограниченным последствием

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega x^{(j)}(t-s) dr_j(s) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_-, \quad (1)$$

где $\omega \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, при всех $j = \overline{0, n-1}$ функции $r_j : [0, \omega] \rightarrow \mathbb{C}$ имеют ограниченную вариацию, $r_j(0) = 0$, $f \in L_{\text{loc}}$. Интегралы понимаются в смысле Римана–Стилтьеса ([2], с. 362). Обозначим $\rho = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega |dr_j(s)|$.

Назовем *решением* уравнения (1) функцию, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду (п. в.) на $\mathbb{R}_-$, все производные которой, вплоть до порядка $n-1$, принадлежат классу D_{loc} .

Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение (1) будем называть *однородным*.

Наряду с (1) рассмотрим то же самое уравнение, но на положительной полуоси:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega x^{(j)}(t-s) dr_j(s) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2)$$

Здесь функция f суммируема на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}_+$. Доопределим функции $x^{(j)}$, $j = \overline{0, n-1}$, на отрезке $[-\omega, 0]$ произвольным образом, лишь бы все функции $\int_t^\omega x^{(j)}(t-s) dr_j(s)$ оставались суммируемыми на $[0, \omega]$. Тогда в перечисленных выше предположениях относительно функций r_j решение уравнения (2) существует и единственно ([3], с. 19–23, теорема 1).

Все решения уравнения (2) при любом $t \in \mathbb{R}_+$ подчиняются оценке $|x(t)| \leq Me^{\rho t}$, $M > 0$ ([3], с. 23–24; [4], с. 93; [5], с. 98), т. е. не могут расти быстрее экспоненты с заданным показателем ρ . При изучении уравнений вида (2) эта оценка оказывается очень полезной. Для уравнения (1) ситуация существенно меняется: в работах [1], [6] построены примеры решений уравнения (1), для которых при любом $\alpha \geq 0$ справедливо предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{\alpha t} = +\infty$. Таким образом, класс всех решений уравнения (1) оказывается слишком широким и не имеющим конструктивного описания. Естественный выход был найден в априорном задании пространства решений [1], [7]–[11]. В работе [1] для однородного уравнения вида (1) в пространстве суммируемых с экспоненциальным весом функций найдено явное описание всех решений. В данной статье в тех же пространствах предполагается изучить уравнение (1) с ненулевой правой частью.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим классы функций

$$L^\alpha = \left\{ y : y^{(n-1)} \in D_{\text{loc}}, \quad \int_{-\infty}^0 |y^{(j)}(t)| e^{-\alpha t} dt < \infty, \quad j = \overline{0, n-1} \right\},$$

$$B^\alpha = \left\{ y : y \in L_{\text{loc}}, \quad \int_{-\infty}^0 |y(t)| e^{-\alpha t} dt < \infty \right\}.$$

Определение. Уравнение (1) назовем (B^α, L^β) -разрешимым, если для любой функции $f \in B^\alpha$ существует функция $x \in L^\beta$, удовлетворяющая (1) п. в. на $\mathbb{R}_-$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При исследовании уравнения (2) важную роль играет функция

$$g(p) = p^n + \sum_{j=0}^{n-1} p^j \int_0^\omega e^{-p\xi} dr_j(\xi), \quad p \in \mathbb{C},$$

которую принято называть *характеристической*. Сохраним за функцией g то же название применительно к уравнению (1).

Пусть $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — множество всех нулей функции g . Отметим ряд полезных свойств нулей функции g , установленных в [1], [4], [12]. Количество корней функции g с одинаковой вещественной частью конечно, поэтому нули можно занумеровать так, чтобы $\operatorname{Re} p_1 \geq \operatorname{Re} p_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} p_m \geq \dots$. Порядок нумерации корней с одинаковой вещественной частью произвольный. Через ν_m обозначим кратность корня p_m , которая всегда конечна.

Пусть $\beta_1 = \operatorname{Re} p_1$, $\beta_2 = \max_{\operatorname{Re} p_m < \beta_1} \{\operatorname{Re} p_m\}, \dots, \beta_k = \max_{\operatorname{Re} p_m < \beta_{k-1}} \{\operatorname{Re} p_m\}, \dots$. Очевидно, что последовательность $\{\beta_k\}$ монотонно стремится к $-\infty$.

Далее нам понадобится функция X , являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned} X^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega X^{(j)}(t-s) dr_j(s) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ X^{(n-1)}(0) &= 1, \quad X^{(j)}(0) = 0, \quad j = \overline{0, n-2}; \\ X^{(j)}(\xi) &= 0 \quad \text{при } \xi < 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

При $n = 1$ функцию X принято называть ([13], с. 34) *фундаментальным решением* уравнения (2). Как было отмечено в [1], используя результаты работ [4] и [12], легко получить

Предложение 1. Все функции $X^{(j)}$, $j = \overline{0, n-1}$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ представимы в виде

$$X^{(j)}(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_m \geq \lambda} \frac{d^j}{dt^j} (b_m(t) e^{p_m t}) + z_j(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

где b_m — полином степени не выше $\nu_m - 1$ с заданными комплексными коэффициентами,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |z_j(t)| e^{-\lambda t} = 0.$$

Также нам понадобится

Предложение 2 ([1]). Пусть $\beta \in [\beta_{k+1}, \beta_k)$. Тогда любое решение однородного уравнения (1) в пространстве L^β представимо в виде

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_m \geq \beta_k} q_m(t) e^{p_m t}, \tag{5}$$

где q_m — полином степени $\nu_m - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами.

Предложение 3 ([1]). Однородное уравнение (1) имеет в пространстве L^β только тривиальное решение тогда и только тогда, когда $\beta \geq \beta_1$.

В силу линейности уравнения (1) справедлива

Лемма 1. Если уравнение (1) (B^α, L^β) -разрешимо и $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ — его решения, то $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$ — решение однородного уравнения (1) в пространстве L^β .

Обозначим

$$Y(t) = X(t) - \sum_{\operatorname{Re} p_m \geq 0} b_m(t) e^{p_m t},$$

где b_m — полиномы из представления (4).

Отметим ряд важных свойств функции Y . Во-первых, в силу предложения 1 справедливы неравенства

$$\left| Y^{(j)}(t) \right| \leq N e^{-\gamma t}, \quad N, \gamma > 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (6)$$

Во-вторых, так как $\left| \int_{-\infty}^0 Y(t-s) f(s) ds \right| \leq N e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^t |f(s)| ds$, то при $f \in B^0$ и при каждом фиксированном t существует интеграл $\int_{-\infty}^0 Y(t-s) f(s) ds$.

В-третьих, используя непрерывность функций $Y^{(j)}$, $j = \overline{1, n-1}$, на $\mathbb{R}$ и “скачок” функции $Y^{(n)}$ в точке $t = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^j}{dt^j} \left(\int_{-\infty}^0 Y(t-\zeta) f(\zeta) d\zeta \right) &= \frac{d^j}{dt^j} \left(\int_{-\infty}^t Y(t-\zeta) f(\zeta) d\zeta + \int_t^0 Y(t-\zeta) f(\zeta) d\zeta \right) = \\ &= \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} \left(Y(t-t+0) f(t-0) + \int_{-\infty}^t \dot{Y}(t-\zeta) f(\zeta) d\zeta - Y(t-t-0) f(t+0) + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^0 \dot{Y}(t-\zeta) f(\zeta) d\zeta \right) = \dots = \int_{-\infty}^0 Y^{(j)}(t-\zeta) f(\zeta) d\zeta, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (7) \\ \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_{-\infty}^t Y(t-\zeta) f(\zeta) d\zeta + \int_t^0 Y(t-\zeta) f(\zeta) d\zeta \right) &= f(t) + \int_{-\infty}^0 Y^{(n)}(t-\zeta) f(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Сначала изучим разрешимость уравнения (1) в паре пространств (B^0, L^0) .

Лемма 2. Уравнение (1) (B^0, L^0) -разрешимо, причем существует решение

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^0 Y(t-s) f(s) ds.$$

Доказательство. Пусть $f \in B^0$. Из равенств (7) следует, что функция $\tilde{x}$ имеет все производные $\tilde{x}^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$. Используя оценки (6), получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \left| \tilde{x}^{(j)}(t) \right| dt &= \int_{-\infty}^0 \left| \int_{-\infty}^t Y^{(j)}(t-s) f(s) ds \right| dt \leq N \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)} |f(s)| ds dt = \\ &= N \int_{-\infty}^0 \left(\int_s^0 e^{-\gamma t} dt \right) e^{\gamma s} |f(s)| ds = \frac{N}{\gamma} \int_{-\infty}^0 (e^{\gamma s} - 1) |f(s)| ds < \infty, \quad j = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{x} \in L^0$.

Подставим функцию $\tilde{x}$ в левую часть уравнения (1). Принимая во внимание теорему Фубини ([2], с. 317) и формулы (7), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega \tilde{x}^{(j)}(t-s) dr_j(s) &= f(t) + \int_{-\infty}^0 Y^{(n)}(t-\zeta) f(\zeta) d\zeta + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega \int_{-\infty}^0 Y^{(j)}(t-s-\zeta) f(\zeta) d\zeta dr_j(s) = f(t). \end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{x}$ является решением уравнения (1). □

Лемма 3. Уравнение (1) (B^0, L^β) -разрешимо тогда и только тогда, когда $\beta \leq 0$.

Доказательство. Пусть $\beta > 0$. Домножим левую и правую части уравнения (1) на $e^{-\beta t}$, проинтегрируем на промежутке $[t, 0]$, $t < 0$, и изменим порядок интегрирования в каждом из повторных интегралов:

$$\int_t^0 x^{(n)}(\xi) e^{-\beta \xi} d\xi = \int_t^0 f(\xi) e^{-\beta \xi} d\xi - \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega \int_t^0 x^{(j)}(\xi - s) e^{-\beta \xi} d\xi dr_j(s).$$

Заметим, что

$$\int_t^0 x^{(n)}(\xi) e^{-\beta \xi} d\xi = x^{(n-1)}(0) - x^{(n-1)}(t) e^{-\beta t} + \beta \int_t^0 x^{(n-1)}(\xi) e^{-\beta \xi} d\xi.$$

Тогда

$$|x^{(n-1)}(t)| e^{-\beta t} \geq \int_t^0 |f(\xi)| e^{-\beta \xi} d\xi - T,$$

где для любого $t < 0$

$$T = x^{(n-1)}(0) + \beta \int_t^0 |x^{(n-1)}(\xi)| e^{-\beta \xi} d\xi + \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-\infty}^0 |x^{(j)}(\xi)| e^{-\beta \xi} d\xi \int_0^\omega |dr_j(s)| < \infty.$$

Возьмем такую функцию f , чтобы $f \in B^0$, но $f \notin B^\beta$ (очевидно, что такие функции существуют). Значит, существует такое t_0 , что $\inf_{t < t_0} |x^{(n-1)}(t)| e^{-\beta t} > 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^0 |x^{(n-1)}(t)| e^{-\beta t} dt = +\infty,$$

следовательно, $x \notin L^\beta$. Таким образом, уравнение (1) не разрешимо в паре пространств (B^0, L^β) при $\beta > 0$.

Из лемм 1, 2, предложения 2 и включения $L^0 \subseteq L^\beta$ при $\beta \leq 0$ вытекает, что уравнение (1) разрешимо в паре пространств (B^0, L^β) при $\beta \leq 0$. $\square$

Наконец, найдем критерий разрешимости уравнения (1) в паре пространств (B^α, L^β) при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. Уравнение (1) (B^α, L^β) -разрешимо тогда и только тогда, когда $\beta \leq \alpha$.

Доказательство. С помощью замены переменных $x(t) = e^{\alpha t} u(t)$ уравнение (1) сводится к уравнению

$$u^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \alpha^{n-k} u^{(k)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega e^{-\alpha s} \sum_{k=0}^j C_j^k \alpha^{j-k} u^{(k)}(t-s) dr_j(s) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

где $\varphi(t) = f(t) e^{-\alpha t}$. Заметим, что (8) — частный случай уравнения (1), в котором $\varphi \in B^0$, $u \in L^{\beta-\alpha}$. Для завершения доказательства остается к (8) применить лемму 3. $\square$

По аналогии с предложением 3 для уравнения (1) интересно дать критерий *однозначной разрешимости* в паре пространств (B^α, L^β) .

Теорема 2. Уравнение (1) однозначно разрешимо в паре пространств (B^α, L^β) , если и только если справедливы неравенства $\beta_1 \leq \beta \leq \alpha$.

Доказательство. Пусть уравнение (1) однозначно разрешимо в паре пространств (B^α, L^β) . Тогда из теоремы 1 следует $\beta \leq \alpha$. Кроме того, любые два решения уравнения (1) совпадают, значит, по лемме 1 однородное уравнение (1) в пространстве L^β имеет только тривиальное решение, т. е. в силу предложения 3 имеем $\beta_1 \leq \beta$.

Пусть справедливы неравенства $\beta_1 \leq \beta \leq \alpha$. Тогда по теореме 1 уравнение (1) (B^α, L^β) -разрешимо, а по предложению 3 однородное уравнение (1) в пространстве L^β имеет только тривиальное решение. Следовательно, в силу леммы 3 любые два решения неоднородного уравнения (1) совпадают в паре пространств (B^α, L^β) . Значит, (1) однозначно разрешимо в паре пространств (B^α, L^β) . $\square$

В теоремах 1 и 2 приведены критерии разрешимости в паре пространств (B^α, L^β) уравнения (1), но не дается никакой информации о структуре его решений. Заметим, что доказанная выше лемма 2 утверждает (B^0, L^0) -разрешимость уравнения (1) через построение частного решения в явном виде. Опираясь на этот факт, можно дать точное описание всех решений уравнения (1), которые попадают в L^β при $f \in B^\alpha$.

Теорема 3. *Если уравнение (1) (B^α, L^β) -разрешимо, то его решение представимо в виде*

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_m > \beta} q_m(t) e^{p_m t} + \int_{-\infty}^0 \left(X(t-s) - \sum_{\operatorname{Re} p_m \geq \alpha} b_m(t-s) e^{p_m(t-s)} \right) f(s) ds, \quad (9)$$

где q_m — полином степени $\nu_m - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами, b_m — полиномы из представления (4).

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 перейдем от уравнения (1) к (8). В силу предложения 2, лемм 1 и 2 и включения $L^0 \subseteq L^\beta$ при $\beta \leq 0$ имеем

$$u(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_m - \alpha > \beta - \alpha} q_m(t) e^{(p_m - \alpha)t} + \int_{-\infty}^0 \left(X(t-s) e^{-\alpha(t-s)} - \sum_{\operatorname{Re} p_m - \alpha \geq 0} b_m(t-s) e^{(p_m - \alpha)(t-s)} \right) \varphi(s) ds.$$

Домножая обе части равенства на $e^{\alpha t}$, получаем представление (9). $\square$

Наиболее близкие к теоремам 2 и 3 результаты были получены в работах Э.Ч. Титчмарша ([14], с. 300–301) и Х.Р. Питта [15], где рассматривались уравнения вида (1) в предположении поточечной экспоненциальной оценки на решение и правую часть, при этом условие разрешимости выполнялось автоматически, поскольку $\alpha = \beta$. В указанных работах были получены аналоги формулы (9).

Описание структуры решения уравнения (1) посредством формулы (9) становится эффективным, если для любой заданной пары α, β можно дать ответ, когда выполняются неравенства $\operatorname{Re} p_m > \beta$ и $\operatorname{Re} p_m \geq \alpha$, в терминах исходной задачи. Как известно [3]–[5], [12], [16], к исследованию таких неравенств сводятся задачи оценки скорости роста решений уравнения (2) на бесконечности (среди которых наиболее актуальны задачи устойчивости). Ответ на этот вопрос легко получить, если для уравнения (2) удастся построить D -разбиение [16]: разбить пространство параметров (коэффициентов и запаздываний) на области, в каждой из которых количество нулей характеристической функции, лежащих справа от мнимой оси, постоянно (с учетом кратности). Примеры D -разбиений для уравнений (2) первого и второго порядков можно найти в [6], [17]. В работах [1], [7]–[11] D -разбиение было успешно

применено к исследованию разрешимости простейших однородных уравнений вида (1). В разделах 3 и 4 построим D -разбиения и исследуем (B^α, L^β) -разрешимость более сложных классов уравнений (1).

3. ПРИЗНАКИ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_-, \quad (10)$$

где $a, b \in \mathbb{C}$. Характеристическая функция этого уравнения имеет вид $g(p) = p + a + be^{-p}$, $p \in \mathbb{C}$.

Построим для нее D -разбиение в пространстве параметров a, b .

1. Сначала рассмотрим случай $a, b \in \mathbb{R}$.

На плоскости Ouw зададим прямую $u + w = 0$ и семейство кривых $\{\Gamma_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$, где

$$\Gamma_m = \left\{ u = \frac{\theta}{\sin \theta}, \quad w = -\theta \operatorname{ctg} \theta, \quad \theta \in (\pi m, \pi(m+1)) \right\}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Данная прямая и кривые не пересекаются за исключением единственной точки $(-1, 1)$, из которой выходит кривая Γ_0 . Кроме того, кривая Γ_0 имеет асимптоту $u - w = 0$, а кривые Γ_m , $m \in \mathbb{N}$, имеют две асимптоты: $u + w = 0$, $u - w = 0$.

Замкнутое множество, ограниченное кривой Γ_0 и прямой $u + w = 0$, обозначим D_0 . Множество, ограниченное кривой Γ_1 и прямой $u + w = 0$, включая саму кривую Γ_1 и часть прямой при $u > 1$, обозначим D_1 . Множество, ограниченное кривыми Γ_0, Γ_2 и прямой $u + w = 0$, включая кривую Γ_2 , обозначим D_2 . Множество, ограниченное кривыми Γ_{2m-1} и Γ_{2m+1} , включая кривую Γ_{2m+1} , обозначим D_{2m+1} ($m \in \mathbb{N}$). Множество, ограниченное кривыми Γ_{2m} и Γ_{2m+2} , включая кривую Γ_{2m+2} , обозначим D_{2m} ($m \in \mathbb{N}$). Таким образом, плоскость Ouw разбита на непересекающиеся множества D_m , $m \in \mathbb{N}_0$ (рис. 1).

Будем использовать метод D -разбиения [16]. С помощью ([1], примеры 2, 3) несложно определить, сколько нулей справа от мнимой оси имеет функция g при $a = 0$. Заметим, что каждое из множеств D_m пересекается с осью Ou , получаем, что если $(b, a) \in D_m$, то функция g имеет ровно m нулей справа от мнимой оси (с учетом кратности нулей). Таким образом, индекс множества совпадает с количеством нулей в правой полуплоскости. На рис. 1 изображены множества D_m , числами $0, 1, 2, 3, \dots$ обозначены индексы соответствующего множества D_m . Легко видеть, что все кратные нули функции g имеют вид $p = -1 - a$. В правой полуплоскости появляются кратные нули, если и только если точка (b, a) лежит на кривой K , где

$$K = \{(u, w) : ue^{w+1} = 1, \quad u > 1\}.$$

На рис. 1 данная кривая обозначена пунктиром. Функция g имеет кратный корень, лежащий на мнимой оси, т. е. $p = 0$, только при $a = -1$, $b = 1$.

2. Перейдем к общему случаю $a, b \in \mathbb{C}$. Пользуясь приемом из работы [18], рассмотрим функцию

$$\tilde{g}(p) \equiv g(p + \beta - i \operatorname{Im} a) = p + \lambda + \mu e^{-p}, \quad p \in \mathbb{C},$$

где $\lambda = \beta + \operatorname{Re} a$, $\mu = be^{-\beta + i \operatorname{Im} a}$. Так как $\lambda \in \mathbb{R}$, то в результате замены количество параметров уменьшилось. Кроме того, данная замена позволяет свести задачу исследования нулей функции g относительно вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = \beta$ к задаче исследования нулей функции $\tilde{g}$ относительно мнимой оси.

Рис. 1. Кривые Γ_m ($m \in \mathbb{N}_0$),
 K и прямая $u + w = 0$

Рис. 2. Поверхность S

В пространстве $Ouvw$ зададим поверхность

$$S = \{u = -w \cos \theta + \theta \sin \theta, \quad v = -w \sin \theta - \theta \cos \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}\}.$$

На рис. 2 изображена поверхность S , на рис. 1 — ее сечение при $v = 0$, на рис. 3 — сечение при $w = 0$ (т.е. $\lambda = 0$). Поверхность S разбивает пространство на семейство непересекающихся множеств, причем все множества пересекаются с плоскостью $v = 0$, а также они симметричны относительно этой плоскости. Используя критерий устойчивости из [18], сразу получаем, что если точка $(\operatorname{Re} \mu, \operatorname{Im} \mu, \lambda)$ принадлежит “конусу” (находится в центре на рис. 2), включая границы, то функция $\tilde{g}$ не имеет нулей справа от мнимой оси. Обозначим это множество G_0 . Можно показать, что если точка $(\operatorname{Re} \mu, \operatorname{Im} \mu, \lambda)$ принадлежит множеству, окружающему “конус”, включая внешние границы, то функция $\tilde{g}$ имеет ровно один корень справа от мнимой оси; обозначим это множество G_1 . Аналогично, если точка принадлежит множеству (обозначим его G_2), окружающему предыдущее множество, то функция $\tilde{g}$ имеет только два корня справа от мнимой оси. Продолжая процесс, получаем все остальные множества (G_3, G_4 и т.д.).

Отметим, что функция $\tilde{g}$ имеет кратные корни только при $\mu \in \mathbb{R}$, т.е. получаем предыдущий случай.

различных значениях λ , жирной линией выделено сечение при $\lambda = 0$, при $\lambda = -1$ область G_0 вырождается в точку. Опишем сечения области G_0 при различных значениях λ . Сечение при $\lambda = 0$ можно увидеть на рис. 4. Чем больше λ , тем больше соответствующее сечение множества G_0 , при этом сечение становится все более похожим на круг. Заметим, что при $\lambda = -1$ область G_0 вырождается в точку, при $\lambda < -1$ множество G_0 пусто. Таким образом, для того, чтобы функция $\tilde{g}$ не имела нулей справа от мнимой оси, необходимо выполнение неравенства $\lambda \geq -1$.

На рис. 4 изображены сечения множества G_1 при различных значениях $\lambda \leq -1$. Чем меньше λ , тем больше соответствующее сечение множества G_1 , при этом сечение становится все более похожим на круг. Кроме того, границы всех сечений при $\lambda < -1$ гладкие, “пик”,

Рис. 3. Сечение $\lambda = 0$ Рис. 4. Некоторые сечения множества G_1 при $\lambda \leq -1$

который виден на рис. 4, в действительности представляет собой иллюзию, разрушающуюся при увеличении масштаба. “Пик” имеется только при $\lambda = -1$, причем его вершина не принадлежит G_1 .

(закрашены) области G_1 при некоторых $\lambda \geq 0$. граница не принадлежит G_1 , а внешняя принадлежит G_1 .

Применяя построенное D -разбиение, найдем условия разрешимости и представление решения для некоторых классов уравнения (10). В таких исследованиях может быть полезна замена переменных $u(t) = e^{-\alpha t}x(t)$, с помощью которой уравнение (10) принимает вид

$$\dot{u}(t) + (\alpha + a)u(t) + be^{-\alpha}u(t-1) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}_-, \quad (11)$$

где $\varphi(t) = f(t)e^{-\alpha t}$. В результате если $f \in B^\alpha$, $x \in L^\beta$, то $\varphi \in B^0$, $u \in L^{\beta-\alpha}$.

Пусть в (10) $a = 0$, $b \in \mathbb{C}$, $f = 0$. Для уравнения

$$\dot{x}(t) + bx(t-1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_-, \quad (12)$$

получим эффективные условия разрешимости.

Признак 1. Уравнение (12) в пространстве L^β имеет только тривиальное решение, если и только если $(\operatorname{Re} be^{-\beta}, \operatorname{Im} be^{-\beta}, \beta) \in G_0$.

Доказательство. Если $(\operatorname{Re} be^{-\beta}, \operatorname{Im} be^{-\beta}, \beta) \in G_0$, то функция $\tilde{g}$ не имеет нулей справа от мнимой оси. Значит, функция g не имеет нулей справа от прямой $\operatorname{Re} p = \beta$, т.е. $\beta_1 \leq \beta$. Тогда из предложения 3 вытекает, что уравнение (12) в пространстве L^β имеет только тривиальное решение. $\square$

при различных β : чем больше β , тем больше овал. $\beta = 0$; при $\beta = -1$ овал вырождается в точку. Условие $(\operatorname{Re} be^{-\beta}, \operatorname{Im} be^{-\beta}, \beta) \in G_0$ удобно проверять, используя сечения G_0 . По числу β , т.е. по третьей координате, выбираем нужное сечение, напоминающее по форме овал, и проверяем, попадает ли в него точка $(\operatorname{Re} be^{-\beta}, \operatorname{Im} be^{-\beta})$.

Исследуем структуру нетривиальных решений уравнения (12).

Признак 2. Пусть $b \neq \frac{1}{e}$. Любое решение уравнения (12) в пространстве L^β представимо в виде

$$x(t) = \sum_{n=1}^m c_n e^{p_n t},$$

где c_n — произвольные комплексные числа, если и только если $(\operatorname{Re} b e^{-\beta}, \operatorname{Im} b e^{-\beta}, \beta) \in G_m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Доказательство. Из условия $b \neq \frac{1}{e}$ вытекает, что все нули функции $\tilde{g}(p) = p + \beta + b e^{-\beta} e^{-p}$ простые. Условие $(\operatorname{Re} b e^{-\beta}, \operatorname{Im} b e^{-\beta}, \beta) \in G_m$ ($m \in \mathbb{N}$) эквивалентно тому, что функция $\tilde{g}$ имеет m нулей справа от мнимой оси, т. е. функция g имеет m нулей справа от вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = \beta$. Далее достаточно применить предложение 2. $\square$

Рис. 2 дает наглядное представление о множествах G_m и позволяет делать выводы о структуре решений уравнения (12). Например, легко убедиться, что вершина “конуса” G_0 имеет координаты $(1, 0, -1)$, откуда следует, что при $\beta < -1$ уравнение (12) всегда имеет нетривиальное решение, причем размерность пространства решений — любое натуральное число m .

Отдельно отметим интересный случай $m = 1$. Если $(\operatorname{Re} b e^{-\beta}, \operatorname{Im} b e^{-\beta}, \beta) \in G_1$, то характеристическая функция уравнения (12) имеет единственный нуль, лежащий справа от прямой $\operatorname{Re} p = \beta$, причем этот нуль вещественный и простой. Поэтому в рассматриваемом случае, как отмечал еще А.Д. Мышкис в ([3], с. 57), уравнение (12) эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению $\dot{x} + p_0 x = 0$.

Для проверки условия $(\operatorname{Re} b e^{-\beta}, \operatorname{Im} b e^{-\beta}, \beta) \in G_1$, аналогично случаю $m = 0$, также удобно строить плоские сечения множества G_1 . На рис. 3, 4 изображены сечения множества G_1 при различных λ (в условиях признака 2 $\lambda = \beta$). Используя эти сечения, легко определить, когда при заданном β пространство решений уравнения (12) одномерно.

Признак 3. Пусть $b = \frac{1}{e}$, $\beta < -1$. Условие $(e^{-(\beta+1)}, \beta) \in D_m$ ($m \in \mathbb{N}$, m четное) выполняется, если и только если любое решение уравнения (12) в пространстве L^β представимо в виде

$$x(t) = (c_1 t + c_2) e^{-t} + \sum_{n=1}^{m/2-1} e^{\beta_{2n} t} (c_{2n+1} \cos(\operatorname{Im} p_{2n} t) + c_{2n+2} \sin(\operatorname{Im} p_{2n} t)),$$

где c_n — произвольные вещественные числа.

Доказательство. Функция $\tilde{g}(p) = p + \beta + b e^{-\beta} e^{-p}$ при любом β имеет кратные корни, если и только если $b = \frac{1}{e}$. Легко видеть, что кратный корень единственный, имеет кратность два, равен $p = -1 - \beta$ и среди всех корней функции g имеет наибольшую вещественную часть, а простые корни образуют комплексно сопряженные пары. Поскольку в данной ситуации $b \in \mathbb{R}$, вместо множеств G_m можно взять их сечения, множества D_m . Если $(e^{-(\beta+1)}, \beta) \in D_m$ ($m \in \mathbb{N}$, m четное), то функция g имеет один нуль $p = -1$ кратности два и $m - 2$ простых нулей справа от прямой $\operatorname{Re} p = \beta$. $\square$

Заметим, что если в признаке 3 верхний предел в сумме равен нулю, то и вся сумма равна нулю.

Если $b = \frac{1}{e}$ и $\beta \geq -1$, то находимся в условиях признака 1: уравнение (12) имеет в L^β только тривиальное решение, т. е. размерность пространства решений равна нулю. Если $b = \frac{1}{e}$ и $\beta < -1$, то $(e^{-(\beta+1)}, \beta) \in K$ (на рис. 1 множество K нарисовано пунктиром). Из рис. 1 видно, что кривая K не имеет общих точек с множествами D_m при нечетных m .

Следовательно, ни при каком β размерность пространства решений уравнения (12) в L^β не может быть нечетной.

Пусть в уравнении (10) $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$. Для уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_-, \quad (13)$$

получим эффективные условия однозначной разрешимости в паре пространств (B^α, L^α) .

Признак 4. Уравнение (13) в паре пространств (B^α, L^α) однозначно разрешимо, если и только если выполняются неравенства $\alpha + a \geq -1$ и $-\alpha - a \leq be^{-\alpha} \leq \frac{\theta_0}{\sin \theta_0}$, где θ_0 — корень уравнения $be^{-\alpha} = -\theta \operatorname{ctg} \theta$ при $\theta \in (0, \pi)$.

Доказательство. В данном признаке $\beta = \alpha$, поэтому по теореме 1 при любом α уравнение (13) (B^α, L^α) -разрешимо.

Учитывая уравнения для кривой Γ_0 , получаем, что неравенства в признаке 4 равносильны условию $(be^{-\alpha}, \alpha + a) \in D_0$, т. е. тому, что функция g не имеет нулей справа от прямой $\operatorname{Re} p = \alpha$. Последний факт по теореме 2 эквивалентен однозначной разрешимости уравнения (13) в паре пространств (B^α, L^α) . $\square$

Уточним структуру решений уравнения (13). Обозначим через X фундаментальное решение уравнения $\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Признак 5. Пусть уравнение (13) в паре пространств (B^α, L^α) однозначно разрешимо. Тогда имеют место следующие утверждения:

о если $\alpha + a > -1$ и $-\alpha - a < be^{-\alpha} < \frac{\theta_0}{\sin \theta_0}$, то решение уравнения (13) имеет вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^0 X(t-s)f(s) ds;$$

о если $\alpha + a > -1$ и $-\alpha - a = be^{-\alpha}$, то — вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^0 \left(X(t-s) - b_1 e^{\alpha(t-s)} \right) f(s) ds;$$

о если $\alpha + a > -1$ и $be^{-\alpha} = \frac{\theta_0}{\sin \theta_0}$, то — вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^0 \left(X(t-s) - e^{\alpha(t-s)} (b_1 \cos(\operatorname{Im} p_1(t-s)) + b_2 \sin(\operatorname{Im} p_1(t-s))) \right) f(s) ds;$$

о если $\alpha + a = -1$ и $be^{-\alpha} = 1$, то — вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^0 \left(X(t-s) - (b_1(t-s) + b_2)e^{\alpha(t-s)} \right) f(s) ds.$$

Во всех утверждениях b_1, b_2 — некоторые заданные вещественные числа.

Доказательство. Перейдем от уравнения (13) к (11). С помощью леммы 2 найдем представление решения уравнения (11) в паре пространств (B^0, L^0) . Далее последовательно изучаем случаи, когда точка $(be^{-\alpha}, \alpha + a)$ попадает во внутренность множества D_0 , на его прямолинейную границу, на криволинейную границу и в вершину $(1, -1)$, используя D -разбиение, описанное выше. $\square$

Следующий результат относится к “пограничному” случаю $a = -1, b = 1$ (рис. 1), который соответствует уравнению

$$\dot{x}(t) + x(t) - x(t-1) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_-. \quad (14)$$

Рассмотрим уравнение (14) при $f : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in B^0$. Из теоремы 1 следует, что (14) разрешимо, если и только если $\beta \leq 0$.

Признак 6. Пусть $\beta \leq 0$. Уравнение (14) однозначно разрешимо в паре пространств (B^0, L^β) тогда и только тогда, когда $\beta \leq 0$; решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^0 (X(t-s) - b_1(t-s) - b_2)f(s) ds,$$

где b_1, b_2 — некоторые заданные вещественные числа.

Доказательство. Функция $g(p) = p - 1 + e^{-p}$ имеет нуль на мнимой оси ($p_0 = 0$) и не имеет нулей справа от мнимой оси. Значит, и из теоремы 2 следует, что уравнение (14) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда $\beta = 0$. Представление решения получаем из последнего утверждения признака 5 при $\alpha = 0$. $\square$

Если $\beta < 0$, то уравнение (14) при $f \in B^0$ имеет в пространстве L^β бесконечно много решений. Дадим их описание. Обозначим ординаты точек пересечения линии K и кривых Γ_m (m четное) через a_m . Очевидно, $a_0 = -1$; для других чисел несложно найти приближенные значения $a_2 \approx -3.0888$, $a_4 \approx -3.6641$ и т. д.

Признак 7. Если $\beta \in [a_m + 1, a_{m-2} + 1)$ ($m \in \mathbb{N}$ четное), то любое решение уравнения (14) представимо в виде

$$x(t) = c_1 t + c_2 + \sum_{n=1}^{m/2-1} e^{\beta_{2n} t} (c_{2n+1} \cos(\operatorname{Im} p_{2n} t) + c_{2n+2} \sin(\operatorname{Im} p_{2n} t)) + \\ + \int_{-\infty}^0 (X(t-s) - b_1(t-s) - b_2)f(s) ds,$$

где b_1, b_2 — некоторые заданные вещественные числа, а c_n — произвольные вещественные числа.

Доказательство. Условие $\beta \in [a_m + 1, a_{m-2} + 1)$ ($m \in \mathbb{N}$ четное) равносильно $(e^{-\beta}, \beta - 1) \in D_m$, т. е. справа от прямой $\operatorname{Re} p = \beta$ функция $g(p) = p - 1 + e^{-p}$ имеет $m - 2$ простых нулей, образующих комплексно сопряженные пары, и один нуль $p_1 = 0$ кратности два. Далее с помощью теоремы 3 получаем признак 7. $\square$

4. ПРИЗНАК ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + b \int_{t-1}^t e^{-c(t-s)} x(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_-, \quad (15)$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Характеристическая функция уравнения (15) имеет вид

$$g(p) = p + a + b \int_0^1 e^{-(p+c)\xi} d\xi.$$

Зафиксируем произвольное b . Пусть D_b — множество, состоящее из таких точек (a, b, c) , при которых функция g не имеет нулей справа от мнимой оси. Обозначим $D = \bigcup_{b=-\infty}^{+\infty} D_b$, а через $\operatorname{int} D$ и ∂D — соответственно внутренность и границу множества D . В работе [19]

показано, что каждое из множеств D_b и D линейно связно, причем граница множества D лежит на поверхности

$$S = \left\{ (u, v, w) : u = \frac{\theta(-w \cos \theta + e^w w + \theta \sin \theta)}{-e^w \theta + w \sin \theta + \theta \cos \theta}, \quad v = \frac{e^w \theta (w^2 + \theta^2)}{e^w \theta - w \sin \theta - \theta \cos \theta}, \quad \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

и поверхности

$$v = -\frac{we^w u}{e^w - 1} \quad \text{при } w \neq 0, \quad u + v = 0 \quad \text{при } w = 0. \quad (16)$$

Замыкание множества точек, лежащих правее данных поверхностей, образует множество D (рис. 5).

Рис. 5. Множество D (занимает верхнюю переднюю часть)

Рассмотрим подробнее сечения множества D при различных значениях b , т. е. множества D_b . В работе [11] изображено несколько таких сечений. Заметим, что при $b \leq 0$ границы множеств D_b лежат только на поверхности (16), которая задается явно. При $b = 0$ граница соответствующего множества D_b прямолинейна. Если $b > 0$ границы множеств D_b имеют более сложную структуру.

Наконец, отметим, что с помощью замены $x(t) = u(t)e^{-\alpha t}$ возможен переход от (15) к уравнению того же вида, но с правой частью из пространства B^0 .

Получим эффективный признак однозначной разрешимости уравнения (15).

Признак 8. Уравнение (15) однозначно разрешимо в паре пространств (B^α, L^β) тогда и только тогда, когда $\beta \leq \alpha$ и $(a + \beta, b, c + \beta) \in D$.

Доказательство. По теореме 2 уравнение (15) однозначно разрешимо в паре пространств (B^α, L^β) тогда и только тогда, когда $\beta_1 \leq \beta \leq \alpha$. Условие $(a + \beta, b, c + \beta) \in D$ равносильно тому, что функция g не имеет нулей справа от прямой $\operatorname{Re} p = \beta$, т. е. $\beta_1 \leq \beta$. $\square$

Уточним структуру решения уравнения (15).

Обозначим через X фундаментальное решение уравнения (15).

Признак 9. Пусть уравнение (15) в паре пространств (B^α, L^β) однозначно разрешимо. Тогда имеют место следующие утверждения:

о если $(a + \alpha, b, c + \alpha) \in \text{int } D$, то

$$x(t) = \int_{-\infty}^0 X(t-s)f(s) ds; \quad (17)$$

о если $(a + \alpha, b, c + \alpha) \in \partial D$, $(a + \alpha, b, c + \alpha) \neq (-2, 2, 0)$, то

$$x(t) = \int_{-\infty}^0 \left(X(t-s) - \sum_{\text{Re } p_n = \alpha} b_n e^{p_n(t-s)} \right) f(s) ds, \quad (18)$$

где b_n — некоторые заданные комплексные числа;

о если $(a + \alpha, b, c + \alpha) = (-2, 2, 0)$, то

$$x(t) = \int_{-\infty}^0 \left(X(t-s) - (b_1(t-s) + b_2)e^{\alpha(t-s)} \right) f(s) ds, \quad (19)$$

где b_1, b_2 — некоторые заданные вещественные числа.

Доказательство. Если $(a + \alpha, b, c + \alpha) \in \text{int } D$, все нули функции g лежат слева от прямой $\text{Re } p = \alpha$. Значит, учитывая однозначную разрешимость уравнения (15) в паре пространств (B^α, L^β) , по теореме 3 решение уравнения (??) в паре пространств (B^α, L^β) представимо в виде (17).

Если $(a + \alpha, b, c + \alpha) \in \partial D$, $(a + \alpha, b, c + \alpha) \neq (-2, 2, 0)$, функция g не имеет нулей справа от прямой $\text{Re } p = \alpha$, а все нули, лежащие на прямой $\text{Re } p = \alpha$, простые. Значит, учитывая однозначную разрешимость уравнения (15) в паре пространств (B^α, L^β) , по теореме 3 решение уравнения (??) в паре пространств (B^α, L^β) представимо в виде (18).

Если $(a + \alpha, b, c + \alpha) = (-2, 2, 0)$, функция g не имеет нулей справа от прямой $\text{Re } p = \alpha$, а на прямой $\text{Re } p = \alpha$ лежит единственный нуль $p_0 = \alpha$, причем кратности два. Значит, учитывая однозначную разрешимость уравнения (15) в паре пространств (B^α, L^β) , по теореме 3 решение уравнения (14) в паре пространств (B^α, L^β) представимо в виде (19). $\square$

Авторы статьи выражают благодарность И.М. Плаксиной, работы которой по сингулярным краевым задачам (например, [20], [21]), инициировали данное исследование, В.В. Малыгиной за ряд существенных замечаний, а также участникам Пермского семинара по функционально-дифференциальным уравнениям за внимание к работе и плодотворное обсуждение ее результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Баландин А.С., Сабатулина Т.Л. Разрешимость автономного дифференциального уравнения с ограниченным последствием на отрицательной полуоси, Изв. вузов. Матем., № 10, 26–37 (2017).
- [2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа (Наука, М., 1981).
- [3] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (Наука, М., 1972).
- [4] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения (Мир, М., 1967).
- [5] Azbelev N.V., Simonov P.M. Stability of differential equations with aftereffects, Stability and control: theory, methods and appl., Vol. 20 (Taylor & Francis, London, 2003).
- [6] Мулюков М.В. Об асимптотической устойчивости двухпараметрической системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, Изв. вузов. Матем., № 6, 48–55 (2014).
- [7] Баландин А.С. О разрешимости на оси некоторых классов дифференциально-разностных уравнений, Вестн. Тамбовск. ун-та. Сер.: Естествен. и техн. науки 18 (5–2), 2449–2451 (2013).

- [8] Баландин А.С. *О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием*, Вестн. Тамбовск. ун-та. Сер.: Естествен. и техн. науки **20** (5), 1044–1050 (2015).
- [9] Баландин А.С., Малыгина В.В. *О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с последствием*, Вестн. Пермск. ун-та. Сер.: Матем. Механ. Информатика, № 2, 7–13 (2016).
- [10] Баландин А.С. *О разрешимости на отрицательной полуоси дифференциально-разностного уравнения второго порядка*, Сб. тр. IX междунар. конф. “Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016)”, Воронеж, 20–26 сентября 2016 (ООО Издательство “Научная книга”, Воронеж, 2016), с. 39–42.
- [11] Balandin A.S. *On the solvability on the negative semi-axis of an autonomous differential equation with delay*, J. Math. Sci. **230** (5), 656–659 (2018).
- [12] Зубов В.И. *К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом*, Изв. вузов. Матем., № 6, 86–95 (1958).
- [13] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1991).
- [14] Titchmarsh E.C. *Introduction to the theory of Fourier integrals* (The Clarendon Press, Oxford, 1948).
- [15] Pitt H.R. *On a class of linear integro-differential equations*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **43** (2), 153–163 (1947).
- [16] Неймарк Ю.И. *Динамические системы и управляемые процессы* (Наука, М., 1978).
- [17] Мулюков М.В. *Устойчивость одного линейного автономного дифференциального уравнения с сосредоточенным и распределенным запаздыванием*, Вестн. Тамбовск. ун-та. Сер.: Естествен. и техн. науки **20** (5), 1325–1331 (2015).
- [18] Khokhlova T., Kipnis M., Malygina V. *The stability cone for a delay differential matrix equation*, Applied Math. Lett. **24** (5), 742–745 (2011).
- [19] Баландин А.С., Сабатулина Т.Л. *О линейной связности областей устойчивости дифференциальных уравнений с последствием*, Функци.-дифференц. уравнения: теория и приложения, 29–38 (2018).
- [20] Плаксина В.П., Плаксина И.М., Плехова Э.В. *О разрешимости задачи Коши для одного квазилинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения*, Изв. вузов. Матем., № 2, 54–61 (2016).
- [21] Bravyi E., Plaksina I. *On the Cauchy problem from singular functional differential equations*, Adv. Diff. Equat., 91 (2017).

Антон Сергеевич Баландин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь-ГСП, 614990, Россия,

e-mail: balandin-anton@yandex.ru

Татьяна Леонидовна Сабатулина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь-ГСП, 614990, Россия,

e-mail: TSabatulina@gmail.com

A.S. Balandin and T.L. Sabatulina

**Solvability of inhomogeneous autonomous differential equation with aftereffect
on the negative semi-axis**

Abstract. We obtain necessary and sufficient condition of solvability for a linear autonomous inhomogeneous functional differential equation with aftereffect and find the representation of all solutions in the special space of integrable functions with exponential weight. The obtained results are applied for study of two inhomogeneous differential equations with delay (the first equation is with concentrated delay, and the second one is with distributed delay). We give effective description of the space of solutions for these equations.

Keywords: functional differential equation, aftereffect, inhomogeneous equation, solvability on the axis, space of functions with exponential weight.

Anton Sergeevich Balandin

*Perm National Research Polytechnic University,
29 Komsomol'skii Ave., Perm, 614990 Russia,*

e-mail: balandin-anton@yandex.ru

Tat'yana Leonidovna Sabatulina

*Perm National Research Polytechnic University,
29 Komsomol'skii Ave., Perm, 614990 Russia,*

e-mail: TSabatulina@gmail.com